

Ein Beitrag zur strukturmechanischen Optimierung realer Bauteile in metallischer und Faserverbundbauweise unter Verwendung von wirkebenenbasierten Bruchkriterien

Von der Fakultät für Maschinenbau, Elektrotechnik und Wirtschaftsingenieurwesen der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Markus Kober

geboren am 13.07.1979 in Cottbus

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Bernd Viehweger*

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Arnold Kühhorn*

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Dieter Bestle*

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Klaus Rohwer**

Tag der mündlichen Prüfung: 13.07.2011

* Brandenburgische Technische Universität Cottbus

** Deutsches Zentrum für Luft und Raumfahrt, Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik

“Optimization has the potential to change the world.”

(George B. Dantzig)

Vorwort

Diese Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Strukturmechanik und Fahrzeugschwingungen der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus.

Für die Förderung und Unterstützung sowie der Schaffung der Möglichkeit zum Anfertigen dieser Arbeit möchte ich mich im ganz Besonderen beim Leiter des Lehrstuhls Prof. Dr.-Ing. Arnold Kühhorn bedanken.

Darüber hinaus gilt mein herzlicher Dank den Gutachtern Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Dieter Bestle und Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Klaus Rohwer für ihre wertvollen Anmerkungen und Hinweise.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Bernd Viehweger sei für die Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission ebenfalls herzlich gedankt.

Meinen gegenwärtigen sowie ehemaligen Kollegen am Lehrstuhl danke ich für die schöne Arbeitsatmosphäre und der daraus folgenden sehr angenehmen Zusammenarbeit, wodurch auch über das Arbeitsleben hinausreichende Freundschaften entstanden sind.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, die mir eine außerordentlich gute Schulausbildung und anschließend ein Hochschulstudium ermöglichten.

Cottbus, im Sommer/Herbst 2011

Markus Kober

Kurzfassung

Ein Beitrag zur strukturmechanischen Optimierung realer Bauteile in metallischer und Faserverbundbauweise unter Verwendung von wirkebenenbasierten Bruchkriterien

In dieser Arbeit wird zunächst ein mathematischer Einblick in die Theorie klassischer Optimierungsalgorithmen gegeben. Durch die Kombination von Optimierungsalgorithmen mit der Finite-Elemente-Methode gelangt man zu sogenannten Strukturoptimierungsverfahren, welche anschließend ausführlich erläutert werden, wobei auch auf Besonderheiten der verschiedenen Verfahren, von denen die optimalitätskriterienbasierten Methoden nicht auf klassische sensitivitätsbasierte Optimierungsalgorithmen angewiesen sind, eingegangen wird.

Die Anwendungsmöglichkeiten der Strukturoptimierungsverfahren werden anhand von akademischen und praktischen Beispielen aufgezeigt. Hierbei werden optimalitätskriterien- und sensitivitätsbasierte Algorithmen hinsichtlich ihrer Leistungsfähigkeit miteinander verglichen. Es zeigt sich, dass sensitivitätsbasierte Verfahren ein breiteres Anwendungsspektrum bieten und in der Regel zu besseren Ergebnissen führen, obwohl sie nach gegenwärtigem Entwicklungsstand auf lineare Problemstellungen beschränkt sind. Nichtsdestotrotz bieten optimalitätskriterienbasierte Verfahren den Vorteil der einfachen Integrierbarkeit in bestehende Finite-Elemente-Systeme und führen für bestimmte Spezialprobleme auf effiziente Weise zu sehr guten Lösungen. Dies wird mit Hilfe eines selbstentwickelten und implementierten optimalitätskriterienbasierten Topologieoptimierungsalgorithmus gezeigt, welcher für einige Testprobleme im Vergleich zu kommerzieller Software außerordentlich gute Ergebnisse erzielt.

Weiteres Optimierungspotential für mechanische Strukturen erschließt sich bei Nutzung von Materialien mit orthotropen Steifigkeitseigenschaften, wie sie beispielsweise Faser-Kunststoff-Verbunde aufweisen. Im zweiten Teil dieser Arbeit wird daher auf die Besonderheiten und mechanischen Eigenschaften dieser Werkstoffe detailliert eingegangen. Insbesondere der Versagensvorhersage wird große Aufmerksamkeit gewidmet, wobei hier der Fokus auf wirkebenenbasierten Bruchkriterien liegt, von denen das Bruchkriterium nach Puck und das LaRC04-Bruchkriterium intensiv behandelt und schließlich beide Kriterien zusammen mit dem Pauschalbruchkriterium nach Hill anhand ihrer Bruchkurven für ein ausgewähltes Material verglichen werden.

Im letzten Teil dieser Arbeit wird gezeigt, auf welche Weise durch eine Verwendung realistischer Bruchkriterien, wie sie die wirkebenenbasierten Kriterien darstellen, in Verbindung mit Optimierungsverfahren für Materialparameter von Faser-Kunststoff-Verbunden zusätzliches Leichtbaupotential in Strukturbereichen mit weitestgehend ebenen Spannungszuständen, aber auch bei Anwesenheit räumlicher Spannungszustände, erschlossen werden kann. Letztere treten z.B. in Lasteinleitungsbereichen auf. Hierfür wird anhand einer neu entwickelten, strukturoptimierten Unterlegscheibe aufgezeigt, welche große Leistungsfähigkeit die Strukturoptimierung in Verbindung mit wirkebenenbasierten Bruchkriterien bietet, um Schädigungen in solchen hochbelasteten Bereichen einer Faser-Kunststoff-Verbund-Struktur zu vermeiden.

Abstract

A Contribution to the Structural Optimization of Real Metallic and Fiber-Reinforced Plastic Components Using Fracture Plane-Based Failure Criteria

At the beginning of this thesis, a mathematical view of the theory of classical optimization algorithms is given. The connection of optimization algorithms with the finite element method leads to so-called structural optimization procedures, which are explained in detail afterwards. A closer look is taken at the particularities of different methods, of which, specifically, the optimality criteria-based methods do not depend on classical sensitivity-based optimization algorithms.

The applicability of the structural optimization procedures is demonstrated with the help of academic and practical examples. In the process, the optimality criteria- and sensitivity-based algorithms are compared in terms of their capabilities. It could be shown that sensitivity-based methods offer a wider scope of applications and typically lead to better results, although they are restricted to linear problems at their current state of development. Nevertheless, optimality criteria-based methods offer the advantage of easy integration into existing finite element systems and find very good solutions for specific problems in a very efficient way. This is shown with the help of a self-developed and -implemented optimality criteria-based topology optimization algorithm, which achieves, for some test problems, excellent results compared to commercial software.

Further optimization potential for mechanical structures becomes accessible through the use of materials with orthotropic stiffness properties, as exemplified by fiber-reinforced plastics. Hence, the second part of this thesis addresses in detail the particular features and mechanical properties of these materials. Special attention is devoted to failure prediction, with a specific focus on action plane-based fracture criteria, of which the fracture criterion proposed by Puck and the LaRC04 criterion are intensively studied and finally compared together with the Tsai-Hill criterion in terms of their fracture curves, based on data for a selected real material.

The last part of the thesis demonstrates in which way the application of realistic fracture criteria, as they are posed by action plane-based criteria, in combination with optimization algorithms for the material parameters of fiber-reinforced plastics, can offer access to additional lightweight construction potential in structural regions with approximate plane stress states, as well as in the presence of spatial stress states. The latter appear in load application regions, for example. On the basis of a newly developed, structurally optimized washer, the great capabilities of structural optimization in connection with action plane-based failure criteria, in terms of avoidance of damage in these highly stressed areas of fiber-reinforced plastic structures, are shown.

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis.....	XV
Abkürzungsverzeichnis.....	XXV
1 Einleitung.....	1
1.1 Historischer Überblick zur Optimierung in der Mathematik.....	2
1.2 Historischer Überblick zur Entwicklung der Strukturoptimierung.....	3
2 Theoretische Grundlagen zur Optimierung.....	7
2.1 Mathematische Grundlagen restringierter, kontinuierlicher Optimierungsprobleme... 7	
2.1.1 Beschreibung eines Optimierungsproblems	7
2.1.2 Konvexität.....	8
2.1.3 Klassifikation kontinuierlicher Optimierungsprobleme	9
2.1.4 Optimalitätskriterien	10
2.1.4.1 Tangentialkegel.....	10
2.1.4.2 Die Lagrange-Funktion und KKT-Punkte	11
2.1.4.3 Weitere Regularitätsbedingungen	12
2.1.4.4 Die Fritz John-Bedingungen	13
2.1.4.5 Bedingungen zweiter Ordnung	13
2.2 Lineare Programme/Optimierung.....	14
2.2.1 Das Simplex-Verfahren	15
2.2.2 Innere-Punkte-Methoden	17
2.2.2.1 Dualität bei linearen Programmen	17
2.2.2.2 Der zentrale Pfad und die Grundidee der Inneren-Punkte-Methoden.....	18
2.3 Nichtlineare Programme/Optimierung	19
2.3.1 Quadratische Programme.....	19
2.3.2 Strafverfahren (Äußere Strafverfahren).....	20
2.3.3 Barriere-Methoden (Innere Strafverfahren).....	22
2.3.4 SQP-Verfahren.....	23
2.3.4.1 Lagrange-Newton-Verfahren	23
2.3.4.2 Lokales SQP-Verfahren	24
2.3.5 Methoden der zulässigen Richtungen	26
2.4 Antwortflächenverfahren (Response Surface Methods).....	27
2.5 Diskrete Optimierung	28
2.5.1 Gomorys Schnittebenenverfahren.....	30
2.5.2 Branch-and-Bound-Methode	30

2.5.3	0-1-Optimierungsverfahren.....	31
2.5.4	Sequentielle lineare diskrete Programmierung	33
2.5.5	Diskrete Optimierung mit Hilfe von Antwortflächenverfahren.....	33
3	Verfahren der Strukturoptimierung.....	35
3.1	Parameteroptimierung.....	36
3.2	Gestaltoptimierung.....	36
3.2.1	Parameterbasierte Gestaltoptimierungsverfahren	37
3.2.2	Parameterfreie Gestaltoptimierungsverfahren	38
3.2.2.1	Parameterfreie Gestaltoptimierung mit Hilfe der Mathematischen Programmierung.....	38
3.2.2.2	Parameterfreie Gestaltoptimierung durch Optimalitätskriterienverfahren.....	39
3.2.2.3	Vergleich einer Gestaltoptimierung mit Hilfe von Optimalitätskriterien mit der analytischen Optimallösung anhand eines Kragbalkens.....	40
3.3	Topologieoptimierung	43
3.3.1	Sensitivitätsbasierte Topologieoptimierungsverfahren.....	44
3.3.1.1	Modellparametrisierung bei der Topologieoptimierung	45
3.3.1.1.1	SIMP-Methode	45
3.3.1.1.2	Homogenisierungsmethode.....	47
3.3.1.2	Spannungsnebenbedingungen	48
3.3.1.2.1	ϵ -Relaxations-Ansatz	51
3.3.1.2.2	qp-Ansatz	51
3.3.1.3	Optimierungsalgorithmen für Strukturoptimierungsprobleme	52
3.3.1.3.1	Der MMA-Algorithmus	52
3.3.1.3.2	Beispiel für die Arbeitsweise des MMA- bzw. CONLIN-Algorithmus .	54
3.3.2	Optimalitätskriterienverfahren.....	57
3.3.3	Das Checkerboard-Problem	58
3.4	Topographieoptimierung	60
3.5	Free-Size-Optimierung	62
4	Faser-Kunststoff-Verbunde als Werkstoff.....	63
4.1	Historisches zu Werkstoffverbunden.....	63
4.2	Die Fasern.....	64
4.2.1	Faserarten.....	65
4.2.2	Faserherstellung und -eigenschaften.....	65
4.2.2.1	Herstellung von Kohlenstofffasern	67
4.2.2.2	Herstellung von Glasfasern.....	67
4.2.2.3	Herstellung von Aramidfasern	67
4.3	Die Matrix.....	67

4.3.1	Duroplaste	68
4.3.2	Thermoplaste.....	68
4.3.3	Elastomere.....	68
4.3.4	Die Glasübergangstemperatur.....	68
4.4	Recycling-Möglichkeiten von Faser-Kunststoff-Verbunden.....	69
5	Beschreibung des mechanischen Verhaltens geschichteter Faser-Kunststoff- Verbunde	71
5.1	Die klassische Laminattheorie (CLT).....	75
5.1.1	Spannungs-Verzerrungsbeziehungen einer Einzelschicht	76
5.1.2	Bestimmung der Steifigkeitsparameter einer Einzelschicht	77
5.1.3	Transformation der Steifigkeiten der Einzelschichten in ein gemeinsames Koordinatensystem	79
5.1.4	Verschiebungs-Verzerrungsbeziehungen des Schichtverbundes.....	80
5.1.5	Scheiben- und Plattenschnittlasten als Spannungsergebnis.....	82
5.1.6	Schnittlasten-Verzerrungsbeziehungen des Gesamtverbundes.....	83
5.1.7	Zusammenfassung des Vorgehens bei der klassischen Laminattheorie	84
5.2	Die Schubdeformationstheorie 1. Ordnung (FSDT).....	85
5.3	Hygrothermale Einflüsse auf das Steifigkeitsverhalten von Faser-Kunststoff- Verbunden.....	88
6	Festigkeitsbeurteilung von Faser-Kunststoff-Verbunden.....	89
6.1	Bruchmodi von Faser-Kunststoff-Verbunden	89
6.2	Versagenskriterien für faserverstärkte Kunststoffe	91
6.2.1	Interaktionslose Bruchkriterien.....	93
6.2.1.1	Das Kriterium der maximalen Spannungen.....	93
6.2.1.2	Das Kriterium der maximalen Verzerrungen.....	93
6.2.2	Bruchkriterien mit teilweiser Interaktion.....	94
6.2.3	Bruchkriterien mit vollständiger Interaktion	95
6.2.4	Wirkebenenbasierte Bruchkriterien	98
6.2.4.1	Pucks wirkebenenbasiertes Bruchkriterium.....	98
6.2.4.1.1	Faserbruchbedingungen	98
6.2.4.1.2	Zwischenfaserbruchbedingungen.....	99
6.2.4.1.3	Vereinfachungen für den ebenen Spannungszustand.....	102
6.2.4.1.4	Erweiterungen zu den Puck'schen Zwischenfaserbruchbedingungen ..	104
6.2.4.2	Das LaRC04-Bruchkriterium.....	110
6.2.4.2.1	Faserbruchbedingung bei Zugbelastung.....	110
6.2.4.2.2	Bruchbedingung für Zugversagen quer zur Faserrichtung (Matrix- Zugversagen).....	110

6.2.4.2.3	Bruchbedingung für Druckversagen quer zur Faserrichtung (Matrix-Druckversagen)	116
6.2.4.2.4	Faserbruchbedingung bei Druckbelastung	117
6.2.5	Vergleich der Bruchkurven ausgewählter Bruchkriterien	122
6.3	Degradationsmodelle	127
7	Praktischer Vergleich von optimalitätskriterienbasierten und sensitivitätsbasierten Strukturoptimierungsverfahren	129
7.1	Praktischer Vergleich der Topologieoptimierungsverfahren	129
7.1.1	Vorstellung eines einfachen optimalitätskriterienbasierten Topologieoptimierungsalgorithmus	129
7.1.2	Anwendung der sensitivitäts- und optimalitätskriterienbasierten Topologieoptimierung auf ein einfaches Beispiel	132
7.1.3	Anwendung der sensitivitätsbasierten Topologieoptimierung auf ein reales Triebwerksbauteil	135
7.2	Praktischer Vergleich der Gestaltoptimierungsverfahren	141
7.2.1	Einfaches Beispiel für eine Gestaltoptimierung	141
7.2.1.1	Optimierung mit sensitivitätsbasierten Verfahren	142
7.2.1.1.1	Kerboptimierung mittels Basisformen	143
7.2.1.1.2	Kerboptimierung mittels Verschiebung der Oberflächenknotenkoordinaten	144
7.2.1.2	Kerboptimierung mit optimalitätskriterienbasiertem Verfahren	145
7.2.2	Gestaltoptimierung eines realen Triebwerksbauteils	146
7.2.2.1	Ergebnis der Gestaltoptimierung mit sensitivitätsbasiertem Algorithmus ..	148
7.2.2.2	Ergebnis der Gestaltoptimierung mit optimalitätskriterienbasiertem Algorithmus	148
7.3	Praktischer Vergleich der Topographieoptimierungsverfahren	150
7.3.1	Einfaches Beispiel für eine Topographieoptimierung	150
7.3.1.1	Topographieoptimierungsergebnis mit sensitivitätsbasiertem Verfahren....	151
7.3.1.2	Topographieoptimierungsergebnis mit optimalitätskriterienbasiertem Verfahren	151
7.3.2	Topographieoptimierung eines realen Triebwerksbauteils	151
7.3.2.1	Topographieoptimierungsergebnis mit sensitivitätsbasiertem Verfahren....	153
7.3.2.2	Topographieoptimierungsergebnis mit optimalitätskriterienbasiertem Verfahren	154
7.4	Zusammenfassender Vergleich der Strukturoptimierungsergebnisse	155
8	Strukturoptimierung faserverstärkter Kunststoffbauteile	157
8.1	Das Singularitätsproblem	157

8.2	Verfahren zur Optimierung faserverstärkter Kunststoffe	159
8.3	Verhalten verschiedener Optimierungsalgorithmen	161
8.4	Optimierung ungestörter Bereiche	163
8.4.1	Probabilistische Betrachtungen	168
8.5	Optimierung gestörter Bereiche	170
8.5.1	Überprüfung der Optimierungsergebnisse mit verfeinertem Modell	178
8.5.2	Detaillierte Betrachtung des „Unterlegscheiben-Problems“	182
9	Zusammenfassung/Ausblick	191
	Anhang	193
A	Beispiel für Ungültigkeit der Abadie-Regularitätsbedingung	193
B	Transformationsbeziehungen	194
B.1	Transformation der Schichtsteifigkeiten aus lokalem Schichtkoordinatensystem in globales Verbundkoordinatensystem	194
B.2	Transformation der globalen Einzelschichtverzerrungen in lokales Schichtkoordinatensystem	196
B.3	Transformation der Spannungskoordinaten in wirkebenenbasierte Spannungen	197
C	Herleitung der Beziehung zwischen Anisotropie-Parametern der Hill'schen Fließbedingung und Basisfestigkeiten	198
D	Ergänzungen zum Puck'schen Bruchkriterium	198
D.1	Herleitung der Zwischenfaserbruchbedingungen des Puck'schen Bruchkriteriums für den ebenen Spannungszustand	198
D.2	Zusammenstellung der Gleichungen für das Puck'sche Bruchkriterium	202
E	Ergänzungen zum LaRC04-Bruchkriterium	203
E.1	Bestimmung der In-situ-Festigkeiten für das LaRC04-Bruchkriterium	203
E.2	Bestimmung des Fehlstellungswinkels φ° für das Kinking-Modell des LaRC04- Kriteriums	205
E.3	Bestimmung der Kinking-Ebene	206
E.4	Zusammenstellung der Gleichungen für das LaRC04-Bruchkriterium	207
F	Auswahl eines geeigneten Elementtyps für Vergleich zwischen optimalitätskriterien- und sensitivitätsbasiertem Topologieoptimierungsalgorithmus	208
	Literaturverzeichnis	211

