Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 12

Abgabetermin: 17.01.2014

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen, Vornamen, und Ihre Übungsgruppe an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 8, 9 und 10

Fragen zu den Aufgaben können auf `http://www.BTU-Forum.DE` in Unterforum "Theoretische Informatik, ..." gestellt werden.

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Welche Funktionen f entstehen durch primitive Rekursion $\mathrm{PR}(g, h)$ aus den folgenden Funktionen g und h?

1. $g : \mathbb{N}^1 \to \mathbb{N}$ mit $g(n) = \mathrm{zero}_1(n)$ (1-stellige Nullfunktion)
   $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $h(n, m, l) = p_3^{(3)}(n, m, l)$ (dritte 3-stellige Projektion)
2. $g : \mathbb{N}^1 \to \mathbb{N}$ mit $g(n) = \mathrm{zero}_1(n)$ (1-stellige Nullfunktion)
   $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $h(n, m, l) = p_2^{(3)}(n, m, l)$ (zweite 3-stellige Projektion)
3. $g : \mathbb{N}^1 \to \mathbb{N}$ mit $g(n) = \mathrm{zero}_1(n)$ (1-stellige Nullfunktion)
   $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $h(n, m, l) = s \circ p_2^{(3)}(n, m, l)$ (zweite 3-stellige Projektion, um 1 inkrementiert)

Aufgabe 4
Geben Sie Funktionen g und h an, so dass durch primitive Rekursion $\mathrm{PR}(g, h)$ die folgenden Funktionen f entstehen.

1. $f : \mathbb{N}^1 \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = n^2$
2. $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f(n, m) = n \cdot m$
3. $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f(n, m) = n^m$
4. $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f(n, m) = n \dot{-} m$
5. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n)$ ist kleinster Nichtteiler von n, falls $n > 0$ und 0 sonst.
6. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n)$ ist i-te Fibonacci-Zahl a_i ($a_0 := a_1 := 1$ und für $i \geq 2$ ist $a_i := a_{i-1} + a_{i-2}$).
7. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n)$ ist i-te Primzahl p_i ($p_0 := 2$, $p_1 = 3$ etc.).

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind:

1. $\mathrm{sg} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\mathrm{sg}(x) :=$ `if` $x = 0$ `then` 0 `else` 1;
2. $\overline{\mathrm{sg}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\overline{\mathrm{sg}}(x) := 1 \mathbin{\dot{-}} \mathrm{sg}(x)$
3. $t : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $t(n, m) = \begin{cases} 1, & \text{falls}\, m \,\text{teilt}\, n, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
4. $d : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $d(n, m) = \begin{cases} n//m, & \text{falls}\, m > 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
   ($n//m$ bezeichnet die ganzzahlige Division; $n//m := \lfloor n/m \rfloor$)
5. $r : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $r(n, m) = \begin{cases} n \bmod m, & \text{falls}\, m > 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
6. $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $p(n)$ ist n-te Primzahl ($p(0) := 2$, $p(1) = 3$ etc.).
7. $e : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $e(n, m) = \begin{cases} \max\{i \mid m^i \text{ teilt } n\}, & \text{falls}\, m > 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Aufgabe 6

Wir betrachten die Cantor-Nummerierung f von $\mathbb{N}^2$:

$$\begin{array}{c|cccccc} \vdots & \vdots & & & & & \\ 4 & 14 & \cdots & & & & \\ 3 & 9 & 13 & \cdots & & & \\ 2 & 5 & 8 & 12 & \cdots & & \\ 1 & 2 & 4 & 7 & 11 & \cdots & \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & \cdots \\ \hline f & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \end{array}$$

1. Zeigen Sie, dass f primitiv rekursiv ist.
   Hinweis: Nutzen Sie die Funktion $g(n) := 1 + 2 + \cdots + n$ und beachten Sie dass $f(n, 0) = g(n)$ ist.
2. Wir bezeichnem f als *(2-stellige) Paarungsfunktion* und notieren häufig $f(n, m)$ durch $\langle n, m \rangle$. Mit π_1 und π_2 bezeichnen wir die beiden "inversen" Funktionen, mit denen man aus $\langle n, m \rangle$ wieder n und m zurück bekommen kann, also $\pi_1(\langle n, m \rangle) = n$ und $\pi_2(\langle n, m \rangle) = m$. Zeigen Sie, dass auch π_1 und π_2 primitiv rekursiv sind sowie dass $\langle \pi_1(x), \pi_2(x) \rangle = x$ für alle x aus $\mathbb{N}$ gilt.
3. Konstruieren Sie mit Hilfe von f auch eine k-stellige Paarungsfunktion für $\mathbb{N}^k$.

Aufgabe 7 (Simultane Rekursion)

Die $(n + 1)$-stelligen Funktion f_1 und f_2 entstehen aus den n-stelligen Funktion g_1 und g_2 sowie den $(n + 3)$-stelligen Funktionen h_1 und h_2 durch simultane Rekursion wenn gilt

$$\begin{array}{lcl} f_1(x_1, \ldots, x_n, 0) & := & g_1(x_1, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, \ldots, x_n, 0) & := & g_2(x_1, \ldots, x_n) \\ f_1(x_1, \ldots, x_n, y + 1) & := & h_1(x_1, \ldots, x_n, y, f_1(x_1, \ldots, x_n, y), f_2(x_1, \ldots, x_n, y) \\ f_2(x_1, \ldots, x_n, y + 1) & := & h_2(x_1, \ldots, x_n, y, f_1(x_1, \ldots, x_n, y), f_2(x_1, \ldots, x_n, y) \end{array}$$

Zeigen Sie, dass mit $g_{1,}g_2$ und $h_{1,}h_2$ auch wiederum f primitiv rekursiv ist.
Hinweis: Denken Sie an die Paarungsfunktion aus der vorhergehenden Aufgabe.

Aufgabe 8
Welche Funktion f entsteht durch primitive Rekursion $\mathrm{PR}(g, h)$ aus folgenden Funktionen g und h?

$g : \mathbb{N}^1 \to \mathbb{N}$ mit $g(n) = \mathrm{zero}_1(n)$
$h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $h(n, m, l) = p_2^{(3)}(n, m, l) + s \circ p_2^{(3)}(n, m, l) + p_3^{(3)}(n, m, l)$

Aufgabe 9
Zeigen Sie dass die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = n^n$ primitiv rekursiv ist.

Aufgabe 10
Zeigen Sie, dass es eine bijektive, primitiv rekursive Funktion von $\mathbb{N}^2$ auf $\mathbb{N}$ gibt.

Notation:
- $\mathbb{N}$ bezeichnet die natürlichen Zahlen inklusive der 0.
- $n \dot{-} m := \begin{cases} n - m, & \text{falls}\, n \geq m, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
