**BTU Cottbus-Senftenberg**
Fakultät für Ingenieurwissenschaften und Informatik
Prof. Dr.-Ing. D. Döring

# Prüfung: Prozessoptimierung

Schriftliche Prüfung **am 01.02.2016 (14:00-16:00 Uhr)**,
Dauer: **120 Minuten**

| | |
|---|---|
| **Name:** | .............................................. |
| **Vorname:** | .............................................. |
| **Matrikelnummer** | .............................................. |

- Schalten Sie Ihre Mobilfunktelefone vs. Smartphone aus.
- Berechnungen werden nur gewertet, wenn der Rechenweg nachvollziehbar ist.
- Hilfsmittel: alle Unterlagen, programmierbarer Taschenrechner.

| **Aufgabe** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Z | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Punkte** | | | | | | | | |

*Gesamtpunktzahl*: 42

**Aufgabe 1** (Punkte: 4)
Gegeben sei eine lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{array}{rcl} -x_1 + 2x_2 & \rightarrow & max \\ -0.5x_1 + x_2 & \geq & -4 \\ 2x_1 - x_2 & \geq & -7 \\ x_1 + x_2 & \leq & 10 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 & \geq 0 & \end{array}$$

1.1 Ermitteln Sie die optimalen Werte $x_1^*$ und $x_2^*$ (Maximum) dieser linearen Optimierungsaufgabe grafisch! Hinweis: Berechnen Sie die Schnittpunkte der entsprechenden Geradengleichungen.

**Aufgabe 2** (Punkte: 9)
Gegeben sei eine lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 & \rightarrow & max \\ x_1 - 2x_2 & \leq & 3 \\ x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & \leq & 3.5 \\ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

2.1 Stellen Sie den Lösungsraum - d.h. den konvexen Raum - grafisch dar! (Punkte: 3.5)

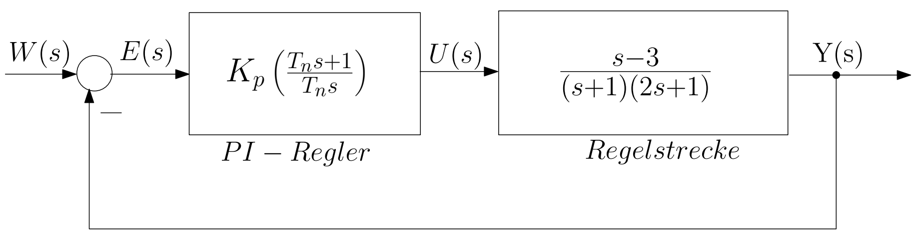
2.2 Lösen Sie nun das Optimierungsproblem unter Verwendung des *Simplexverfahrens* analytisch! (Punkte: 5.5)

**Aufgabe 3** (Punkte: 9)
Gegeben ist eine nichtlineare Zielfunktion mit Nebenbedingungen.

$$
\begin{aligned}
-4ln(x_1^2+2)-x_2^2 \quad &\rightarrow \quad max \\
x_1 \quad &\geq \quad 1 \\
x_2 \quad &\geq \quad 2-x_1^2
\end{aligned}
\tag{1}
$$

3.1 Ermitteln Sie mithilfe der *Kuhn-Tucker-Bedingungen* die Lösungen für $x_1^*$, $x_2^*$ und die Wichtungskoeffizienten $\mu_1$ und $\mu_2$! Untersuchen Sie alle 4 Fälle!
Hinweis: $\frac{dln(x)}{dx} = \frac{1}{x}$

**Aufgabe 4** (Punkte: 7)
Gegeben sei ein Regelkreis, bestehend aus einer nicht-minimalphasigen $PT_2$-Regelstrecke und einem $PI$-Regler.




4.1 Für einen Führungssprung $w(t) = 0.1\sigma(t)$ soll der Reglerparameter $K_p$ des $P$-Reglers so eingestellt werden, dass die verallgemeinerte quadratische Regelabweichung minimal wird ($\int_{t_0}^{\infty} e^2(t)dt \rightarrow min$).
Hinweis: Die Nachstellzeit $T_n$ erhalten Sie durch *Kompensation* mit der größten Zeitkonstante der Regelstrecke.
(Punkte: 5)

4.2 Prüfen Sie anhand der charakteristischen Gleichung $1+G_o(s)=0$ welche der beiden Lösungen von $K_p$ einen stabilen Regelkreis garantiert! (Punkte: 2)

**Aufgabe 5** (Punkte: 6)
Man bestimme den optimalen Punkt $(x_1^*, x_2^*)$ auf der Hyperbel $1-\frac{1}{x_1 x_2}=0$ der den geringsten Abstand zum Koordinatenursprung aufweist:

$$\begin{aligned} x_1^2+x_2^2 &\rightarrow min \\ \frac{1}{x_1 x_2} &= 1 \\ \underline{x} \in R^2 & \end{aligned}$$

5.1 Ermitteln Sie mithilfe der *Lagrange-Funktion* die Lösungen $x_1^*$, $x_2^*$ und das Empfindlichkeitsmaß $\lambda$! (Punkte: 4)

5.2 Prüfen Sie mithilfe der erweiterten Hessematrix $|p(\Lambda)|$ ob die positiven Lösungen von $x_1^*$ und $x_2^*$ tatsächlich ein Minimum ergeben! (Punkte: 2)

**Aufgabe 6** (Punkte: 7)
Gegeben sei ein vereinfachtes Fahrzeugmodell mit der Position $x_1$, der Geschwindigkeit $x_2$ und der Beschleunigungskraft $u$.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned}$$

Die Minimierung des Aufwandes führt auf

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T u^2 dt \rightarrow Min$$

Das Fahrzeug soll vom Anfangszustand $\underline{x}(0)=[1\ \ 0]^T$ in den Endzustand $\underline{x}_e(T)=[0\ \ 0]^T$ gefahren werden ($T=1sec$).

6.1 Ermitteln Sie analytisch - unter Nutzung der Hamilton-Funktion - die optimale Steuertrajektorie $u^*(t)$ und die zugehörigen Zustandstrajektorien $x_1^*(t), x_2^*(t)$ für $0 \leq t \leq T$! Bestimmen Sie auch die Integrationskonstanten!

**Zusatzaufgabe** (Punkte: 5)
Ein kleines Lausitzer Unternehmen hat ein Nettogewinn von $m = 4000$ Euro erwirtschaftet und will davon zwei Güter kaufen. Die Preise dieser Güter sind $p_1 = 20$ Euro und $p_2 = 400$ Euro. Es gilt somit

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \; = \; m$$

Hierbei sind $x_1$ und $x_2$ die Stückzahlen der Güter. Die Ausgaben sollen nach folgender Zielfunktion optimiert werden

$$\alpha ln(x_1) + (1 - \alpha) ln(x_2) \to Max$$

Z.1 Berechnen Sie die optimalen Werte der Stückzahlen $x_1^*$ und $x_2^*$ für $\alpha = 0.5$!