Symbolverzeichnis

Lateinische Symbole

A, A'	Hohlraumoberfläche
a_{i0}, a_{ij}, a_{ijk}	Regressionskoeffizienten
A_1, A_2	Stabquerschnittsflächen
a	Abmessung eines Hohlraumes
	Parameter bei der Berechnung von η_{w1}
	Innerer Kreisbogenradius
a_0	Rissausdehnung vor Wachstum
a_L	Rissausdehnung in longitudinaler Richtung
B_{log}, B_{rez}	Ersatzzielfunktionen für innere Strafverfahren
b	Abmessung eines Hohlraumes
	Breite
	Äußerer Kreisbogenradius
\mathbf{b}	Konstanter Vektor
C	Konstante
	Compliance
C_1, C_2, C_3	Konstanten
\mathbf{c}	Konstanter Vektor
c	Abmessung eines Hohlraumes
	Parameter bei der Berechnung von η_{w1}
\mathbf{d}	Tangentialer Vektor
	Konstanter Vektor
\mathbf{d}^k	Zulässige Richtung in der k -ten Iteration
da	Linielement in der Basiskonfiguration
$d\mathbf{x}$	Linielement in der Momentankonfiguration
E	Elastizitätsmodul
E_1, E_2, E_3	Elastizitätsmodul in 1-, 2- bzw. 3-Richtung
E_{int}	Freigesetzte Energie bei Hohlraumentstehung
\mathbf{e}_a	Einheitsvektor in a -Richtung
F	Kraft
	Bruchfunktionswert
	Anisotropie-Parameter
F_{12}^*	Festigkeitsparameter des Tsai-Wu-Bruchkriteriums
$f(\dots)$	Von den Variablen ... abhängige Funktion
$f(\mathbf{x}), f_0(\mathbf{x})$	Zielfunktion
f_E	Anstrengung
f_{E_0}	Zwischenfaserbruchanstrengung ohne Abschwächung

$f_{E_{m+p}}$	Zwischenfaserbruchanstrengung bei Berücksichtigung der $m+p$ -Effekte
$f_{E_{FB}}$	Faserbruchanstrengung
$f_{E_{max}}$	Maximale Anstrengung
f'_E	Normierte Anstrengung
$f'_{E_{thr}}$	Schwellwert der normierten Anstrengung
$f_i^k(\mathbf{x})$	Approximation einer Funktion in der k -ten Iteration
\mathbf{f}	Vektor der äußeren Lasten
\mathbf{f}'	Lastvektor in gedrehtem Koordinatensystem
f_{Res}	Reservefaktor
G	Schubmodul
	Anisotropie-Parameter
G_{21}, G_{31}, G_{32}	Schubmodul in der 2-Ebene bei Belastung in 1-Richtung, in der 3-Ebene bei Belastung in 1-Richtung bzw. in der 3-Ebene bei Belastung in 2-Richtung
G_{Ic}^L	Kritische Energiefreisetzungsrate für longitudinales Risswachstum bei Rissöffnungsart nach Modus I
G_{Ic}^T	Kritische Energiefreisetzungsrate für transversales Risswachstum bei Rissöffnungsart nach Modus I
G_{II}	Energiefreisetzungsrate bei Rissöffnungsart nach Modus II
G_{III}	Energiefreisetzungsrate bei Rissöffnungsart nach Modus III
G_c^L	Kritische Energiefreisetzungsrate bei Rissfortpflanzung in Längsrichtung
G_c^T	Kritische Energiefreisetzungsrate bei Rissfortpflanzung in Querrichtung
G_{SH}	Energiefreisetzungsrate für gemischten Schubmodus
G_{SH}^L	Energiefreisetzungsrate für gemischten Schubmodus bei Rissfortpflanzung in longitudinaler Richtung
G_{SH}^T	Energiefreisetzungsrate für gemischten Schubmodus bei Rissfortpflanzung in transversaler Richtung
G_{SHc}	Kritische Energiefreisetzungsrate für gemischten Schubmodus
G_{SHc}^L	Kritische Energiefreisetzungsrate für gemischten Schubmodus bei Rissfortpflanzung in longitudinaler Richtung
G_{SHc}^T	Kritische Energiefreisetzungsrate für gemischten Schubmodus bei Rissfortpflanzung in transversaler Richtung
G_V	Versickungsgrad
g	Materialkonstante
g_i, \mathbf{g}	Ungleichheitsnebenbedingungen
H	Anisotropie-Parameter
h	Höhe
h_j, \mathbf{h}	Gleichheitsnebenbedingungen
I_{yy}	Flächenträgheitsmoment
i	Laufvariable

j	Laufvariable
k	Federsteifigkeit Anzahl der möglichen Werte einer diskreten Designvariablen
L	Linearisierung Lagrange-Funktion Anisotropie-Parameter
L_j	„Moving Asymptote“ (Parameter des MMA-Algorithmus)
l	Länge
l_{ref}	Referenzlänge
l	Untere Schranke für Werte einer Optimierungsvariablen
M	Anisotropie-Parameter Modul
M_0	Konstantes Biegemoment
M_1, M_2	Konstante Einzelmomente
M_y	Biegemoment bei Biegung um die y -Achse
M_x, M_y, M_{xy}	Plattenschnittlasten
m	Anzahl der Ungleichheitsnebenbedingungen Parameter bei der Berechnung von η_{wl} Anzahl der maximalen Iterationen
N	Anisotropie-Parameter
N_x, N_y, N_{xy}	Scheibenschnittlasten
n	Anzahl der Optimierungsvariablen Anzahl der Schichten eines Laminats
n_j	Einheitsnormalenvektor
P	Ersatzzielfunktion der äußeren Strafverfahren Kraft je Längeneinheit
P_1	ℓ_1 -Penalty-Funktion
p	Anzahl der Gleichheitsnebenbedingungen Bestrafungsexponent
p_i	Wichtungsfaktor für Basisformen
$p_{\perp\perp}^c, p_{\perp\perp}^t,$ $p_{\perp\parallel}^c, p_{\perp\parallel}^t,$ $p_{\perp\psi}^c, p_{\perp\psi}^t$	Anstiegsparameter der Bruchkurve
$p_{\perp\parallel cor}^c$	Korrigierter Anstiegsparameter
Q_1, Q_2	Querkräfte
q	Bestrafungsexponent
q_0	Konstante Flächenlast
R	Mittlerer Radius
$R_{\parallel}^-, R_{\parallel}^c, R_{\parallel}^d$	Druckfestigkeit eines unidirektionalen FKV's in Faserrichtung
$R_{\perp}^-, R_{\perp}^c, R_{\perp}^d$	Druckfestigkeit eines unidirektionalen FKV's quer zur Faserrichtung
$R_{\parallel}^+, R_{\parallel}^t, R_{\parallel}^z$	Zugfestigkeit eines unidirektionalen FKV's in Faserrichtung
$R_{\perp}^+, R_{\perp}^t, R_{\perp}^z$	Zugfestigkeit eines unidirektionalen FKV's quer zur Faserrichtung

$R_{\perp is}^t$	In-situ-Querzugfestigkeit
$R_{\perp }$	Longitudinale Schubfestigkeit eines unidirektionalen FKV's
$R_{\perp is}$	In-situ-Schubfestigkeit
$R_{\perp\perp}$	Transversale Schubfestigkeit eines unidirektionalen FKV's
$R_{\perp\perp}^A$	Quer-Schubfestigkeit der Wirkebene
$R_{\perp\perp}^A$	Longitudinal/Transversale Misch-Schubfestigkeit der Wirkebene
$R_{\perp\perp}^c, R_{\perp\perp}^t$	Korrigierte Basisfestigkeiten
$R_{\perp\perp}^c, R_{\perp\perp}^A$	
$\varepsilon R_{\perp\perp}^{t,c}$	Druck- bzw. Zugbruchverzerrung in Faserrichtung
$\varepsilon R_{\perp\perp}^{t,c}$	Druck- bzw. Zugbruchverzerrung quer zur Faserrichtung
$\varepsilon R_{\perp\perp}, \varepsilon R_{\perp\perp is}$	Bruchschubverzerrung und In-situ-Bruchschubverzerrung
r	Skalar in den Fritz John-Bedingungen
	Parameter der Distanzmethode
	Radius
r^*	Skalar, der den Fritz John-Bedingungen genügt
r_1, r_2	Stabradien
S	Aufsummierte Mikroschädigungen
S_{21}, S^L	Longitudinale Schubfestigkeit eines unidirektionalen FKV's
S_{23}, S^T	Transversale Schubfestigkeit eines unidirektionalen FKV's
S_{max}	Konstante
S_{ref}	Konstante
s	Schlupfvariable
s^k	k -tes Element einer Folge
s_τ	Teil der Lösung der zentralen Pfad-Bedingungen
s	Parameter bei der Berechnung von η_{wl}
T_g	Glasübergangstemperatur
t	Dicke
t_k	k -tes Element einer Folge
	Schrittweite
	Schrittweite bestimmender Vorfaktor
U_j	„Moving Asymptote“ (Parameter des MMA-Algorithmus)
u	Verschiebung in 1- bzw. x-Richtung
u_i	Verschiebungsvektor
u_i^w	Verschiebung der Hohlraumwand
u_0	Scheibenanteil der Verschiebung in 1- bzw. x-Richtung
u_2	Verschiebung in 1-Richtung am Knoten 2
\mathbf{u}	Obere Schranke für Werte einer Optimierungsvariablen
	Verschiebungsvektor
V	Volumen
V_0	Ausgangsvolumen
v	Verschiebung in 2- bzw. y-Richtung
v_0	Scheibenanteil der Verschiebung in 2- bzw. y-Richtung

v_2	Verschiebung in 2-Richtung am Knoten 2
$volfrac$	Verhältnis von Ziel- zu Designraumvolumen
w	Verschiebung in 3- bzw. z-Richtung
w_0	Plattenanteil der Verschiebung in 3- bzw. z-Richtung
X^c	Druckfestigkeit eines unidirektionalen FKV's in Faserrichtung
X^t	Zugfestigkeit eines unidirektionalen FKV's in Faserrichtung
x, \mathbf{x}	Variable
	Optimierte Knotenkoordinaten eines FE-Netzes
\mathbf{x}^*	Lokales Minimum bzw. KKT-Punkt oder FJ-Punkt
	Optimallösung für Start des Simplex-Algorithmus
\mathbf{x}^0	Startpunkt der Optimierung
	Knotenkoordinaten des unverformten Ausgangsnetzes
\mathbf{x}_i	Knotenkoordinaten der i -ten Basisformen
x_j	Designvariable
x_j^k	Designvariable in der k -ten Iteration
x_{max}	Maximale Sickenhöhe
$\mathbf{x}^u, \mathbf{x}^o$	Untere bzw. obere Grenzen für Designvariablen
\mathbf{x}^k	k -tes Element einer Folge
	Design- bzw. Optimierungsvariablen in der k -ten Iteration
\mathbf{x}_τ	Teil der Lösung der zentralen Pfad-Bedingungen
$\langle x_i^- \rangle, \langle x_i^+ \rangle$	Nächstgelegene diskrete Werte zu einer Optimierungsvariablen x_i
Y^c	Druckfestigkeit eines unidirektionalen FKV's quer zur Faserrichtung
Y^t	Zugfestigkeit eines unidirektionalen FKV's quer zur Faserrichtung
y, \mathbf{y}	Variable
z	Variable
z	Dickenkoordinate eines Laminates
z_k	Abstand der k -ten Einzelschicht zur Laminatmittelfläche
\mathbf{z}^*	Optimallösung für Start des Simplex-Algorithmus

Griechische Symbole

α	Strafparameter für Ersatzzielfunktion
	Rotationswinkel eines lokalen Koordinatensystems
	Konstante der ℓ_1 -Penalty-Funktion
β	Winkel des Versagensbandes
	Materialparameter
γ	Konstante
γ_{1m2m}	Schubverzerrung im fehlgerichteten Koordinatensystem
γ_{1m2m}^c	Schubverzerrung beim Versagen im fehlgerichteten Koordinatensystem

$\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{13},$ $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	Technische Schubverzerrungskordinaten
Δ	Endliche Differenz
Δ_{max}	Kalibrierungsfaktor
δ	Variable
δ_{ij}	Kronecker-Delta
$\delta \mathbf{x}$	Kleine Veränderung des Vektors \mathbf{x}
ε	Freier (sehr kleiner) Parameter
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Normalverzerrungen
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$	Hauptverzerrungen oder Verzerrungen in Faserrichtung bzw. quer dazu
η	Parameter bei der Bestimmung von Schichtmoduln nach Halpin-Tsai
η_{m+p}	Faktor zur Korrektur der m+p-Effekte
η_{nt}, η_{n1}	Reibungskoeffizienten auf der Bruchebene
η_{w1}	Abschwächungsfaktor aufgrund faserparalleler Spannungen
θ	Orientierungswinkel Neigungswinkel der Wirkebene
θ_{fp}	Bruchwinkel
κ	Krümmung
$\Lambda_{22}^o, \Lambda_{23}^o$	Parameter zur Bestimmung der Energiefreisetzung bei Hohlraumentstehung
λ	Freier Parameter Verhältnis von Ellipsenachsen
λ	Lagrange-Multiplikatoren des primalen Optimierungsproblems bzw. Optimierungsvariablen des dualen Problems
λ^0	Lagrange-Multiplikatoren zum Optimierungsstartwert \mathbf{x}^0
λ_{B_k}	Lagrange-Multiplikatoren der aktiven Ungleichheitsnebenbedingungen im k-ten Iterationsschritt
λ_k	Lagrange-Multiplikatoren der inaktiven Ungleichheitsnebenbedingungen im k-ten Iterationsschritt
λ^k	Lagrange-Multiplikatoren der Ungleichheitsnebenbedingungen im k-ten Iterationsschritt
λ_i	Lagrange-Multiplikator
λ_i^*, λ^*	Lagrange-Multiplikator an einem KKT- oder FJ-Punkt
λ_τ	Teil der Lösung der zentralen Pfad-Bedingungen
μ	Konstante Reibungsbeiwert
μ^0	Lagrange-Multiplikatoren zum Optimierungsstartwert \mathbf{x}^0
μ_j	Lagrange-Multiplikator
μ_j^*, μ^*	Lagrange-Multiplikator an einem KKT- oder FJ-Punkt
μ_j^+, μ_j^-	Lagrange Multiplikator für $\nabla h_j(\mathbf{x}^*)$ bzw. $-\nabla h_j(\mathbf{x}^*)$
μ^k	Lagrange-Multiplikatoren der Gleichheitsnebenbedingungen im k-ten Iterationsschritt

v	Querkontraktionszahl
ξ	Parameter bei der Bestimmung von Schichtmoduln nach Halpin-Tsai
π	Ludolf'sche Zahl
ρ	Dichtefaktor
$\sigma_{biaxial}$	Biaxiale Bruchspannung
$\sigma_L, \sigma_{\parallel}^+, \sigma_{\parallel}^-$	Spannung in Faserrichtung (Zug bzw. Druck)
$\sigma_T, \sigma_{\perp}^+, \sigma_{\perp}^-$	Spannung quer zur Faserrichtung (Zug bzw. Druck)
σ_{Lc}	Druckfestigkeit eines unidirektionalen FKV's in Faserrichtung
σ_{Lt}	Zugfestigkeit eines unidirektionalen FKV's in Faserrichtung
σ_{Tc}	Druckfestigkeit eines unidirektionalen FKV's quer zur Faserrichtung
σ_{Tt}	Zugfestigkeit eines unidirektionalen FKV's quer zur Faserrichtung
σ_n	Wirkebenenbasierte Spannung
σ_n^m	Wirkebenenbasierte Spannung im fehlausgerichteten Koordinatensystem
σ_r	Spannung in radialer Richtung
σ_{xx}	Biegenormalspannung
σ_1	Maximal zulässige Spannung
σ_{2fr}	Bruchspannung
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Normalspannungskordinaten
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Normalspannungen im fehlgerichteten Koordinatensystem
σ_{1m}, σ_{2m}	Bruchnormalspannungen im fehlgerichteten Koordinatensystem
$\sigma_{1m}^c, \sigma_{2m}^c$	Normalspannungen in der Kinking-Ebene
$\sigma_{2\psi}, \sigma_{3\psi}$	Störungsparameter
τ	
$\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13},$ $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	Schubspannungskordinaten
τ_{1m2m}	Schubspannung im fehlgerichteten Koordinatensystem
τ_{1m2m}^c	Bruchschubspannung im fehlgerichteten Koordinatensystem
$\tau_{2m3\psi}, \tau_{2\psi3\psi},$ $\tau_{3\psi1}, \tau_{3\psi1m}, \tau_{12\psi}$	Schubspannungen in der Kinking-Ebene
$\tau_{21,c}$	Schubspannung am Umschlagspunkt von $\theta_{fp} = 0^\circ$ zu $\theta_{fp} \neq 0^\circ$
$\tau_{21,fr}$	Bruchschubspannung
$\tau_{LT}, \tau_{\perp\parallel}$	Longitudinale Schubspannung
$\tau_{TZ}, \tau_{\perp\perp}$	Transversale Schubspannung
τ_S	Longitudinale Schubfestigkeit eines unidirektionalen FKV's
$\tau_{n1}, \tau_{nt}, \tau_{n\psi}$	Wirkebenenbasierte Spannungen
τ_{n1}^m, τ_{nt}^m	Wirkebenenbasierte Spannungen im fehlausgerichteten Koordinatensystem
Φ	Linke Seite des nichtlinearen Gleichungssystems der KKT-Bedingungen
$\varphi(a, b)$	NCP-Funktion
φ	Fehlstellungswinkel der Fasern

φ^0	Ursprünglicher Fehlstellungswinkel
φ^c	Fehlstellungswinkel der Fasern bei Druckversagen
φ_F	Faservolumenanteil
χ	Parameter zur Bestimmung der Energiefreisetzung bei Hohlraum- entstehung
Ψ	Zielfunktion
$\tilde{\Psi}$	Antwortfläche
ψ	Schnitt durch den Bruchkörper definierender Winkel Winkel der Kinking-Ebene
Ψ_x, Ψ_y	Verdrehwinkel der Plattennormalen unter Belastung

Tensoren und Matrizen

A	Konstante Matrix Zeilenweise aufgebaute Matrix der Gradienten der aktiven Neben- bedingungen
A, A_{ij}	Scheibensteifigkeitsmatrix
A^s, A_{ij}^s	Schubsteifigkeitsmatrix
B	Konstante Matrix
B, B_{ij}	Koppelsteifigkeitsmatrix
B_k	Matrix der im k -ten Iterationsschritt aktiven Ungleichheitsnebenbedin- gungen
D, D_{ij}	Plattensteifigkeitsmatrix
H_0	Approximation der Hesse-Matrix in der 0-ten Iteration
H_k	Approximation der Hesse-Matrix in der k -ten Iteration
E, E^0, E_{ijkl}	Elastizitätstensor
E^*	Elastizitätstensor einer Inhomogenität
$F_i, F_{ij}, F_{ijkl},$ F_{ijklmn}	Festigkeitstensoren Deformationsgradient
F	Deformationsgradient
G, G_{ij}	Green-Lagrange'scher Verzerrungstensor
I	Einheitstensor
Q	Konstante Matrix Steifigkeitsmatrix Tensor zur Bestimmung der Energiefreisetzung bei Hohlraum- entstehung
${}^k Q$	Steifigkeitsmatrix der k -ten unidirektionalen Einzelschicht
\bar{Q}	Gesamtlaminatsteifigkeitsmatrix
Q_{ijkl}	Tensor 4. Stufe
S, S_{ij}	Drehmatrix

\mathbf{S}	Vierstufiger Eshelby-Tensor
\mathbf{T}, T_{ij}	Tensor 2. Stufe
$\boldsymbol{\varepsilon}, \varepsilon_{ij}$	Verzerrungstensor
$\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$	Elastischer Verzerrungsanteil
$\boldsymbol{\varepsilon}^t$	Transformationsanteil der Verzerrungen
$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^o \rangle$	Makroskopischer Verzerrungstensor
$\boldsymbol{\varepsilon}^\infty$	Verzerrungen bei Abwesenheit einer Inhomogenität
$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$	Verzerrungen aufgrund einer Inhomogenität
$\boldsymbol{\varepsilon}^*, \varepsilon_{ij}^*$	Äquivalente Eigendehnungen
$\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{ij}$	Spannungstensor
$\boldsymbol{\sigma}^\infty, \sigma_{ij}^\infty$	Spannungen bei Abwesenheit einer Inhomogenität
$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$	Spannungen aufgrund einer Inhomogenität
$\boldsymbol{\Phi}'$	Jacobi-Matrix der KKT-Bedingungen eines gleichheitsrestringierten Optimierungsproblems

Sonstige

da	Totales Differential von a
∂a	Partielles Differential von a
I	Menge der aktiven Ungleichheitsnebenbedingungen
P	Polyeder
	Punkt
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
T_x	Tangentialkegel
T_{lin}	Linearisierter Tangentialkegel
X	Nichtleere Menge
∞	Unendlich
\perp	Quer zur Faserrichtung
\parallel	In Faserrichtung
\forall	Für alle
\exists	Existiert
\in	Element von
\subseteq	Teilmenge von
∇	Nabla-Operator (z.B. $\nabla f(a, b) = (\partial f / \partial a) \mathbf{e}_a + (\partial f / \partial b) \mathbf{e}_b$, $\nabla_a f(a, b) = (\partial f / \partial a)$)
$\nabla \cdot \mathbf{a}, \operatorname{div} \mathbf{a}, a_{i,i}$	Divergenz des Vektorfeldes \mathbf{a}
$\nabla \mathbf{a}, a_{i,j}$	Gradient des Vektorfeldes \mathbf{a}
$\ \dots\ $	Norm von ...
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	Skalarprodukt
$\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{S}$	Doppeltes Skalarprodukt ($\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{S} = T_{ij} S_{ij}$)

\wedge	Logisches „UND“
\vee	Logisches „ODER“

Hochgestellte Indizes

-1	Inverse
T	Transponiert
$'$	Ableitung

Abkürzungsverzeichnis

ARSM	Adaptive Response-Surface-Methode
BFGS	Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno
BKFG	Basiskonfiguration
Blisk	Blade Integrated Disk
BPD	Bypass Duct
CAD	Computer-Aided Design
CLT	Classical Laminate Theory
CONLIN	Convex Linearization
DFP	Davidon-Fletcher-Powell
div	Divergenz
DoE	Design of Experiments
E-Modul	Elastizitätsmodul
ESO	Evolutionary Structural Optimization
FEM	Finite-Elemente-Methode
FJ	Fritz John
FKV	Faser-Kunststoff-Verbund
FSDT	First-Order Shear Deformation Theory
GA	Genetischer Algorithmus
GGW	Gleichgewicht
HAT	Hauptachsentransformation
IMC	Intermediate Casing
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
MFD	Method of Feasible Directions
MKFG	Momentankonfiguration
MMA	Method of Moving Asymptotes
NCP	Nonlinear Complementary Problem
OC	Optimality Criteria
PAN	Polyacrylnitril
PET	Polyethylenterephthalat
PP	Polypropylen
PPS	Polyphenylensulfid
RSM	Response-Surface-Methode
SIMP	Solid Isotropic Material with Penalization
SORA	Sequential Optimization and Reliability Assessment
SQP	Sequential Quadratic Programming
sym.	Symmetrisch
u.d.N.	Unter der Nebenbedingung
WEM	Whole Engine Model
ZTL	Zukunft Technik Luft

1 Einleitung

Bei technischen Optimierungsaufgaben geht es in fast allen Fällen um eine Effizienzsteigerung einer bestehenden technischen Lösung bzw. um eine „optimale“ Auslegung eines sich noch in der Entwicklung befindlichen Systems. Dabei ist im Prinzip kein technischer Bereich von Optimierungsaufgaben ausgeschlossen. Typische Anwendungsbereiche finden sich z.B. in der Luftfahrt. Eine möglichst optimale Ausnutzung von mechanischen Strukturen verspricht eine hohe Gewichtsersparnis und somit eine Reduktion der Kosten im Betrieb. Aber auch im Bauwesen, wo es in den meisten Fällen nicht vordergründig um eine Gewichtsreduktion geht, lassen sich durch die Anwendung der Optimierung bei der Auslegung von Fundamenten, Fachwerken oder anderer Strukturen erhebliche Kosten einsparen. Oftmals ist eine gleichzeitige Verbesserung des Bauwerks hinsichtlich Stabilität, Eigenschwingverhalten oder Erdbebensicherheit möglich.

Als weitere technische Anwendungsmöglichkeiten der Optimierung seien exemplarisch die folgenden erwähnt:

- Fahrzeugtechnik: - Auslegung des Feder-Dämpfer-Verhaltens der Rad-aufhängung hinsichtlich Komfort und Straßenlage
- Fertigungstechnik: - Minimierung der Produktionskosten und Maximierung der Qualität durch Optimierung der Werkzeugeigenschaften und Fertigungszeiten
- Thermodynamik/
Strömungsmechanik: - Verbesserung der Effizienz in Turbomaschinen durch optimierte Schaufelgeometrien [94]
- Verringerung von Strömungsverlusten oder Luftwiderstandsbeiwerten durch strömungsgünstige Geometrien ([154], [133])
- Produktionsplanung: - Maximierung der Maschinenauslastung bzw. Minimierung von Stillstandszeiten
- Training von neuronalen Netzen - Optimierung der Gewichte der Kanten zwischen den Neuronen
- Regelungstechnik: - Optimale Einstellung von Reglerparametern, Optimierung dynamischer Systeme [55]

In der vorliegenden Arbeit geht es jedoch vorwiegend um die Optimierung mechanischer Strukturen mit den Teilgebieten Topologie-, Gestalt-, Parameter- und Sickenoptimierung, welche unter dem Begriff der Strukturoptimierung zusammengefasst sind. Dabei werden auch Faser-Kunststoff-Verbunde als Material genutzt. Um für diese Werkstoffe geeignete Festigkeitsnebenbedingungen definieren zu können, sind besondere Bruchkriterien notwendig, wobei hier besonderes Augenmerk auf sogenannte wirkebenenbasierte Kriterien gelegt wird.

Aus historischer Sicht kann man sagen, dass es schon immer Bestrebungen gab, bestehende Lösungen zu verbessern bzw. zu optimieren. Dabei wurde in früheren Zeiten meist so vorge-

gangen, dass lediglich kleine Änderungen an einem bestehendem Produkt vorgenommen wurden, was dann über einen längeren Zeitraum oder gar mehrere Produktgenerationen zu einer iterativen Verbesserung führte. In jüngster Zeit werden in der Technik mehr und mehr numerische Optimierungsverfahren eingesetzt, welche die früher über einen langen Zeitraum durchgeführten Verbesserungen quasi im Zeitraffer ablaufen lassen und oft in wesentlich kürzerer Zeit zumindest zu einem besseren Entwurf als dem Ausgangsentwurf führen.

1.1 Historischer Überblick zur Optimierung in der Mathematik

Die Optimierung ist eine noch relativ junge Disziplin innerhalb der Mathematik, deren Bedeutung erst im letzten Jahrhundert stark zugenommen hat. Zwar beschäftigten sich Menschen schon seit jeher mit Optimierungsproblemen, jedoch schlug erst im Jahre 1629 P. de Fermat (1601-1665) in seiner Veröffentlichung zu „Abhandlungen über Maxima und Minima“ [48], als einer der Ersten, allgemeine Methoden zur Bestimmung von Minima und Maxima vor, die bereits im Zusammenhang mit der später von Leibniz und Newton geschaffenen Differentialrechnung standen.

Im Jahre 1696 veröffentlichte Johann Bernoulli (1667-1748) sein berühmtes „Brachistochronenproblem“ ([20], von griechisch brachistos=kürzeste, chronos=Zeit). Hierbei sucht Bernoulli nach derjenigen Bahn, der ein beweglicher Massenpunkt zu folgen hätte, um in kürzest möglicher Zeit von einem Punkt zu einem anderen zu gelangen. Auf den Massenpunkt wirkt dabei nur die Gravitationskraft und Start- und Endpunkt der beschleunigten Bewegung sollen in vertikaler Richtung nicht übereinander liegen (Abb. 1.1).

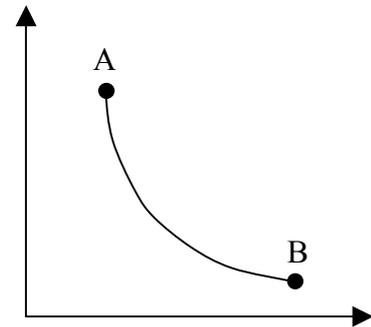


Abb. 1.1 Brachistochronenproblem

Lösungen hierzu wurden von Bernoulli selbst [21], seinem älteren Bruder Jakob (1654 – 1705) [19], Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), Issac Newton (1643-1727), dem Marquis de l’Hospital (1661 – 1704), und Ehrenfried Walther von Tschirnhaus (1651-1708) veröffentlicht. Einen großen Beitrag zur Optimierung lieferte einmal mehr Leonhard Euler (1707-1783), einer der „produktivsten“ Mathematiker überhaupt. Er erkannte bereits, dass viele natürliche Phänomene und Strukturen Optimalitätskriterien unterliegen. Seine verschiedenen Arbeiten zur Optimierung umfassen u.a. Abhandlungen über notwendige und hinreichende Bedingungen höherer Ordnung für unrestringierte Optimierungen. Als Mitbegründer der Variationsrechnung [47] konnte Euler notwendige Bedingungen für ein Extremum sowie erste numerische Lösungsmethoden für Optimierungsprobleme ableiten. Weitere wichtige Beiträge lieferten auch Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) mit seiner Arbeit zur Variationsrechnung und der Einführung der nach ihm benannten Multiplikatoren sowie Jean B. J. Fourier (1768-1830).

Gegen Ende des 19. und zu Beginn des 20. Jahrhunderts sind wichtige Grundlagen in der Optimierung u.a. von Hermann Minkowski (1864-1909, u.a. „Minkowski-Summe“, Begriff der „Konvexität“), Gyula Farkas (1847-1930, u.a. „Farkas-Lemma“), Constantin Carathéodory

(1873-1950, u.a. Arbeiten zur Variationsrechnung) sowie John von Neumann (1903-1957, u.a. „Spieltheorie“, siehe [129]) geschaffen worden. Als Meilenstein in der modernen Optimierung werden im Allgemeinen die 1947 veröffentlichten Arbeiten von George B. Dantzig (1914-2005) zur linearen Optimierung/Programmierung und der Entwicklung des Simplex-Algorithmus angesehen [36]. Ebenfalls in [36] findet sich eine äußerst interessante und ausführliche Betrachtung zur Entwicklung der linearen Programmierung mit zahlreichen Beispielen und Literaturstellen. Allerdings gab es schon 1911 eine Arbeit des belgischen Mathematikers Charles-Jean de la Vallée Poussin (1866-1962), in der er sich mit der linearen Optimierung beschäftigte [171]. Zum selben Thema gab es Veröffentlichungen in den 1930er Jahren vom späteren Nobelpreisträger Leonid W. Kantorowitsch (1912-1986) sowie 1941 von Frank L. Hitchcock (1875-1975, „Transportproblem“, siehe [86]).

Eine bedeutende und vielbeachtete Veröffentlichung bezüglich der nichtlinearen Optimierung gab es im Jahre 1951 durch Albert W. Tucker (1905-1995) und Harold W. Kuhn (1925- , [104]). Sie erweiterten u.a. die Lagrange-Multiplikator-Methode auf Ungleichheitsnebenbedingungen und schufen mit den nach ihnen benannten Kuhn-Tucker-Bedingungen notwendige und für den konvexen Fall auch hinreichende Optimalitätskriterien. Jedoch gab es auch hier schon eine frühere Arbeit von William Karush (1917-1997), der 1939 in seiner, zunächst nicht beachteten, Masterarbeit dieselben Bedingungen herleitete [93]. Um auch Karush's Verdienste zu würdigen, werden zuvor genannte Bedingungen heute als Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen (KKT-Bedingungen) bezeichnet. Zu ähnlichen Ergebnissen wie Karush, Kuhn und Tucker kam im Jahre 1948 Fritz John (1910-1994) mit den nach ihm benannten Fritz John-Bedingungen, welche eine etwas schwächere Formulierung der KKT-Bedingungen darstellen, jedoch nicht die Regularitätsannahmen der KKT-Bedingungen benötigen. Zudem lassen sich die KKT-Bedingungen als Spezialfall der Fritz John-Bedingungen herleiten.

Mit der zunehmenden Bedeutung von Computern gab es vor allem in den 1960er und 1970er Jahren eine Reihe von Arbeiten zur numerischen Lösung von nichtlinearen Optimierungsproblemen. Stellvertretend seien hier nur William C. Davidon (1927- , siehe z.B. [38], [39]), Michael J. D. Powell (1936- , [51]), Roger Fletcher (1939- , u.a. [51], [52]) und Charles G. Broyden (1933-, u.a. [25]) erwähnt.

In jüngster Zeit gewinnen Innere-Punkte-Methoden immer stärker an Bedeutung. Als Geburtsstunde dieser Verfahren gilt gemeinhin eine Arbeit von Narendra Karmarkar (1957-) aus dem Jahre 1984 [92]. Grundlagen hierzu wurden aber auch schon Ende der 1960er Jahre z.B. von Anthony V. Fiacco (1928-) und Garth P. McCormick (1936-) mit der Entwicklung von Barriere-Methoden geschaffen [49].

1.2 Historischer Überblick zur Entwicklung der Strukturoptimierung

Auch die Strukturoptimierung ist eine relativ junge Disziplin an der Schnittstelle zwischen Mechanik und Mathematik. Als erste Arbeit zur Topologieoptimierung gilt eine Veröffentlichung des australischen Erfinders, Ingenieurs und Mathematikers Anthony G. M. Michell (1870-1959), in der er wichtige Prinzipien zur Herleitung optimaler Stabtragwerke entwickel-

te [124]. Die dabei entstehenden Strukturen orientieren sich an Hauptverzerrungsverläufen in Modellen mit kontinuierlicher Materialverteilung und dienen noch heute als Referenzlösungen für moderne Topologieoptimierungsprogramme (Abb. 1.2). Michell stützt sich dabei auf Sätze des berühmten Physikers James C. Maxwell (1831-1879) über die Auslastung von Stabtragwerken.

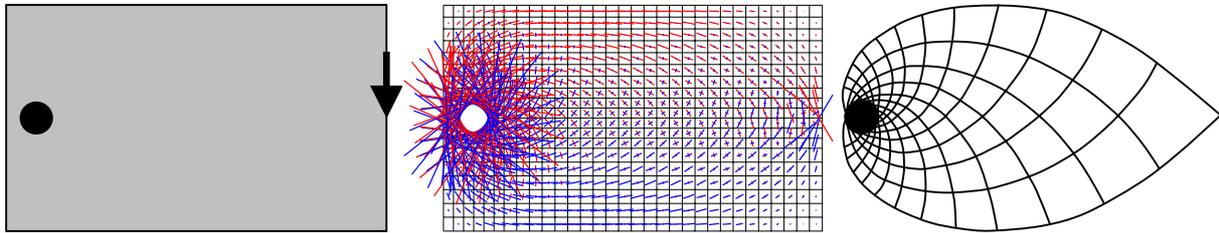


Abb. 1.2 Bauraum für Optimierungsproblem (grau) mit kreisförmiger fester Einspannung unter Einzellast (links), Richtungen der Hauptverzerrungen (rot = ε_1 , blau = ε_2 , mittig), Michell-Stabstruktur (nach [124] bzw. [82], rechts)

Ausführliche Betrachtungen und Erklärungen zu Michell-Strukturen mit vielen Beispielen lassen sich z.B. in [82] und [155] finden. In [149] und [150] erfolgt eine kritische Betrachtung der von Michell hergeleiteten Optimalitätskriterien hinsichtlich ihrer Gültigkeit bei unterschiedlichen Zug- und Druckfestigkeiten der Stäbe sowie verschiedenen Lagerbedingungen.

Als zu Beginn der 1960er Jahre die digitale Rechentechnik leistungsfähiger wurde und somit die Finite-Elemente-Methode (FEM) weitere Verbreitung fand, kam es auch wieder zu vermehrten Entwicklungen in der Strukturoptimierung. Zunächst beschränkten sich erste Anwendungen auf das Bauwesen und die Optimierung von Stabquerschnittsflächen, wobei sich besonders L. A. Schmit bei der Nutzung der Möglichkeiten der mathematischen Programmierung hervortat [157]. Der nächste Schritt war dann die Verallgemeinerung auf Querschnittsabmessungen von Balkenelementen. Diese Parameter lassen sich in einem Finite-Elemente-Programm sehr einfach und ohne Veränderung des eigentlichen Modells variieren und führten zu einer Unterdisziplin der Strukturoptimierung, der Parameteroptimierung.

Bezüglich der Topologieoptimierung, bei welcher der prinzipielle Aufbau einer Struktur verändert bzw. optimiert, also Material hinzugefügt oder entfernt wird, gab es nach Michell erst wieder in den 1970er Jahren Veröffentlichungen. W. S. Hemp beschäftigte sich ausführlich mit Michell-Strukturen und der Optimierung von Platten [82]. Weitere Grundlagen wurden u.a. von G. I. N. Rozvany und William Prager (1903-1980) geschaffen, welche Michells Theorien auf Balkentragwerke erweiterten [148] bzw. grundlegende Optimalitätsprinzipien formulierten [140].

Gegen Ende der 1980er und zu Beginn der 1990er Jahre liegt die Geburtsstunde der ersten praktisch anwendbaren Finite-Element-basierten Topologieoptimierungsalgorithmen, welche vor allem durch zahlreiche Arbeiten von Martin P. Bendsøe geprägt wurden (siehe z.B. [13], [14], [15], [16], [17]). Als weitere Wissenschaftler, die sich vor allem in Bezug auf die Topologieoptimierung verdient gemacht haben, seien hier, ohne Anspruch auf Vollständigkeit, neben den bereits erwähnten auch O. Sigmund, N. Olhoff, N. Kikuchi, A. R. Diaz, R. T. Haftka, R. B. Haber und P. Pedersen erwähnt. Eine relativ detaillierte Beschreibung der Ent-

wicklung der Topologieoptimierung in den letzten beiden Jahrzehnten mit vielen Literaturstellen findet sich beispielsweise in [153] und etwas allgemeiner in [151]. Interessantes zur Entwicklung geeigneter Optimierungsalgorithmen erfährt man in [172].

Die bisher beschriebene Entwicklung in der Topologieoptimierung basierte hauptsächlich auf den Methoden der Mathematischen Programmierung (siehe Kapitel 2). Ein anderer Ansatz wird von den sogenannten ESO-Methoden (**E**volutionary-**S**tructural-**D**esign-Methoden) und den OC-Methoden (**O**ptimality-**C**riteria-Methoden) verfolgt. Diese Methoden verwenden heuristische Ansätze für die Topologie- und Gestaltoptimierung, die auf Ideen über Eigenschaften einer optimalen Struktur sowie auf natürlichen Wachstumsprozessen beruhen. Prinzipiell wird dabei iterativ Material an hoch belasteten Stellen der Struktur hinzugefügt bzw. an gering belasteten Stellen entfernt. Wichtige Arbeiten zu Beginn der 1990er Jahre zu den OC-Methoden stammen vor allem von C. Mattheck, der anhand des Wachstumsverhaltens von Bäumen sowie Tierzähnen und -knochen Algorithmen, hauptsächlich zur Gestaltoptimierung, entwickelte ([115], [116], [117], [118]). Weitere wichtige Veröffentlichungen zur Strukturoptimierung mit ESO-Methoden stammen von Y. M. Xie und G. P. Steven (siehe z.B. [177], [178], [179]).

2 Theoretische Grundlagen zur Optimierung

Im Folgenden sollen in kurzer Form die Grundlagen erläutert werden, die zum Verständnis einiger Optimierungsverfahren notwendig sind. Dabei wird im Wesentlichen auf Verfahren eingegangen, die von großer praktischer Bedeutung sind bzw. in dieser Arbeit Verwendung finden.

Bei der Beschreibung der einzelnen Optimierungsstrategien werden hauptsächlich Methoden zur Lösung restringierter Optimierungsprobleme behandelt, da bei fast allen mechanischen Optimierungsproblemen Nebenbedingungen auftreten bzw. zweckmäßigerweise eingeführt werden müssen. Die Lösungen für unrestringierte Optimierungsaufgaben ergeben sich außerdem bei den meisten Verfahren als Spezialfall der restringierten Optimierung. Allerdings existieren zur Lösung unrestringierter Probleme eine Reihe von sehr effizienten Spezialverfahren (siehe z.B. [22], [53]).

2.1 Mathematische Grundlagen restringierter, kontinuierlicher Optimierungsprobleme

Um Optimierungsprobleme zu lösen, ist zunächst eine einheitliche Beschreibung der Problemstellung von Vorteil. Weiterhin spielt der Begriff der Konvexität eine große Rolle, welcher nachfolgend anschaulich erläutert wird.

Da kein Verfahren existiert, welches jedes Optimierungsproblem effizient lösen kann, ist eine Klassifizierung der Optimierungsprobleme sinnvoll, wodurch problemspezifische Verfahren entwickelt werden können. Um schließlich ein Optimierungsproblem zu lösen bzw. zu beurteilen, ob man einen Optimalpunkt gefunden hat, benötigt man Kriterien, die hierüber Aussagen machen.

2.1.1 Beschreibung eines Optimierungsproblems

Aus mathematischer Sicht lässt sich ein Optimierungsproblem in folgender Weise darstellen: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Menge und f eine gegebene Funktion, so ist ein Optimierungsproblem beschrieben durch „Minimiere $f(\mathbf{x})$ unter der Nebenbedingung $\mathbf{x} \in X$ “ oder kürzer

$$\min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}). \quad (2.1)$$

Dabei wird die Funktion f als Zielfunktion bezeichnet, und die Menge X als zulässiger Bereich.

In vielen Fällen kann es gewünscht sein, eine Funktion zu maximieren. Da es aber immer möglich ist, ein Maximierungsproblem durch Multiplikation mit (-1) in ein Minimierungsproblem zu überführen, werden im Weiteren nur Minimierungsprobleme behandelt.

Ist der zulässige Bereich $X = \mathbb{R}^n$, so spricht man von einem unrestringierten Minimierungsproblem (Optimierungsproblem). Oftmals ist es jedoch von Nöten, den zulässigen Bereich

durch Nebenbedingungen (Restriktionen) einzuschränken. Dabei unterscheidet man Gleichheits- und Ungleichheitsnebenbedingungen, welche in Form von Funktionen $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ gegeben sind:

$$\text{Ungleichheitsnebenbedingungen: } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \quad (2.2)$$

$$\text{Gleichheitsnebenbedingungen: } \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (2.3)$$

2.1.2 Konvexität

Da es sich bei der „Konvexität“ um eine Eigenschaft von Mengen und Funktionen handelt, die eine wichtige Rolle in der Optimierung spielt, soll hier zunächst versucht werden, diesen Begriff anschaulich zu erläutern. Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn

$$\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in X \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, \lambda \in (0,1) \quad (2.4)$$

gilt. Bildhaft gesprochen bedeutet diese Definition, dass in einer konvexen Menge die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte der Menge ebenfalls vollständig innerhalb der Menge liegt (Abb. 2.1).

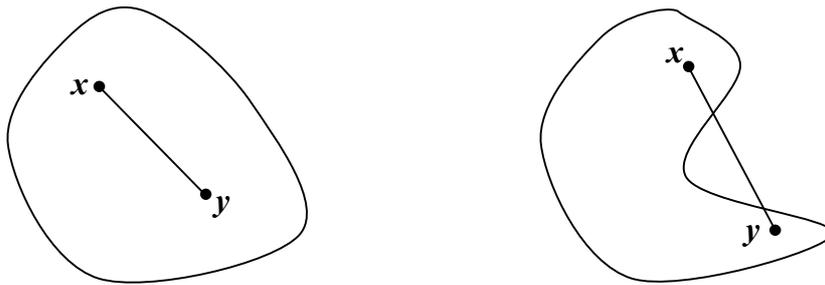


Abb. 2.1 Konvexe Menge (links) und nichtkonvexe Menge (rechts)

Eine Funktion f bezeichnet man nach [59] als

$$\text{- konvex auf } X, \text{ falls } f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f(\mathbf{y}), \quad (2.5)$$

$$\text{- strikt konvex auf } X, \text{ falls } f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) < \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f(\mathbf{y}) \quad (2.6)$$

gilt, bzw. als

$$\text{- (strikt) konkav auf } X, \text{ falls } -f \text{ (strikt) konvex auf } X \text{ ist.} \quad (2.7)$$

Für \mathbf{x} , \mathbf{y} und λ bestehen dieselben Einschränkungen (2.4) wie bei konvexen Mengen, wobei bei der strikten Konvexität zusätzlich noch $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ gelten muss.

Ist eine Funktion stetig differenzierbar, so lässt sich Konvexität auch mit der Aussage beschreiben, dass die Linearisierung

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) + \nabla f(\mathbf{y})^T (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.8)$$

um jeden Punkt $\mathbf{y} \in X$ unterhalb des Graphen von f verläuft. Abb. 2.2 veranschaulicht die Konvexität bei Funktionen. Es sei noch angemerkt, dass eine Linearkombination konvexer Funktionen wieder eine konvexe Funktion ergibt.

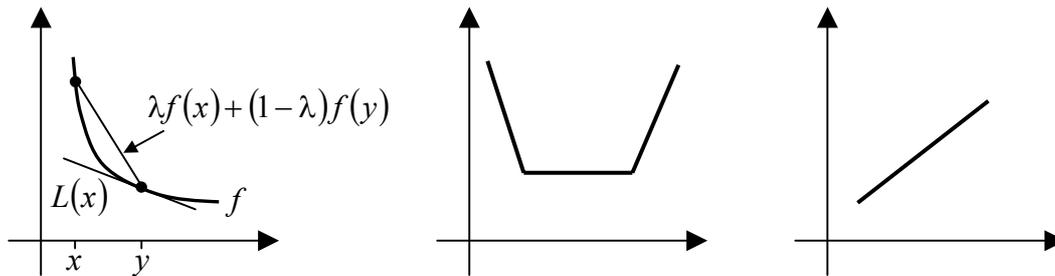


Abb. 2.2 Strikt konvexe Funktion (links), konvexe Funktion (mittig) und sowohl konvexe als auch konkave Funktion (rechts)

Wird die zulässige Menge X durch Gleichheits- und Ungleichheitsrestriktionen beschrieben, so lässt sich zeigen (siehe z.B. [59]), dass die Menge X konvex ist, wenn die Komponentenfunktionen der Gleichheitsnebenbedingungen (2.3) affin-linear und die Komponentenfunktionen der Ungleichheitsnebenbedingungen (2.2) konvex sind.

2.1.3 Klassifikation kontinuierlicher Optimierungsprobleme

Da das Auftreten und die Art der Restriktionen eine wichtige Rolle bei der Konstruktion von Lösungsverfahren für Optimierungsprobleme spielen, werden die Optimierungsprobleme üblicherweise zunächst nach Art ihrer Restriktionen unterteilt. Man unterscheidet Optimierungsprobleme, welche

- keine Restriktionen,
- nur Gleichheitsrestriktionen,
- nur Ungleichheitsrestriktionen oder
- Gleichheits- und Ungleichheitsrestriktionen

enthalten. Da besonders bei technischen Problemstellungen sowohl Gleichheits- als auch Ungleichheitsnebenbedingungen häufig auftreten, wird diese Klasse der Optimierungsprobleme im Folgenden behandelt.

Weiterhin lässt sich folgende Unterscheidung vornehmen:

- Lineare Optimierung: f, g, h sind linear, z.B.: $\min c^T x$ u.d.N. $Ax = b, x \geq 0$.
- Quadratische Optimierung: f ist quadratisch, g und h sind linear, z.B.: $\min \frac{1}{2} x^T Qx + c^T x + \gamma$ u.d.N. $Ax = b, x \geq 0$.
- Optimierung mit Wertebereichsbeschränkung: f ist beliebig nichtlinear, x liegt zwischen gewissen Schranken, z.B.: $\min f(x)$ u.d.N. $l \leq x \leq u$.
- Linear restringierte Optimierung: f ist beliebig nichtlinear, g und h sind linear, z.B.: $\min f(x)$ u.d.N. $Ax = b, x \geq 0$.
- Konvexe Optimierung: f ist konvex, alle Komponentenfunktionen von h sind linear, alle Komponentenfunktionen von g sind konvex.
- Nichtlineare Optimierung: f, g und h sind beliebig nichtlinear.

Für die Entwicklung von Verfahren zur Lösung von Optimierungsproblemen ist diese Klassifizierung von großer Bedeutung, da es keine allgemeine Methode gibt, welche auf effizienteste Art und Weise alle Optimierungsprobleme lösen kann. Vielmehr obliegt es dem Anwender, ein für das jeweilige Problem passendes Verfahren auszuwählen. Beispielsweise ist das bekannte und wichtige „Simplex-Verfahren“ nur für lineare Probleme geeignet.

2.1.4 Optimalitätskriterien

Im Folgenden soll kurz skizziert werden, wie man zu Optimalitätskriterien gelangt, die zur Konstruktion von Lösungsverfahren nutzbar sind. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf den Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen (KKT-Bedingungen). Die ähnlichen Fritz John-Bedingungen sollen abschließend nur der Vollständigkeit halber erwähnt werden.

2.1.4.1 Tangentialkegel

Zum Verständnis der Herleitung der KKT-Bedingungen ist es zunächst notwendig, den Begriff des „Tangentialkegels“ einzuführen. Für die Beschreibung eines Tangentialkegels definiert man zuerst einen tangentialen Vektor \mathbf{d} der Menge X im Punkt \mathbf{x} (Abb. 2.3, links): Der tangentielle Vektor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ ergibt sich aus der Konvergenz der Folge $(\mathbf{x}^k - \mathbf{x})/t_k \rightarrow \mathbf{d}$, wenn die Folge $\{\mathbf{x}^k\} \subseteq X$ für $k \rightarrow \infty$ gegen \mathbf{x} und die Folge $\{t_k\} \in \mathbb{R}$ mit $t_k > 0$ für $k \rightarrow \infty$ gegen null strebt. Die Menge aller möglichen tangentialen Vektoren bzw. Richtungen (was auch diejenigen Vektoren einschließt, die ins Innere der Menge weisen) bildet dann den Tangentialkegel $T_x(\mathbf{x})$ von X in \mathbf{x} (Abb. 2.3, rechts).

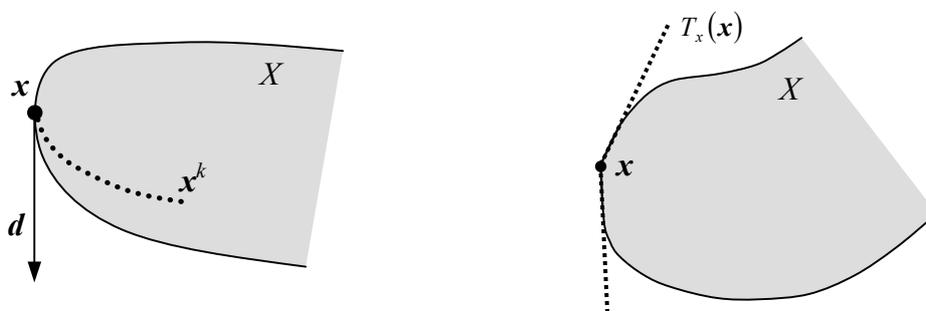


Abb. 2.3 Veranschaulichung der Definition einer tangentialen Richtung (links) und der äußeren Begrenzung eines Tangentialkegels (rechts)

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung kann man nun Folgendes zeigen: Falls \mathbf{x}^* ein lokales Minimum des Optimierungsproblems (2.1) ist, so gilt:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d} \geq 0 \text{ für alle } \mathbf{d} \in T_x(\mathbf{x}^*). \quad (2.9)$$

Dies bedeutet, dass in einem lokalen Minimum \mathbf{x}^* keine „Abstiegsrichtung“ existiert [59].

Da der Tangentialkegel, so wie er hier definiert wurde, ein recht schwer zu „handhabendes“ Konstrukt ist, führt man den linearisierten Tangentialkegel T_{lin} ein, der mit Hilfe der Menge der aktiven Ungleichheitsnebenbedingungen $I(\mathbf{x}) := \{i \in \{1 \dots m\} \mid g_i(\mathbf{x}) = 0\}$ in einem zulässigen Punkt \mathbf{x} definiert wird:

$$T_{lin}(\mathbf{x}) := \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g_i(\mathbf{x})^T \mathbf{d} \leq 0 \quad \forall i \in I(\mathbf{x}), \nabla h_j(\mathbf{x})^T \mathbf{d} = 0 \quad \forall j = 1 \dots p\}. \quad (2.10)$$

Wie sich zeigen lässt [59], ist der Tangentialkegel $T_x(\mathbf{x})$ stets eine Teilmenge des linearisierten Tangentialkegels $T_{lin}(\mathbf{x})$.

Um nun Optimalitätskriterien herleiten zu können, muss eine sogenannte Regularitätsbedingung eingeführt werden. Diese verlangt einige (relativ schwache) Voraussetzungen von der zulässigen Menge und kann direkt zur Herleitung von notwendigen Optimalitätskriterien verwendet werden. Die hier genutzte Regularitätsbedingung von Abadie besagt, dass in einem zulässigen Punkt des restringierten Optimierungsproblems der Tangentialkegel $T_x(\mathbf{x})$ mit dem linearisierten Tangentialkegel $T_{lin}(\mathbf{x})$ übereinstimmen muss. Allerdings werden dadurch bestimmte Optimierungsprobleme ausgeschlossen. Ein Beispiel, in dem die Abadie-Regularitätsbedingung nicht gilt, geben Kuhn und Tucker an [104]. Ein durch die Nebenbedingungen $(1-x_1)^3 - x_2 \geq 0$, $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ restringiertes Optimierungsproblem erfüllt im Punkt $(x_1 = 1, x_2 = 0)$ die Abadie-Regularitätsbedingung nicht, da in diesem Punkt der Tangentialkegel nicht mit dem linearisierten Tangentialkegel übereinstimmt. Vielmehr ist der Tangentialkegel eine echte Teilmenge des linearisierten Tangentialkegels (Anhang A).

2.1.4.2 Die Lagrange-Funktion und KKT-Punkte

Für ein restringiertes Optimierungsproblem wird die sogenannte „Lagrange-Funktion“ definiert:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) := f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \mu_j h_j(\mathbf{x}). \quad (2.11)$$

Diese Funktion wird im Folgenden benötigt, um Karush-Kuhn-Tucker Punkte (KKT-Punkte) zu beschreiben. Sind die Funktionen f , \mathbf{g} , und \mathbf{h} stetig differenzierbar, so sind die Bedingungen

$$\begin{aligned} \nabla_x L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) &\leq \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= 0, \\ \boldsymbol{\lambda} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.12)$$

die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen (KKT-Bed.) des Optimierungsproblems, wobei jeder Vektor $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$, der die KKT-Bedingungen erfüllt, KKT-Punkt heißt.

Man kann zeigen, dass zu jedem lokalen Minimierer \mathbf{x}^* eines restringierten Optimierungsproblems, welches wiederum der Abadie-Regularitätsbedingung genügt, Lagrange-Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}^*$ und $\boldsymbol{\mu}^*$ existieren, so dass $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ ein KKT-Punkt ist. Diese Aussage verdeutlicht, dass es sich bei den KKT-Bedingungen um notwendige Bedingungen für ein Optimum handelt, da jedes Optimum gleichzeitig einen KKT-Punkt darstellt. Jedoch beschreibt nicht zwangsläufig jeder KKT-Punkt ein Optimum. Zum Beweis obiger Aussage gelangt man durch folgende Überlegungen: Ist \mathbf{x}^* ein lokales Minimum des Optimierungsproblems, so muss $\nabla f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d} \geq 0$ (bzw. $-\nabla f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d} \leq 0$) für alle $\mathbf{d} \in T_x(\mathbf{x}^*)$ gelten (siehe

[59]), was bedeutet, dass es in einem lokalen Optimum keine zulässige Abstiegsrichtung gibt. Gilt jetzt die Abadie-Regularitätsbedingung (sind also der Tangentialkegel, der alle zulässigen Richtungen enthält, und der linearisierte Tangentialkegel identisch), dann sind zulässige Richtungen \mathbf{d} solche, für die $\mathbf{A}\mathbf{d} \leq \mathbf{0}$ gilt, wobei die Matrix \mathbf{A} zeilenweise aus den positiven und negativen Gradienten der Gleichheitsnebenbedingungen und den Gradienten der aktiven Ungleichheitsnebenbedingungen mit $i \in I$ aufgebaut ist:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \nabla g_i(\mathbf{x}^*)^T \\ \nabla h_j(\mathbf{x}^*)^T \\ -\nabla h_j(\mathbf{x}^*)^T \end{bmatrix}.$$

Die Verwendung der negativen und positiven Gradienten der Gleichheitsnebenbedingungen folgt aus der Gleichwertigkeit der Bedingungen $\nabla h_j(\mathbf{x}^*) = 0$ bzw. $\nabla h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$ und $-\nabla h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$, wodurch die Gleichheitsnebenbedingungen als Ungleichheitsnebenbedingungen geschrieben werden können. Aus der Äquivalenzformulierung* des „Farkas-Lemmas“ ([59], [104], [5]), erhält man nun sofort, dass das System $\mathbf{A}^T \mathbf{y} = -\nabla f(\mathbf{x}^*)$ für $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ eine Lösung besitzt, da wie bereits erwähnt gleichzeitig $-\nabla f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d} \leq 0$ und $\mathbf{A}\mathbf{d} \leq \mathbf{0}$ gilt. Werden die Komponenten von \mathbf{y} mit λ_i^* , μ_j^+ und μ_j^- bezeichnet und $\mu_j^* = \mu_j^+ - \mu_j^-$ gesetzt (Letzteres erhält man durch das Ausklammern von $\nabla h_j(\mathbf{x}^*)$ im Gradienten der Lagrange-Funktion), so ergibt sich, dass $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ ein KKT-Punkt ist.

2.1.4.3 Weitere Regularitätsbedingungen

Über die Abadie-Regularitätsbedingung hinaus existieren noch weitere Regularitätsbedingungen, die für bestimmte Optimierungsprobleme einfacher zu handhaben oder zu verifizieren sind, aber alle die Abadie-Regularitätsbedingung implizieren:

- Mangasarian-Fromovitz-Regularitätsbedingung:
 - Die Gradienten $\nabla h_j(\mathbf{x})$ sind linear unabhängig.
 - Es existiert ein Vektor \mathbf{d} mit $\nabla g_i(\mathbf{x})^T \mathbf{d} < 0$ (für die aktiven Ungleichheitsnebenbedingungen) und $\nabla h_j(\mathbf{x})^T \mathbf{d} = 0$.
- Regularitätsbedingung der linearen Unabhängigkeit:
 - Die Gradienten der aktiven Ungleichheitsnebenbedingungen und die Gradienten der Gleichheitsnebenbedingungen sind linear unabhängig.

Für ausschließlich linear restringierte Probleme lässt sich zeigen, dass auf Regularitätsbedingungen verzichtet werden kann, da in diesem Falle die linearen Nebenbedingungen selber eine Regularitätsbedingung darstellen.

Bei konvexen Optimierungsproblemen (konvexe Zielfunktion, konvexe Ungleichheitsnebenbedingungen, lineare Gleichheitsnebenbedingungen) erweist sich die Slater-Bedingung, welche wieder die Abadie-Regularitätsbedingung impliziert, als sehr nützlich. Sie verlangt, dass

* In seiner Äquivalenzformulierung besagt das Farkas-Lemma allgemein, dass die Aussage, dass ein Gleichungssystem $\mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, wobei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, eine Lösung besitzt, gleichwertig zu der Aussage ist, dass die Ungleichung $\mathbf{b}^T \mathbf{d} \geq 0$ für alle $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{A}\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$ gilt.

zulässige Punkte \mathbf{x} existieren müssen, die die Gleichheitsnebenbedingungen erfüllen und gleichzeitig „innere Punkte“ bezüglich der nichtlinearen Ungleichheitsnebenbedingungen darstellen ($g_i(\mathbf{x}) < 0$). Mit ihrer Hilfe kann man beweisen, dass ein Optimum die KKT-Bedingungen notwendigerweise erfüllt. Schließlich sei noch erwähnt, dass die KKT-Bedingungen für ein konvexes Problem gleichzeitig hinreichende Bedingungen für ein Optimum sind.

2.1.4.4 Die Fritz John-Bedingungen

Wie schon erwähnt, stellen die Fritz John-Bedingungen (FJ-Bed.) keine Regularitätsvoraussetzungen an das Optimierungsproblem. Dafür ist ihre Aussage auch schwächer als die der KKT-Bedingungen. Sie sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} r \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \mu_j \nabla h_j(\mathbf{x}) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) &\leq \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= 0, \\ \boldsymbol{\lambda} &\geq \mathbf{0}, \\ r &\geq 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Im Unterschied zu den KKT-Bedingungen wird der Skalar r eingeführt. Ein Vektor $(r^*, \mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$, der den FJ-Bedingungen genügt, wird als FJ-Punkt bezeichnet. Man kann zeigen, dass in einem lokalen Minimum stets ein solcher Punkt existiert, womit auch die Fritz John-Bedingungen ein notwendiges Optimalitätskriterium darstellen. Da jedoch der Faktor r auch den Wert null annehmen darf, kann es passieren, dass auch recht „uninteressante“ Punkte die FJ-Bedingungen erfüllen. Beispielsweise bliebe ein Vektor $(r^*, \mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ für $r = 0$ auch dann ein FJ-Punkt, wenn man die Zielfunktion beliebig abändert. Somit sind die FJ-Bedingungen für den Fall $r = 0$ nicht besonders aussagekräftig. Führt man jedoch auch hier Regularitätsbedingungen wie die Mangasarian-Fromovitz-Regularitätsbedingung oder die Regularitätsbedingung der linearen Unabhängigkeit ein, so kann man $r > 0$ garantieren.

2.1.4.5 Bedingungen zweiter Ordnung

Um eine Aussage darüber zu machen, wie sich die Zielfunktion in einer Umgebung um einen gefundenen KKT-Punkt $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ verhält, muss man die 2. Ableitungen der Zielfunktion und der Nebenbedingungen (vorausgesetzt sie existieren) im Sinne einer Taylor-Reihenentwicklung um den betreffenden KKT-Punkt mit ins Kalkül ziehen.

Setzt man zunächst nur das Vorhandensein von Gleichheitsnebenbedingungen voraus, woraus für einen KKT-Punkt durch $\mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ dann $f(\mathbf{x}^*) = L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ folgt, so erhält man für die Taylor-Entwicklung

$$f(\mathbf{x}^* + \mathbf{d}) = L(\mathbf{x}^* + \mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}^*)$$

$$\begin{aligned}
&= L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*) + \mathbf{d}^T \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*) + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \nabla_{\mathbf{xx}}^2 L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \mathbf{d} + \dots \\
&= f(\mathbf{x}^*) + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \nabla_{\mathbf{xx}}^2 L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \mathbf{d} + \dots,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

wobei \mathbf{d} eine zulässige Richtung darstellt. Vernachlässigt man für betragsmäßig hinreichend kleine Vektoren \mathbf{d} die Terme höherer Ordnung, so ergibt sich sofort als notwendige Bedingung 2. Ordnung aufgrund der geforderten Minimaleigenschaft von $f(\mathbf{x}^*)$:

$$\mathbf{d}^T \nabla_{\mathbf{xx}}^2 L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \mathbf{d} \geq 0. \tag{2.15}$$

Somit muss für einen Minimalpunkt die Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion im Unterraum der zulässigen Parametervariationen positiv semidefinit sein. Eine hinreichende Bedingung erhält man, wenn man fordert, dass der Term 2. Ordnung in (2.14) für zulässige Parametervariationen größer als null ist:

$$\mathbf{d}^T \nabla_{\mathbf{xx}}^2 L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \mathbf{d} > 0. \tag{2.16}$$

Die Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion muss also im Unterraum zulässiger Parametervariationen positiv definit sein.

Für Ungleichheitsnebenbedingungen erfolgt die Herleitung der Bedingungen zweiter Ordnung auf ähnliche Weise. Hierzu sei auf [53] verwiesen.

Zusammengefasst lassen sich folgende Aussagen formulieren:

a) Notwendige Bedingung 2. Ordnung:

Ist $\mathbf{x}^* \in X$ ein lokales Minimum des Optimierungsproblems (2.1), welches der Regularitätsbedingung der linearen Unabhängigkeit genügt, so ist

$$\mathbf{d}^T \nabla_{\mathbf{xx}}^2 L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \mathbf{d} \geq 0 \tag{2.17}$$

für alle zulässigen \mathbf{d} , wobei $\boldsymbol{\lambda}^*$ und $\boldsymbol{\mu}^*$ die mit Hilfe der KKT-Bedingungen eindeutig bestimmten Lagrange-Multiplikatoren zu \mathbf{x}^* sind.

b) Hinreichende Bedingung 2. Ordnung:

Ist $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ ein KKT-Punkt des Optimierungsproblems (2.1), für den

$$\mathbf{d}^T \nabla_{\mathbf{xx}}^2 L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \mathbf{d} > 0 \tag{2.18}$$

für alle zulässigen \mathbf{d} gilt, so ist \mathbf{x}^* ein striktes lokales Minimum des Optimierungsproblems.

Einen strengen mathematischen Beweis für beide Aussagen kann man [59] entnehmen.

2.2 Lineare Programme/Optimierung

Probleme der linearen Optimierung treten in der Praxis relativ häufig auf. Insbesondere Fragestellungen der Ökonomie münden häufig in einem linearen Optimierungsproblem. (Im Folgenden wird der Terminus „Programme“, wie es in der Optimierung üblich ist, gleichbedeutend für „Optimierungsprobleme“ verwendet.) Aufgrund der besonderen Eigenschaften linearer Programme, lassen sich effiziente Lösungsverfahren entwickeln.

Man kann beispielsweise zeigen ([59], [36]), dass sich ein lineares Optimierungsproblem (lineare Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen) immer mit Hilfe der sogenannten Normalform beschreiben lässt:

$$\min_x c^T x \text{ u.d.N. } Ax=b, x \geq 0. \quad (2.19)$$

Die zulässige Menge des Optimierungsproblems ist dabei ein Polyeder in Normalform, gegeben durch

$$P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax=b, x \geq 0\}. \quad (2.20)$$

Abb. 2.4 (links) zeigt beispielhaft eine solche, zulässige Menge.

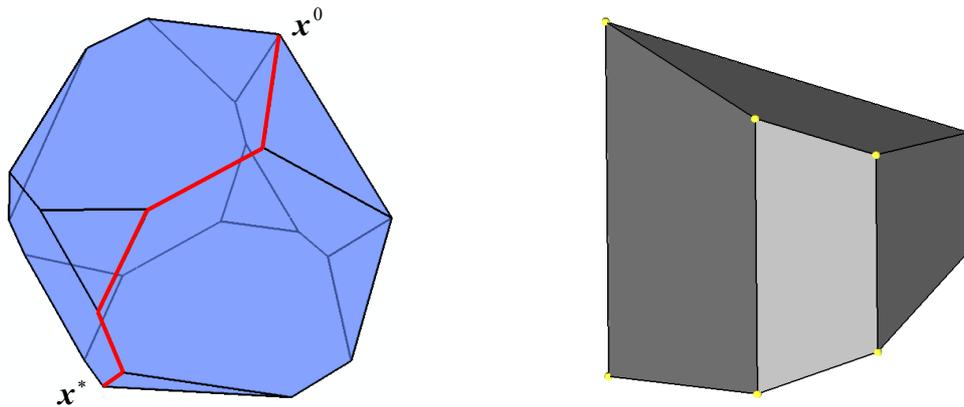


Abb. 2.4 Zulässige Menge eines linearen Optimierungsproblems (links), Klee-Minty-Würfel (rechts, nach [57])

Der Hauptsatz der linearen Optimierung [59] sagt u.a. aus, dass sich eine Lösung eines linearen Optimierungsproblems (sofern das Problem eine Lösung besitzt) auf einer Ecke des Polyeders befindet. Zur Lösung eines linearen Programms würde es demnach genügen, alle Ecken des Polyeders zu betrachten und diejenige mit dem kleinsten Zielfunktionswert als Lösung zu akzeptieren. Der Simplex-Algorithmus, ein weit verbreitetes und effizientes Verfahren zur Lösung linearer Programme, macht sich diesen Sachverhalt zu Nutze. Jedoch untersucht das Simplex-Verfahren nicht alle Ecken des Polyeders, da dies unter Umständen sehr viele sein können.

2.2.1 Das Simplex-Verfahren

Die Grundidee des Simplex-Verfahrens besteht darin, von einer Ecke des Polyeders zu einer anderen zu wandern, für die sich der Zielfunktionswert verbessert. Da die durch den Polyeder beschriebene zulässige Menge konvex ist, wird man nach endlich vielen Schritten auf die Optimallösung stoßen. In Abb. 2.4 (links) ist ein möglicher Pfad von einem Startpunkt x^0 zum Optimum x^* eingezeichnet (rote Linie).

Grundsätzlich besteht das Simplex-Verfahren aus zwei Phasen. In der ersten Phase wird die Lösbarkeit des Problems überprüft und, falls diese gegeben ist, eine „Start-Ecke“ für den Algorithmus bestimmt. In der zweiten Phase wird dann die vorhandene Lösung iterativ verbessert.

Phase I:

Zur Bestimmung einer Startlösung für das eigentliche Verfahren, wird das ursprüngliche Problem (2.19) durch Einführung künstlicher Variablen z leicht modifiziert:

$$\min_{x,z} e^T z \text{ u.d.N. } Ax+z=b, x \geq 0, z \geq 0. \quad (2.21)$$

Hierbei ist $e^T = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^p$. Findet man nun einen Lösungsvektor für das modifizierte Problem (2.21) mit $z = 0$ und gilt $\text{Rang}(A) = p$, so hat man gleichzeitig eine Startlösung für das ursprüngliche Problem (2.19) gefunden ([36], [59]). Das Auffinden eines Lösungsvektors $(x^{*T} \quad z^{*T})^T$ mit $z^* = 0$, also einem minimalen z^* , entspricht dabei wieder einer Minimierungsaufgabe, deren Lösung ebenfalls mit Hilfe des Simplex-Verfahrens gewonnen werden kann. Allerdings ist für dieses Problem eine zulässige Startlösung, nämlich $(x^T \quad z^T)^T = (0^T \quad b^T)^T$, sofort bekannt.

Phase II:

Das Vorgehen in Phase II des Simplexalgorithmus entspricht einer Aneinanderreihung von einzelnen Simplex-Schritten. Ein einzelner Simplex-Schritt ist jedoch relativ kompliziert und bedarf einer umfangreichen Erklärung, für welche auf die einschlägige Spezialliteratur verwiesen wird ([36], [59], [130]). Grob beschrieben wird in einem Simplex-Schritt versucht, eine benachbarte Ecke des Polyeders zu finden, deren Zielfunktionswert mindestens ebenso gut wie derjenige der aktuellen Ecke ist.

Obwohl sich das Simplex-Verfahren in der Praxis auch bei sehr großen Optimierungsproblemen als effizientes und schnelles Verfahren erwiesen hat, konnten Klee und Minty in [97] eine Gruppe von Problemen konstruieren, für die das Simplex-Verfahren eine sehr hohe Anzahl an Iterationsschritten benötigt. In Abb. 2.4 (rechts) ist ein sogenannter Klee-Minty-Würfel abgebildet, der die Eigenschaft besitzt, dass ein auf- bzw. absteigender Kantenpfad durch alle Ecken existiert. Für einen solchen Polyeder benötigt der Simplexalgorithmus exponentiell viele Iterationen, was das Verfahren für diese Problemklasse unbrauchbar macht. Motiviert durch diese Tatsache, kam es zur Entwicklung der „Inneren-Punkte-Methoden“, auf welche im nächsten Abschnitt kurz eingegangen werden soll.

Abschließend sei noch erwähnt, dass das soeben beschriebene Simplex-Verfahren nicht mit dem Downhill-Simplex-Verfahren von Nelder und Mead [128] zu verwechseln ist, welches oftmals auch als Simplex-Verfahren bezeichnet wird. Dieses Verfahren eignet sich jedoch zum Lösen unrestringierter, nichtlinearer Optimierungsprobleme. Dabei wird das Optimum durch ein „Simplex“, einen Polyeder mit $n+1$ Eckpunkten (n = Anzahl der Optimierungsvariablen) eingeschlossen. Das Simplex „wandert“ dabei zunächst durch die Operationen Reflexion und Expansion durch die zulässige Menge, um dann schließlich das Minimum durch die Operation Kontraktion genau zu bestimmen. Das Verfahren, welches sehr robust ist, aber viele Funktionsauswertungen benötigt, kommt dabei ohne Ableitungen aus und wird lediglich durch die Werte der Zielfunktion an den Polyeder-Eckpunkten gesteuert.

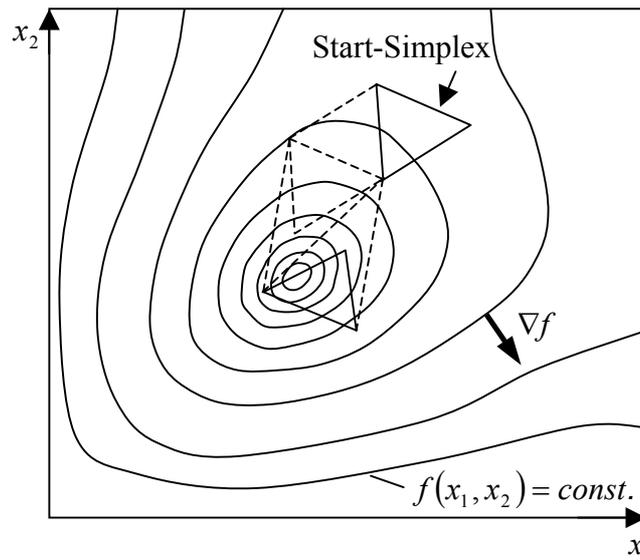


Abb. 2.5 Darstellung einiger Iterationsschritte des Downhill-Simplex-Verfahrens von Nelder und Mead für eine Zielfunktion $f(x, y)$

2.2.2 Innere-Punkte-Methoden

Innere-Punkte-Methoden sind eine Klasse von Verfahren, die hauptsächlich zur Lösung linearer Programme der Form (2.19) eingesetzt werden, jedoch auch für die Lösung nichtlinearer Probleme genutzt werden können. Ein grundsätzlicher Unterschied zum zuvor beschriebenen Simplex-Verfahren ist, dass sich der Algorithmus nicht entlang der Kanten des Polyeders, welcher die zulässige Menge beschreibt, sondern auf einem „zentralen Pfad“ durch das Innere der zulässigen Menge zum Optimum bewegt. Innere-Punkte-Methoden spielen ihre Vorteile gegenüber dem Simplex-Algorithmus vor allem bei sehr großen Optimierungsproblemen mit mehreren hunderttausend Optimierungsvariablen und Tausenden von Nebenbedingungen aus [144].

Um die Grundzüge der Inneren-Punkte-Verfahren zu verstehen, muss zunächst der Begriff der „Dualität“ bei linearen Programmen eingeführt werden.

2.2.2.1 Dualität bei linearen Programmen

Im Folgenden wird das eigentliche, lineare Optimierungsproblem (2.19) als das primale Problem bezeichnet. Das damit eng verwandte duale Maximierungsproblem stellt sich wie folgt dar:

$$\max_{\lambda} b^T \lambda \quad \text{u.d.N.} \quad A^T \lambda \leq c. \quad (2.22)$$

Durch Einführung einer nichtnegativen Schlupfvariable s erhält man folgende alternative Formulierung des dualen Problems:

$$\max_{\lambda, s} b^T \lambda \quad \text{u.d.N.} \quad A^T \lambda + s = c, s \geq 0. \quad (2.23)$$

Wendet man nun die KKT-Bedingungen mit den Lagrange-Multiplikatoren λ (für die Gleichheitsnebenbedingungen) und s (für die Ungleichheitsnebenbedingungen) auf das primale Problem (2.19) an und macht selbiges für das duale Problem (2.22) mit x als Lagrange-Multiplikator für die Ungleichheitsnebenbedingung und führt anschließend die Substitution $s = c - A^T \lambda$ durch (detaillierte Rechnung siehe [130]), so stellt man fest, dass die KKT-Bedingungen für beide Probleme identisch sind:

$$\begin{aligned} A^T \lambda + s &= c, \\ Ax &= b, \\ x_i s_i &= 0, \\ x, s &\geq 0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Auf diese Weise kann man zeigen, dass das primale Problem genau dann eine Lösung besitzt, wenn das duale Problem eine Lösung hat und umgekehrt ([59], [130]).

2.2.2.2 Der zentrale Pfad und die Grundidee der Inneren-Punkte-Methoden

Innere-Punkte-Methoden arbeiten sowohl mit der primalen, als auch mit der dualen Formulierung des Optimierungsproblems und werden daher auch als primal-duale Verfahren bezeichnet. Die in (2.24) formulierten Optimalitätsbedingungen werden durch Einführung des Parameters $\tau > 0$ gestört, was zu den „zentralen Pfad-Bedingungen“ führt:

$$\begin{aligned} A^T \lambda + s &= c, \\ Ax &= b, \\ x_i s_i &= \tau, \\ x, s &> 0. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Die Abbildung $\tau \rightarrow (x_\tau, \lambda_\tau, s_\tau)$ selber wird als zentraler Pfad bezeichnet. Die Grundidee der Inneren-Punkte-Methoden besteht nun darin, den zentralen Pfad zu verfolgen. Man kann zeigen, dass die zentralen Pfad-Bedingungen für jedes $\tau > 0$ eine Lösung besitzen, sofern wenigstens ein Punkt (x, λ, s) existiert, der sowohl die primalen als auch dualen Nebenbedingungen erfüllt [59].

Das Folgen des zentralen Pfades geschieht mit Hilfe eines Newton-Verfahrens, welches auf das Gleichungssystem der zentralen Pfad-Bedingungen (2.25) angewandt wird. Die Ungleichungen $x, s > 0$ werden erfüllt, indem nur positive Iterierte x^k und s^k erzeugt werden.

Die Menge aller Lösungen für verschiedene τ beschreibt den zentralen Pfad, der den Startpunkt der Iteration mit der Lösung des Ursprungsproblems ($\tau = 0$) verbindet. Während des Newton-Verfahrens wird der Parameter τ dabei in jedem Iterationsschritt reduziert.

Eine genaue Beschreibung verschiedener Innerer-Punkte-Verfahren sowie strenge Beweise für die hier gemachten Aussagen findet man beispielsweise in [59].

2.3 Nichtlineare Programme/Optimierung

Zur Lösung nichtlinearer Optimierungsprobleme existieren ebenfalls eine Vielzahl verschiedener Algorithmen und Ansätze. Die bekanntesten und am weitesten verbreiteten sollen nachfolgend kurz erläutert werden.

2.3.1 Quadratische Programme

Eine sehr wichtige Klasse der nichtlinearen Optimierungsprobleme bilden die quadratischen Programme, da sie auch als Teilproblem vieler Lösungsverfahren für allgemeine nichtlineare Programme auftreten (z.B. SQP-Verfahren). Zunächst sollen quadratische Optimierungsprobleme mit Gleichheitsrestriktionen der Form

$$\min_x \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \gamma \quad \text{u.d.N. } \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (2.26)$$

betrachtet werden. Setzt man voraus, dass die Matrix \mathbf{A} vollen Rang besitzt und wendet die KKT-Bedingungen (2.12) auf (2.26) an, so erhält man folgendes lineares Gleichungssystem zur Berechnung eines KKT-Punktes:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \\ \boldsymbol{\mu}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{c} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Für den Fall einer konvexen Zielfunktion (\mathbf{Q} positiv semi-definit), erhält man mit der Bestimmung des KKT-Punktes auch die Lösung des gleichheitsrestringierten Optimierungsproblems.

Um auch ungleichheitsrestringierte quadratische Optimierungsprobleme der Form

$$\min_x \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \gamma \quad \text{u.d.N. } \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{B} \mathbf{x} \leq \mathbf{d} \quad (2.28)$$

behandeln zu können, empfiehlt es sich, erst einmal die Substitution $\mathbf{x} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}$ vorzunehmen. Hierbei ist \mathbf{x}^k ein zulässiger Punkt des Optimierungsproblems und $\Delta \mathbf{x}$ ein Korrekturterm. Führt man die Substitution zunächst in das gleichheitsrestringierte Problem (2.27) ein, so ergibt sich nach kurzer Rechnung (siehe [59]) unter Berücksichtigung von $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{c}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f(\mathbf{x}^k) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Eine oft genutzte Möglichkeit um schließlich auch Probleme der Form (2.28) zu lösen, ist die Strategie der aktiven Menge. Die Idee hinter dieser Strategie besteht darin gleichheitsrestringierte Probleme zu lösen, deren Restriktionen aus den Gleichheitsnebenbedingungen und den im jeweiligen Iterationsschritt k aktiven Ungleichheitsnebenbedingungen bestehen. Ist eine Ungleichheitsbedingung $\mathbf{b}_i^T \mathbf{x} \leq d_i$ aktiv, so bedeutet dies, dass $\mathbf{b}_i^T \mathbf{x} = d_i$ gilt.

Im Prinzip muss ein Algorithmus „herausfinden“ welche Ungleichheitsrestriktionen im Optimalpunkt aktiv sind, um dann durch Lösen eines linearen Gleichungssystems den KKT-Punkt zu bestimmen. Dabei geht man so vor, dass zunächst ein zulässiger Startwert \mathbf{x}^0 samt zuge-

höriger Lagrange-Multiplikatoren λ^0 und μ^0 bestimmt wird. Dies kann z.B. mit einem ähnlichen Verfahren geschehen, wie es auch in der Phase I des Simplex-Algorithmus verwendet wird, vgl. Abschnitt 2.2.1. Die im 0. Iterationsschritt aktiven Ungleichheitsrestriktionen bilden die aktive Menge. Sollte der Startpunkt bereits ein KKT-Punkt sein, so hat man die Lösung gefunden. Ist dies nicht der Fall, beginnt die Iteration und im k -ten Schritt, ist das folgende lineare Gleichungssystem zu lösen, welches man durch Erweiterung von (2.29) um die aktiven Ungleichheitsnebenbedingungen erhält:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{B}_k^T & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{B}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \lambda_{B_k} \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f(\mathbf{x}^k) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Hierbei beschreibt die Matrix \mathbf{B}_k nur die im aktuellen Iterationsschritt k aktiven Ungleichheitsnebenbedingungen. Die zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren werden mit λ_{B_k} bezeichnet. Die Lagrange-Multiplikatoren der inaktiven Ungleichheitsnebenbedingungen λ_k werden zu null gesetzt. Bezüglich der Lösung von (2.30) unterscheidet man nun vier Fälle:

- I) Ist $\Delta \mathbf{x}^k = \mathbf{0}$ und $\lambda_{B_k} \geq \mathbf{0}$, so hat man einen KKT-Punkt des eigentlichen Problems, nämlich $(\mathbf{x}^k, \lambda^k, \mu^k)$, gefunden und die Iteration kann abgebrochen werden.
- II) Ist $\Delta \mathbf{x}^k = \mathbf{0}$ und der kleinste zu den aktiven Ungleichheitsnebenbedingungen gehörige Lagrange-Multiplikator λ_{B_k} kleiner als null, so bedeutet dies, dass noch kein KKT-Punkt erreicht ist, gleichzeitig aber der Zielfunktionswert bei Beibehaltung der aktuellen Restriktionen nicht weiter verringert werden kann. Deshalb wird die zum kleinsten Lagrange-Multiplikator gehörige Ungleichheitsnebenbedingung aus der aktiven Menge entfernt.
- III) Ist $\Delta \mathbf{x}^k \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k$ ein zulässiger Punkt, so bleibt die aktive Menge konstant und \mathbf{x}^{k+1} ergibt sich aus $\mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k$.
- IV) Ist $\Delta \mathbf{x}^k \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k$ ein unzulässiger Punkt, bedeutet dies, dass eine der bisher erfüllten Ungleichungen nun verletzt ist. Daher ist es notwendig, die Schrittweite $\Delta \mathbf{x}^k$ mittels eines noch zu bestimmenden Vorfaktors t_k zu verringern: $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + t_k \Delta \mathbf{x}^k$. Weiterhin wird die aktive Menge um die verletzte Nebenbedingung erweitert. Zur Bestimmung des Vorfaktors t_k und weiterer Details zur Strategie der aktiven Menge siehe z.B. [59], [130].

Die Strategie der aktiven Menge ist prinzipiell auch auf allgemeine nichtlineare Zielfunktionen übertragbar und führt bei praktischen Problemen in endlich vielen Schritten zu einer Lösung [59].

2.3.2 Strafverfahren (Äußere Strafverfahren)

Die Strafverfahren gehören zu den ältesten Methoden zur Lösung restringierter Optimierungsaufgaben der Form

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad \text{u.d.N.} \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}. \quad (2.31)$$

Die Grundidee besteht darin ein unrestringiertes Optimierungsproblem zu lösen, dessen Zielfunktion mit Straftermen beaufschlagt wird, sobald das zulässige Gebiet vom Optimierungsalgorithmus verlassen wird. Somit ist dann nicht mehr die eigentliche Zielfunktion zu minimieren, sondern eine Ersatzzielfunktion der Art

$$P(\mathbf{x}; \alpha) = f(\mathbf{x}) + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_i [\max\{0, g_i(\mathbf{x})\}]^2. \quad (2.32)$$

Hierbei ist α ein Parameter, über den gesteuert werden kann, wie stark die Verletzung der Restriktionen bestraft wird. Dabei wird meist so vorgegangen, dass der Strafparameter α im Laufe der Iterationen oder nach Abschluss eines Optimierungslaufes erhöht wird. Bei letzterem Vorgehen ist dann das Ergebnis eines Optimierungslaufes ein guter Startwert für einen weiteren Optimierungslauf mit erhöhtem Strafparameter. Bei den Ungleichheitsnebenbedingungen werden wegen $\max\{0, g_i(\mathbf{x})\}$ nur die verletzten Nebenbedingungen berücksichtigt. Der Einfluss des Strafparameters α soll anhand des einfachen Optimierungsproblems

$$\min_x x^2 \quad \text{u.d.N. } x-1=0 \quad (2.33)$$

verdeutlicht werden. Das Minimum dieser Aufgabe liegt im einzig zulässigen Punkt $x = 1$. In Abb. 2.6 ist die Ersatzzielfunktion für verschiedene Strafparameter dargestellt. Man erkennt deutlich, dass sich das Optimum der Ersatzzielfunktion $P(x; \alpha)$ mit größer werdendem α dem Optimum x^* des restringierten Optimierungsproblems nähert. Weiterhin wird ersichtlich, dass aufgrund der Bestrafung im unzulässigen Bereich das Optimum der Ersatzzielfunktion stets außerhalb des zulässigen Bereiches liegt, daher der Name „Äußeres Strafverfahren“.

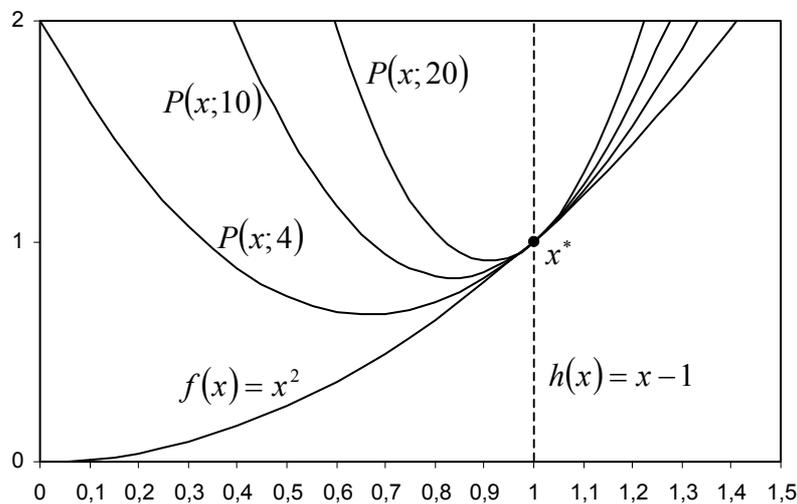


Abb. 2.6 Zielfunktion $f(x)$ und Ersatzzielfunktion $P(x; \alpha)$ für verschiedene Strafparameter

Die Tatsache, dass das Optimum der Ersatzzielfunktion und das Optimum des restringierten Problems für unendlich große α identisch sind, lässt sich auch formal beweisen (siehe z.B. [59]). In praktischen Anwendungen des Verfahrens ist natürlich eine iterative Erhöhung des Strafparameters bis ins Unendliche nicht möglich. Daher sollte als Abbruchkriterium für das Verfahren eine Formulierung der Form $\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\| \leq \varepsilon$ bzw. $\max\{g_i(\mathbf{x})\} \leq \varepsilon$ mit einem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ gewählt werden.

2.3.3 Barriere-Methoden (Innere Strafverfahren)

Auch mit den Barriere-Methoden lassen sich restringierte Optimierungsaufgaben der Form

$$\min_x f(\mathbf{x}) \quad \text{u.d.N.} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \quad (2.34)$$

lösen. Im Gegensatz zu den Strafverfahren liegen die Iterierten \mathbf{x}^k der Ersatzzielfunktion der Barriere-Methoden jedoch im Inneren des zulässigen Bereiches („Innere Strafverfahren“). Dies wird erreicht, indem zu der eigentlichen Zielfunktion ein Strafterm addiert wird, welcher verhindert, dass man sich dem unzulässigen Bereich nähert. Diese Strafterme können beispielsweise eine logarithmische Gestalt aufweisen:

$$B_{\log}(\mathbf{x}; \alpha) = f(\mathbf{x}) - \alpha \sum_i \ln(-g_i(\mathbf{x})) \quad (2.35)$$

oder aber aus dem Reziprokwert der Ungleichheitsnebenbedingung bestehen:

$$B_{\text{rez}}(\mathbf{x}; \alpha) = f(\mathbf{x}) - \alpha \sum_i \frac{1}{g_i(\mathbf{x})}. \quad (2.36)$$

Für ein gegen null gehendes α strebt die Ersatzzielfunktion (für einen ausreichend großen Abstand vom unzulässigen Bereich) gegen die eigentliche Zielfunktion.

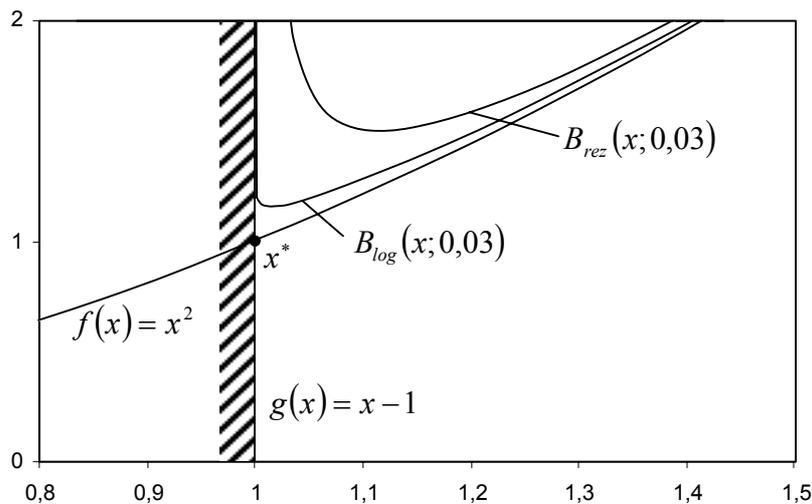


Abb. 2.7 Zielfunktion $f(x)$ und Barriere-Funktionen für $\alpha = 0,03$

Einer der Nachteile der Barriere-Methoden ist die Tatsache, dass eine Behandlung von Gleichheitsnebenbedingungen relativ schwierig ist, da diese nicht exakt erfüllt werden können. Somit müssen die Gleichheitsnebenbedingungen entweder unverändert bleiben (wobei dann ein Algorithmus zur Lösung der Ersatzzielfunktion genutzt werden muss, der Gleichheitsnebenbedingungen behandeln kann) oder in Form eines Strafterms eingeführt werden. Letzteres führt dann auf einen gemischten Straf-Barriere-Ansatz [49]. In Abb. 2.7 sind zur Veranschaulichung der Barriere-Methoden verschiedene Ersatzzielfunktionen für das Optimierungsproblem (2.33) zu sehen. Jedoch wurde in diesem Beispiel anstelle der Gleichheitsnebenbedingung die Ungleichheitsnebenbedingung $x \geq 1$ eingeführt.

2.3.4 SQP-Verfahren

SQP-Verfahren (SQP = **S**equential **Q**uadratic **P**rogramming) stellen eine sehr wichtige Klasse von Lösungsverfahren zur Lösung nichtlinearer Optimierungsaufgaben dar. Zentraler Bestandteil aller SQP-Verfahren ist ein Newton-Verfahren, welches zur Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems benötigt wird. Wendet man ein Newton-Verfahren zur Lösung der KKT-Bedingungen eines gleichheitsrestringierten Optimierungsproblems an, so wird dieses Vorgehen auch als Lagrange-Newton-Verfahren bezeichnet. Durch die Einführung einer NCP-Funktion (NCP = **N**onlinear **C**omplementary **P**roblem) lässt sich das Verfahren auf Optimierungsprobleme mit Gleichheits- und Ungleichheitsnebenbedingungen erweitern. Eine Analogie zu quadratischen Optimierungsproblemen mit linearen Nebenbedingungen führt dann zunächst zu einem lokalen SQP-Verfahren und schließlich zu den allgemeinen SQP-Verfahren.

2.3.4.1 Lagrange-Newton-Verfahren

Mit dem Lagrange-Newton-Verfahren können Optimierungsprobleme der Form

$$\min_x f(\mathbf{x}) \text{ u.d.N. } \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.37)$$

gelöst werden. Hierbei wird eine zweimal stetige Differenzierbarkeit der Zielfunktion und der Nebenbedingungen vorausgesetzt. Die KKT-Bedingungen können dann in einem nichtlinearen Gleichungssystem zusammengefasst werden:

$$\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = \begin{pmatrix} \nabla_x L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.38)$$

Ein Newton-Verfahren bestimmt nun gemäß der Vorschrift

$$(\mathbf{x}^{k+1}, \boldsymbol{\mu}^{k+1}) = (\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\mu}^k) - \Phi'(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\mu}^k)^{-1} \Phi(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\mu}^k) \quad (2.39)$$

solange die Iterierten bis die Abbruchbedingung $\Phi(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\mu}^k) = \mathbf{0}$ mit hinreichender Genauigkeit erfüllt ist. Dabei wird die Invertierung der Jacobi-Matrix $\Phi'(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\mu}^k)$ der KKT-Bedingungen natürlich nicht direkt ausgeführt. Vielmehr wird die Änderung der Iterierten durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\Phi'(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\mu}^k) \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \boldsymbol{\mu} \end{pmatrix} = -\Phi(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\mu}^k), \quad (2.40)$$

welches sich aus (2.39) ergibt, ermittelt, woraus sich dann gemäß

$$(\mathbf{x}^{k+1}, \boldsymbol{\mu}^{k+1}) = (\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\mu}^k) + (\Delta \mathbf{x}^k, \Delta \boldsymbol{\mu}^k) \quad (2.41)$$

die Iterierten des nächsten Schrittes errechnen.

Es lässt sich zeigen, dass das Verfahren gegen einen KKT-Punkt konvergiert, sofern die Jacobi-Matrix $\Phi'(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ im KKT-Punkt regulär ist. Dies ist erfüllt bei linear unabhängigen Gradienten der Gleichheitsnebenbedingungen im KKT-Punkt (Regularitätsbedingung der linearen Unabhängigkeit, siehe auch Abschnitt 2.1.4.3) und der positiven Definitheit der Hesse-Matrix

der Lagrange-Funktion (im Unterraum zulässiger Parametervariationen) im KKT-Punkt (siehe auch [59]).

Die Behandlung von Ungleichheitsnebenbedingungen gelingt mittels NCP-Funktionen. Betrachtet man die KKT-Bedingungen für ein allgemeines nichtlineares Optimierungsproblem, so lauten diese

$$\begin{aligned}\nabla_x L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0}, \\ g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \lambda_i \geq 0, \lambda_i g_i(\mathbf{x}) &= 0.\end{aligned}\tag{2.42}$$

Aufgrund der Ungleichungen in der letzten Zeile von (2.42) ist es nicht ohne Weiteres möglich, ein Newton-Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems zu verwenden. Durch Nutzung einer NCP-Funktion $\varphi(a, b)$, die die Eigenschaft

$$\varphi(a, b) = 0 \Leftrightarrow a \geq 0, b \geq 0, ab = 0\tag{2.43}$$

besitzt, lassen sich die KKT-Bedingungen in (2.42) umformulieren zu

$$\begin{aligned}\nabla_x L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0}, \\ \varphi(-g_i(\mathbf{x}), \lambda_i) &= \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{2.44}$$

Bekannte NCP-Funktion sind beispielsweise die Fischer-Burmeister-Funktion

$$\varphi(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} - a - b\tag{2.45}$$

oder die Minimum-Funktion

$$\varphi(a, b) = \min\{a, b\}.\tag{2.46}$$

Die KKT-Bedingungen (2.44) können nun als ein nichtlineares Gleichungssystem

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \begin{pmatrix} \nabla_x L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \varphi(-\mathbf{g}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\lambda}) \end{pmatrix} = \mathbf{0}\tag{2.47}$$

geschrieben werden, welches prinzipiell durch ein Newton-Verfahren gelöst werden kann. Allerdings sind die meisten NCP-Funktionen nicht überall differenzierbar. Da somit die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{\Phi}'(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\mu}^k)$ nicht überall existiert, wird sie durch eine geeignete Approximation ersetzt (siehe [59]).

2.3.4.2 Lokales SQP-Verfahren

Betrachtet man Gleichung (2.40) zur Bestimmung der Schrittweite im Newton-Verfahren zur Lösung des gleichheitsrestringierten Optimierungsproblems (2.37), so kann diese auch ausgeschrieben werden als

$$\begin{bmatrix} \nabla_{xx}^2 L(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\mu}^k) & \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \\ \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_x L(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\mu}^k) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \end{bmatrix}\tag{2.48}$$

bzw. nach Umformung mittels $\Delta\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^{k+1} - \boldsymbol{\mu}^k$ und $\nabla_x L(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\mu}^k) = \nabla f(\mathbf{x}^k) + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \boldsymbol{\mu}^k$ als

$$\begin{aligned} \nabla_{xx}^2 L(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\mu}^k) \Delta \mathbf{x} + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \boldsymbol{\mu}^{k+1} &= -\nabla f(\mathbf{x}^k) \\ \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x} &= -\mathbf{h}(\mathbf{x}^k). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Die Gleichungen (2.49) sind aber gerade die KKT-Bedingungen des quadratischen Optimierungsproblems

$$\min_{\Delta \mathbf{x}} \nabla f(\mathbf{x}^k)^T \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \nabla_{xx}^2 L(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\mu}^k) \Delta \mathbf{x} \quad \text{u.d.N.} \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \Delta \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.50)$$

mit in $\Delta \mathbf{x}$ linearen Restriktionen. Fügt man zu (2.50) noch linearisierte Ungleichheitsnebenbedingungen der Form

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^k) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \Delta \mathbf{x} \leq \mathbf{0} \quad (2.51)$$

hinzu, so können (2.50) und (2.51) genutzt werden, um die Iterierten $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}$ des allgemeinen Optimierungsproblems

$$\min_x f(\mathbf{x}) \quad \text{u.d.N.} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.52)$$

zu bestimmen. Die Lösung des quadratischen Optimierungsproblems (2.50) und (2.51) kann mit der in Abschnitt 2.3.1 beschriebenen Vorgehensweise erfolgen, woraus, wie erwähnt, die neuen Iterierten für das Lagrange-Newton-Verfahren gewonnen werden.

Die Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion $\nabla_{xx}^2 L(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\mu}^k)$ wird jedoch in den seltensten Fällen direkt verwendet, sondern in der Regel durch eine geeignete Approximation \mathbf{H}_k ersetzt, was die Effizienz des Verfahrens steigert und die zweiten Ableitungen überflüssig macht. Hierbei wird für \mathbf{H}_k eine Quasi-Newton-Approximation verwendet, welche beispielsweise durch die von Powell [141] modifizierte BFGS-Formel (**B**royden-**F**letcher-**G**oldfarb-**S**hanno-Formel [26], [52], [66], [160]) oder durch eine von Han [77] modifizierte DFP-Formel (**D**avidon-**F**letcher-**P**owell-Formel [38], [51]) erhalten werden kann (siehe hierzu [53]).

Ein SQP-Verfahren wird also so ablaufen, dass ausgehend von entsprechenden Startwerten für $\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{\mu}^0$ und \mathbf{H}_0 , $\Delta \mathbf{x}$ als Lösung des quadratischen, linear restringierten Teilproblems

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{x}} \nabla f(\mathbf{x}^k)^T \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{H}_k \Delta \mathbf{x} \\ \text{u.d.N.} \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \Delta \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \Delta \mathbf{x} \leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.53)$$

ermittelt wird, woraus sich dann gemäß $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}$ die neuen Iterierten des Lagrange-Newton-Verfahrens ergeben. Da in jedem Iterationsschritt ein quadratisches Optimierungsproblem (2.3.1) zu lösen ist, führt dies auf den Namen des Verfahrens (Sequential Quadratic Programming).

Das beschriebene Verfahren ist jedoch nur lokal konvergent, d.h. es ist nur sinnvoll einsetzbar in Gebieten mit positiv definiten Hesse-Matrix und einem wohldefinierten Minimum des quadratischen Teilproblems. Darüber hinaus können die vom Verfahren erzeugten Iterierten

im nicht zulässigen Bereich des Optimierungsproblems (2.52) liegen, da die Nebenbedingungen im quadratischen Teilproblem lineare Approximationen darstellen, wohingegen die Nebenbedingungen des eigentlichen Optimierungsproblems nichtlinear sein können. Um trotzdem zu einem global konvergenten Verfahren zu kommen, wird zusätzlich eine Schrittweitensteuerung für die Iterierten eingeführt, welche sich dann gemäß $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + t_k \Delta \mathbf{x}$ berechnen. Die Bestimmung der Schrittweite t_k , erfolgt oftmals mit Hilfe sogenannter Merit-Funktionen. Derartige Funktionen bewerten den neuen Iterationspunkt mit Blick auf die Zielfunktion aber auch hinsichtlich der Nebenbedingungen, um ein ausgewogenes Verhältnis zwischen einer Verbesserung des Zielfunktionswertes und möglicherweise gleichzeitigen Verletzung von Nebenbedingungen zu erzielen. Eine vielfach genutzte Merit-Funktion ist z.B. die ℓ_1 -Penalty-Funktion

$$P_1(\mathbf{x}; \alpha) = f(\mathbf{x}) + \alpha \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(\mathbf{x})\} + \alpha \sum_{j=1}^p |h_j(\mathbf{x})|. \quad (2.54)$$

Hierbei ist α eine zu wählende Konstante, welche die Verletzung der Nebenbedingungen im Vergleich zur Zielfunktion wichtet. Die Festlegung der Schrittweite t_k muss nun derart erfolgen, dass die neuen Iterierten einen ausreichenden Abstieg in der Merit-Funktion erzielen.

2.3.5 Methoden der zulässigen Richtungen

Der Grundgedanke der Methoden der zulässigen Richtungen besteht darin, sich von einem zulässigen Punkt des Optimierungsproblems zu einem weiteren zulässigen Punkt mit besserem (kleinerem) Zielfunktionswert zu „hangeln“, bis keine weitere Verbesserung mehr möglich ist. Die Iterierten ergeben sich dabei nach der Vorschrift

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + t_k \mathbf{d}^k. \quad (2.55)$$

Die verschiedenen Verfahren, welche zu den Methoden der zulässigen Richtungen gehören, unterscheiden sich in der Bestimmung der zulässigen Richtung \mathbf{d}^k und der Schrittweite t_k . Die Anforderungen an die zulässige Richtung sind dabei, dass bei einem genügend kleinen Schritt in diese Richtung keine Nebenbedingung verletzt wird und sich der Zielfunktionswert verkleinert. Die Wahl der Schrittweite muss garantieren, dass die neue Iterierte im zulässigen Bereich liegt.

Ein Verfahren, welches zur Klasse der Methoden der zulässigen Richtungen gehört, stammt von Zoutendijk [184]. Die Anforderungen an die zulässige Richtung werden durch das Lösen eines linearen Optimierungsproblems erfüllt. Geht man beispielhaft von einem ungleichungsrestringierten Optimierungsproblem aus, so lautet das Optimierungsproblem zur Festlegung der Suchrichtung

$$\min_{\delta, \mathbf{d}^k} \delta \quad (2.56)$$

$$\nabla f(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}^k - \delta \leq 0 \quad (2.57)$$

$$\nabla g(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}^k - \delta \leq 0 \quad (2.58)$$

$$\|\mathbf{d}^k\| - 1 \leq 0. \quad (2.59)$$

Hierbei stellen $\delta \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{d}^k \in \mathbb{R}^n$ die Optimierungsvariablen dar. In die Nebenbedingung (2.58) gehen nur die aktiven Ungleichheitsnebenbedingungen ein. Durch Einführung der Variablen δ wird sichergestellt, dass die gefundene Suchrichtung nicht einfach in Richtung des steilsten Abstieges (2.57), sondern gleichzeitig auch in eine Richtung des zulässigen Bereiches weist, die möglichst weit weg von den aktiven Restriktionen liegt (2.58). Die Nebenbedingung (2.59) führt dazu, dass die Zielfunktion (2.56) nicht gegen $-\infty$ gehen kann und sichert die Lösbarkeit der Aufgabe.

Hat man das Optimierungsproblem gelöst (beispielsweise durch eines der in Abschnitt 2.2 beschriebenen Verfahren), so kann durch einen geeigneten Algorithmus zur Liniensuche (siehe z.B. [22], [144]) die Schrittweite bestimmt werden. Da die Algorithmen zur Liniensuche keine Nebenbedingungen berücksichtigen, kann es passieren, dass die neue Iterierte durch eine zu große Schrittweite außerhalb des zulässigen Bereiches liegt. In einem solchen Fall muss dann die Schrittweite wieder reduziert werden.

Sollte für ein Verfahren der zulässigen Richtungen kein Startpunkt bekannt sein, der alle Nebenbedingungen erfüllt, so wird in [72] eine Methode beschrieben, die auch dieses Problem meistert.

2.4 Antwortflächenverfahren (Response Surface Methods)

Response-Surface-Methoden (RSM) nähern das Verhalten der Zielfunktion und/oder der Nebenbedingungen durch eine Ersatzfunktion an. Ist die Antwortfläche durch die Berechnung von einer genügend großen Anzahl von Stützstellen aufgebaut, so können beliebige Optimierungen oder Robustheitsuntersuchungen auf der generierten Antwortfläche in sehr kurzer Zeit durchgeführt werden, da keine weiteren Funktionsauswertungen des eigentlichen Problems (z.B. FE-Rechnungen) mehr nötig sind. Die Ergebnisse der Berechnungen auf der Antwortfläche sind letztendlich aber nur Näherungen des wirklichen Verhaltens. Um beliebig genaue Näherungen zu erhalten, nutzt man die sogenannte „Adaptive Response-Surface-Methode“ (ARSM). Verwendet man für die ARSM Polynome zweiter Ordnung, so haben diese beispielsweise die Form

$$\tilde{\Psi}_i(\mathbf{x}) = a_{i0} + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ijk} x_j x_k . \quad (2.60)$$

Hierbei sind a_{i0} , a_{ij} und a_{ijk} die Regressionskoeffizienten des Polynoms, die z.B. durch eine Minimierung der Fehlerquadrate bestimmt werden. Die Optimierungsvariablen werden durch x_j und x_k beschrieben. Der Index i läuft über alle Nebenbedingungen plus der Zielfunktion, n gibt die Anzahl der Optimierungsvariablen an.

Das genaue Vorgehen bei der ARSM soll nun mit Hilfe der Abb. 2.8 und einer Zielfunktion $\Psi(x)$, die lediglich von der skalaren Optimierungsvariablen x abhängt, verdeutlicht werden. Im ersten Iterationsschritt wird zunächst der Zielfunktionswert für den Startwert $x^{(0)}$ ermittelt. Zusätzlich werden auch die Zielfunktionswerte für $n = 1$ leicht von x abweichende Stellen (gestörte Startwerte) bestimmt (hier Punkt $x^{(1)}$). Nun können die Koeffizienten a_{i0} und

a_{i1} der linearen Antwortfläche (RS 1) berechnet werden. Eine Minimierung auf dieser ersten Antwortfläche führt auf $x^{(2)}$. Nach Berechnung des Zielfunktionswertes am Punkt $x^{(2)}$ stehen genügend Daten zur Verfügung, um auch den Polynomkoeffizienten a_{i11} für den quadratischen Term in (2.60) zu bestimmen und eine quadratische Antwortfläche (RS 2) zu generieren. Eine Minimierung auf dieser Antwortfläche führt auf $x^{(3)}$, zu dem ebenfalls der exakte Zielfunktionswert berechnet wird. Mit dem nun um eine Stützstelle erweiterten Datensatz wird durch ein Regressionsverfahren unter Wichtung der einzelnen Stützstellen [175] eine verbesserte quadratische Antwortfläche (RS 4) berechnet, auf der ebenfalls wieder eine Minimierung stattfindet, was zu Punkt $x^{(4)}$ führt u.s.w.. Die Iteration bricht bei Erfüllung entsprechender Konvergenzkriterien (z.B. Abstand des Minimums der Antwortfläche zu Zielfunktionswert kleiner ε) ab.

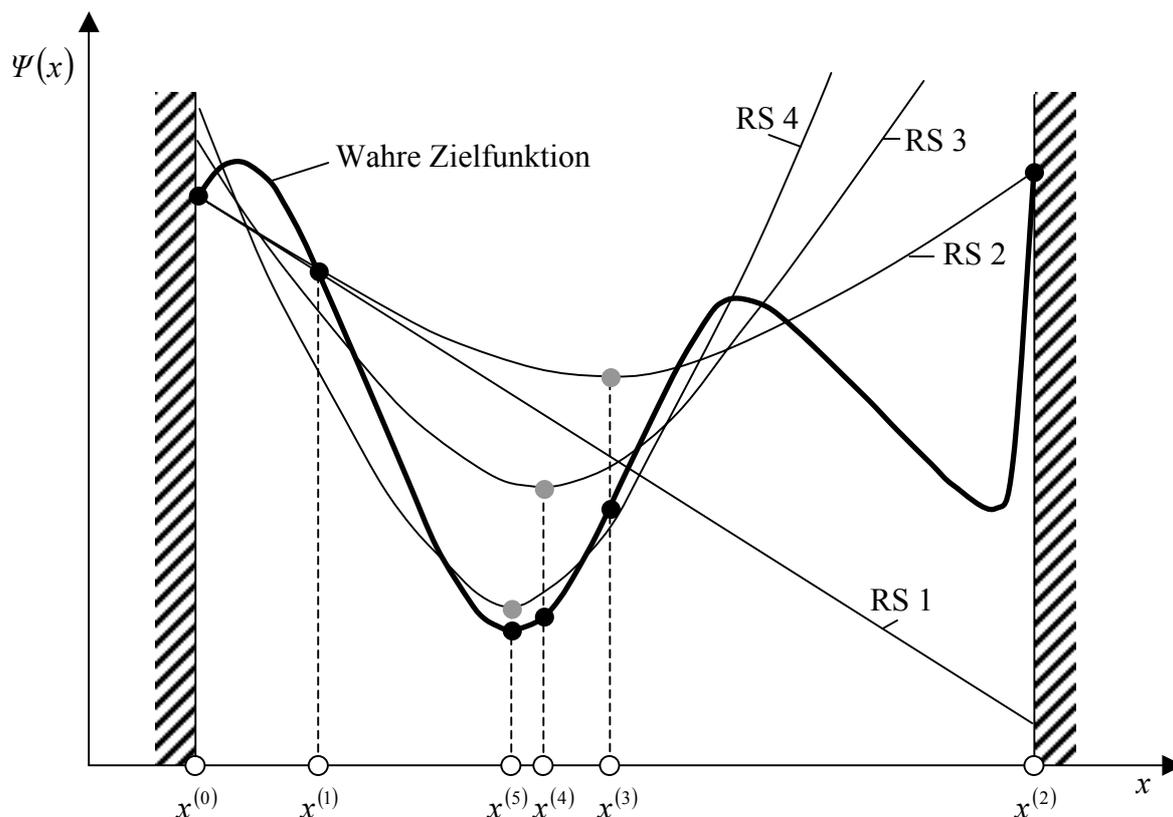


Abb. 2.8 Beispiel für Ablauf einer Optimierung mit der Adaptive Response-Surface-Methode bei einer Optimierungsvariablen x (nach [131])

Response-Surface-Methoden sind bei praktischem Einsatz nur bei einer relativ geringen Anzahl an Optimierungsvariablen (weniger als 20) anwendbar [74], besitzen aber Vorteile bei stark oszillierenden Ziel- oder Nebenbedingungsfunktionen.

2.5 Diskrete Optimierung

Bei vielen praktischen Anwendungen der Optimierung kommt es vor, dass bestimmte Optimierungsparameter nicht kontinuierlich variiert werden können, sondern nur als diskrete Werte zur Verfügung stehen. Beispielsweise kann sich die Anzahl von Maschinen in einer Pro-

duktionshalle nur im Bereich der natürlichen Zahlen bewegen. Selbiges gilt auch für eine zu optimierende Anzahl von Personen, die in einer Produktion eingesetzt werden. Viele Halbzeuge sind ebenfalls nur in vorgegebenen Abmessungen oder Variationen verfügbar. Diese Besonderheiten müssen natürlich vom Optimierungsalgorithmus berücksichtigt werden. Die einfachste Variante zur Erzielung diskreter Optimierungsergebnisse wäre die Durchführung einer kontinuierlichen Optimierung mit anschließendem Auf- oder Abrunden auf die vorgegebenen diskreten Werte. Dies kann aber zu nichtoptimalen Zielfunktionswerten oder einer Verletzung der Nebenbedingungen führen, wird in der Praxis jedoch trotzdem oftmals so durchgeführt. Eine Möglichkeit zur exakten Lösung diskreter Optimierungsprobleme wäre, alle möglichen Kombinationen der diskreten Optimierungsvariablen zu untersuchen, und die Kombination mit dem niedrigsten Zielfunktionswert, die alle Nebenbedingungen erfüllt, als Lösung des Optimierungsproblems zu übernehmen. Dieses Vorgehen scheitert jedoch sehr schnell bei einer größer werdenden Anzahl an Optimierungsvariablen an der stark steigenden Rechenzeit (z.B. führten 8 diskrete Optimierungsvariablen, die jeweils 5 diskrete Werte annehmen können, auf $5^8 = 390625$ Funktionsauswertungen).

Ein Sonderfall der diskreten Optimierung ist die ganzzahlige Optimierung, welche insbesondere in der Wirtschaftsmathematik eine große Bedeutung hat. Nach [144] lassen sich diskrete bzw. ganzzahlige Optimierungsprobleme wie in Abb. 2.9 angegeben unterteilen.

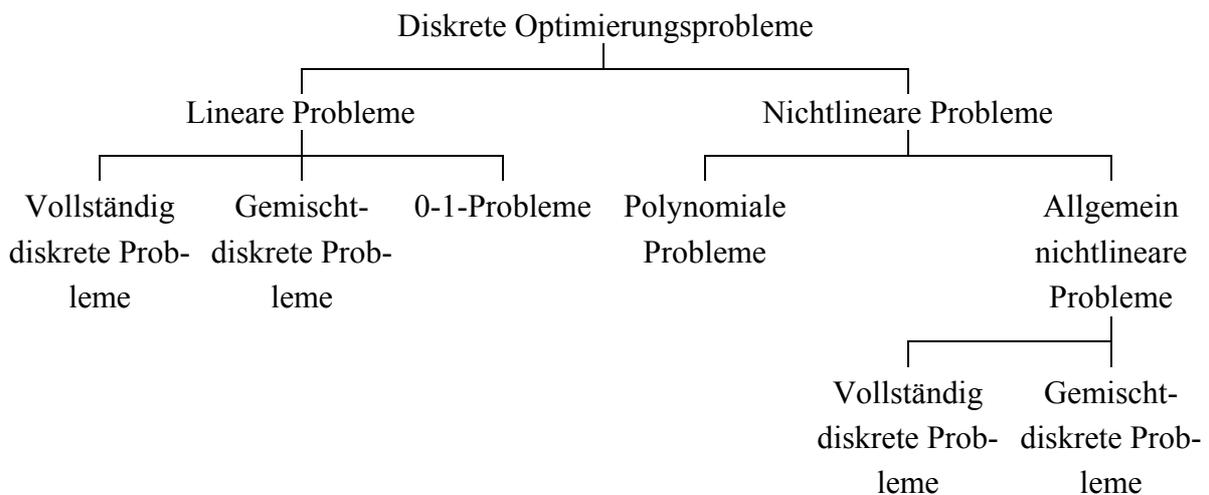


Abb. 2.9 Unterteilung diskreter Optimierungsprobleme (nach [144])

Vollständig diskrete Optimierungsproblemen beinhalten nur diskrete Optimierungsvariablen, wohingegen bei gemischt-diskreten Problemen auch Optimierungsvariablen zulässig sind, die kontinuierlich variiert werden dürfen. Bei 0-1-Problemen sind für die Optimierungsvariablen nur die diskreten Werte 0 und 1 erlaubt.

Im Folgenden sollen die Grundideen einiger wichtiger diskreter bzw. ganzzahliger Optimierungsverfahren kurz erläutert werden. Über die hier beschriebenen deterministischen Verfahren hinaus existieren auch eine Reihe von heuristischen Verfahren, wie z.B. Genetische Algorithmen, Simulated Annealing [95] oder die Tabu-Suche ([64], [65]).

2.5.1 Gomorys Schnittebenenverfahren

Aus historischer Sicht wurden zunächst ganzzahlige Optimierungsalgorithmen für lineare Problemstellungen entwickelt. Ein bekanntes und verbreitetes Verfahren zur Lösung derartiger Probleme ist das Schnittebenenverfahren nach Gomory ([68], [69]). Die Vorgehensweise bei dieser Methode ist, durch das Hinzufügen von geeigneten weiteren Ungleichheitsnebenbedingungen den zulässigen Bereich des Optimierungsproblems derart einzuschränken, dass das Optimum einen ganzzahligen Wert annimmt, was anhand eines Beispiels mit zwei Optimierungsvariablen x_1 und x_2 in Abb. 2.10 dargestellt ist. Der durch die ursprünglichen Nebenbedingungen definierte zulässige Bereich ABCD führt auf ein Optimum am Punkt C, welches jedoch nicht zulässig ist, da die Optimierungsvariablen an diesem Punkt keine ganzzahligen Werte annehmen. Zulässig, im Sinne der ganzzahligen Optimierung, sind nur die durch kleine Kreise markierten Punkte. Durch Gomorys Schnittebenenverfahren werden geeignete zusätzliche Nebenbedingungen eingeführt, durch die der zulässige Bereich so verkleinert wird, dass sich an wenigstens einem Eckpunkt des neu entstandenen Polyeders (AEFG) ganzzahlige Wertepaarkombinationen befinden und keine zulässige ganzzahlige Lösung ausgeschlossen wird. Ein erneuter Optimierungslauf wird nun mit einer ganzzahligen Optimallösung im Punkt F enden. Das beschriebene Verfahren für gemischt-ganzzahlige Optimierungsaufgaben lässt sich auch auf gemischt-diskrete Problemstellungen erweitern [34].

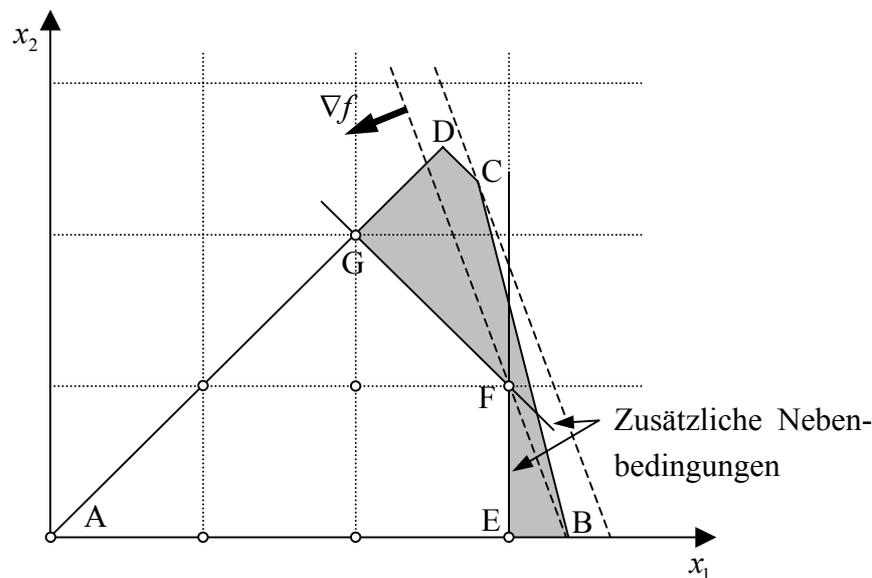


Abb. 2.10 Schnittebenenverfahren nach Gomory (nach [36])

2.5.2 Branch-and-Bound-Methode

Ein Verfahren zur diskreten Optimierung, welches ebenfalls sowohl diskrete als auch kontinuierliche Variablen behandeln kann, ist die Branch-and-Bound-Methode. Das Vorgehen gliedert sich dabei in mehrere Teilschritte. Zunächst wird die Bedingung, dass bestimmte Variablen nur diskrete Werte annehmen dürfen, ignoriert und ein kontinuierliches Optimierungsproblem gelöst. Sollte das Optimierungsergebnis zufällig bereits auf diskrete Werte fallen, so

hat man bereits die Lösung gefunden. Im Allgemeinen wird dies jedoch nicht der Fall sein und der gefundene Wert einer Optimierungsvariablen x_i liegt zwischen zwei benachbarten diskreten Werten $\langle x_i^- \rangle$ und $\langle x_i^+ \rangle$:

$$\langle x_i^- \rangle < x_i < \langle x_i^+ \rangle. \quad (2.61)$$

In einem nächsten Schritt werden nun aus dem kontinuierlichen Optimierungsproblem zwei neue Optimierungsprobleme formuliert. Das erste Optimierungsproblem ergibt sich durch zusätzliche Einführung der Nebenbedingung $x_i \leq \langle x_i^- \rangle$, das zweite durch Einführung der Nebenbedingung $x_i \geq \langle x_i^+ \rangle$ für eine Variable. Auf diese Weise verzweigt sich das ursprüngliche Problem in zwei neue, was auf die Bezeichnung „Branching“ führt. Auch diese Optimierungsprobleme müssen gelöst werden. Enthält die gefundene Lösung nicht die vorgegebenen diskreten Werte für die Optimierungsvariablen, so erfolgt eine weitere Verzweigung durch Einführung weiterer Nebenbedingungen für eine andere Variable. Folglich baut sich eine Baumstruktur aus Knoten und Ästen auf. Dieser Prozess wird solange fortgesetzt, bis eine vollständig diskrete Lösung gefunden ist. Der Zielfunktionswert dieser Lösung kann jetzt als obere Grenze für das Minimum des ursprünglichen diskreten Optimierungsproblems angesehen werden und alle kontinuierlichen Optimierungsprobleme, deren Zielfunktionswerte größer als die ermittelte obere Grenze ist, können aus dem Baum samt ihrer nachfolgenden Knoten entfernt werden und bedürfen keiner weiteren Betrachtung. Es kann also ein Knoten (also ein kontinuierliches Optimierungsproblem des Baumes) und alle nachfolgenden Äste und Knoten entfernt werden, wenn das kontinuierliche Optimierungsproblem des Knotens keine zulässige Lösung besitzt oder der Zielfunktionswert der Lösung höher ist als die gegenwärtige obere Grenze. Sollte eines der verbliebenen Optimierungsprobleme eine zulässige diskrete Lösung mit einem niedrigeren Zielfunktionswert als der gegenwärtigen oberen Grenze liefern, so ergibt sich eine neue obere Grenze.

Das Verfahren wird solange weitergeführt bis nur noch Optimierungsprobleme mit diskreten Lösungen verbleiben. Die Lösung mit dem niedrigsten Zielfunktionswert bildet dann die Lösung des ursprünglichen diskreten Problems. Veranschaulichte Beispiele für diese Methode finden sich z.B. in [144].

2.5.3 0-1-Optimierungsverfahren

Die Grundidee zur Lösung von 0-1-Problemstellungen, welche größere Bedeutung für logistische Fragestellungen haben, ist es, die Anzahl der 2^n möglichen Kombinationen der n Optimierungsvariablen durch den Ausschluss bestimmter Kombinationen stark zu reduzieren ([8], [9]). Das Verfahren kann z.B. starten, indem alle Optimierungsvariablen auf 0 gesetzt werden, um dann schrittweise einzelne Variablen auf 1 zu setzen. Nachdem eine Variable verändert wurde, dem Lösungsbaum also ein neuer Ast hinzugefügt wurde, wird durch verschiedene Tests ermittelt, ob es lohnenswert ist, den neu entstandenen Ast weiter zu untersuchen. Diese Tests beziehen sich dabei beispielsweise auf die Erfüllbarkeit der Restriktionen, wenn die noch nicht festgelegten Variablen möglichst günstig gewählt werden, oder auch den zu erwartenden Zielfunktionswert bei günstiger Wahl der noch nicht festgelegten Variablen. Ist der zu erwartende bestmögliche Zielfunktionswert des Astes schlechter als der bisher ermittelte beste

Zielfunktionswert, oder ist es absehbar, dass eine Restriktion nicht eingehalten werden kann, so kann der entsprechende Ast verworfen werden und braucht nicht weiter untersucht zu werden.

Dieses Vorgehen soll anhand des Optimierungsproblems

$$\begin{aligned} \min_x & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{u.d.N.} & 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 \leq -5 \\ & x_i \in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (2.62)$$

kurz veranschaulicht werden. Im nullten Knoten des Entscheidungsbaumes können alle Variablen jeden zulässigen Wert annehmen und der aktuelle Zielfunktionswert wird auf $+\infty$ gesetzt. Die ersten beiden Äste des Baumes ergeben sich für die Variable x_3 , welche die Werte 0 und 1 annehmen kann. Untersucht man nun diese beiden Unterprobleme, so stellt man fest, dass der Ast für $x_3 = 1$ verworfen werden kann, da auch die hinsichtlich der Erfüllung der Nebenbedingung günstigste verbleibende Variablenkombination $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ die Nebenbedingung verletzt. Bei dem Ast für $x_3 = 0$ lohnt sich eine weitere Verzweigung mit den Ästen $x_2 = 0$ und $x_2 = 1$, wobei der Ertere von beiden wieder verworfen werden kann, da für jede Wahl von x_1 die Nebenbedingung nicht erfüllbar ist. Der Ast $x_2 = 1$ kann sich dann wieder in die Äste $x_1 = 0$ und $x_1 = 1$ verzweigen, wovon nur die Lösung $x_1 = 0$ die Nebenbedingung erfüllt. Die Variablenkombination $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 0$ verbleibt somit als zulässige Lösung (siehe auch Abb. 2.11). Der zugehörige Zielfunktionswert von $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ ist kleiner als der bisher beste Zielfunktionswert $+\infty$ und verbleibt als Zielfunktionswert für die Optimallösung.

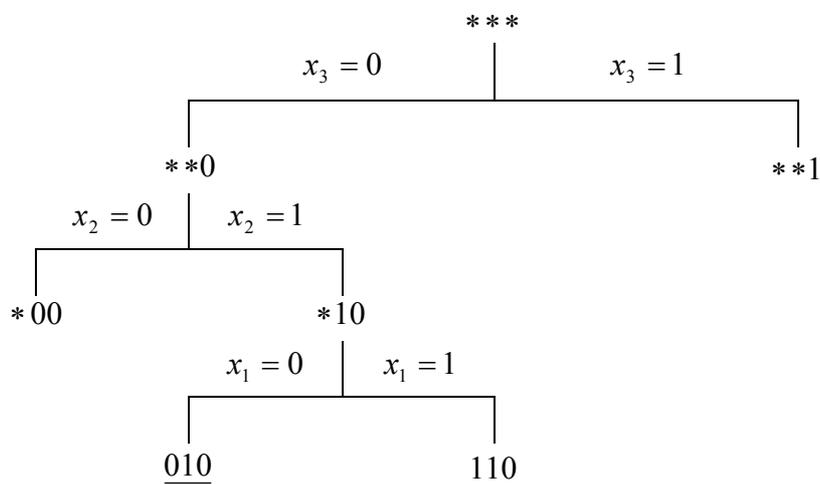


Abb. 2.11 Ablauf eines 0-1-Optimierungsalgorithmus

Die verschiedenen Verfahren zur 0-1-Optimierung unterscheiden sich im Wesentlichen in der Art und Weise sowie Effizienz der Tests, welche für die Äste durchgeführt werden. Ursprünglich wurde das beschriebene Verfahren zur Lösung linearer 0-1-Optimierungsprobleme entwickelt, kann jedoch auch auf gemischt-ganzzahlige Problemstellungen erweitert werden [9], was z.B. mit Hilfe der binären Kodierung möglich ist. Auf diese Weise ist auch eine Erweiterung auf polynomiale Optimierungsaufgaben möglich.

2.5.4 Sequentielle lineare diskrete Programmierung

Nichtlineare gemischt-diskrete Optimierungsprobleme mit n Optimierungsvariablen, von denen n_0 Optimierungsvariablen diskret und $n - n_0$ Optimierungsvariablen kontinuierlich sind, werden bei diesem Verfahren durch das Bearbeiten einer Reihe von linearen gemischt-ganzzahligen Problemstellungen gelöst [132]. Hierfür werden die Zielfunktion und die Nebenbedingungen um einen Punkt \mathbf{x}^0 mit Hilfe von Taylor-Reihen, welche nach dem linearen Glied abgebrochen werden, linearisiert:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \text{ mit } f(\mathbf{x}) &\approx f(\mathbf{x}^0) + \nabla f(\mathbf{x}^0)^T \Delta \mathbf{x} \\ \text{u.d.N. } \mathbf{g}(\mathbf{x}) &\approx \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^0)^T \Delta \mathbf{x} \leq 0 \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) &\approx \mathbf{h}(\mathbf{x}^0) + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^0)^T \Delta \mathbf{x} = 0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

Um die daraus resultierende Problemstellung mit einem linearen, ganzzahligen Optimierungsverfahren lösen zu können, ist es noch notwendig die diskreten Designvariablen x_i , welche die diskreten Werte d_{i1} bis d_{iq} annehmen dürfen, wie folgt darzustellen:

$$\begin{aligned} x_i &= y_{i1}d_{i1} + y_{i2}d_{i2} + \dots + y_{iq}d_{iq} \\ \text{mit } y_{i1} + y_{i2} + \dots + y_{iq} &= 1 \\ y_{ij} &\in \{0, 1\}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Durch (2.64) wird das gemischt-diskrete Optimierungsproblem in ein gemischt-ganzzahliges Problem überführt. Somit erhält man durch Einsetzen von (2.64) in (2.63) (hier nur beispielhaft für die Zielfunktion durchgeführt, Nebenbedingungen analog):

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}_j} f(\mathbf{x}) \text{ mit } f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}^0) + \sum_{i=1}^{n_0} \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^q y_{ij} d_{ij} - x_i^0 \right) + \sum_{i=n_0+1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - x_i^0). \quad (2.65)$$

In der Summe über $i = 1$ bis n_0 werden alle diskreten Designvariablen und in der Summe über $i = n_0 + 1$ bis n alle kontinuierlichen Designvariablen behandelt. Problem (2.65) kann nun zuzüglich der entsprechend linearisierten Nebenbedingungen als lineare, gemischt-ganzzahlige Optimierungsaufgabe mit den hierfür existierenden Methoden gelöst werden, wobei y_{ij} und x_i die Unbekannten sind. Am Lösungspunkt dieses linearen Problems kann dann eine erneute Linearisierung erfolgen usw..

2.5.5 Diskrete Optimierung mit Hilfe von Antwortflächenverfahren

Wird eine Optimierung mit einem Antwortflächenverfahren durchgeführt (siehe z.B. Abschnitt 2.4), so kann die diskrete Optimierung auf dieser Antwortfläche sehr einfach durch eine Untersuchung aller möglichen Kombinationen der diskreten Designvariablen erfolgen, da hierfür keine Funktionsauswertungen des eigentlichen Problems (z.B. eine FE-Rechnung), sondern nur Funktionsauswertungen des Antwortflächenpolynoms notwendig sind. Bei sehr vielen Designvariablen kann die hierfür benötigte Zeit jedoch auch zu hoch sein. In einem solchen Falle existieren weitere mögliche Vorgehensweisen. Denkbar wäre z.B. eine kontinuierliche Optimierung auf der Antwortfläche mit anschließendem Runden der ermittelten opti-

malen Designvariablen auf diskrete Werte. Ein effizienterer und vielversprechenderer Ansatz wird in [7] beschrieben. Dabei wird zunächst ebenfalls eine kontinuierliche Optimierung auf einer Antwortfläche durchgeführt. Um zu entscheiden, ob eine Designvariable zum nächstgelegenen diskreten Wert auf- oder abgerundet wird, ist das Verfahren wie folgt. Eine Designvariable wird zunächst auf den nächstgelegenen diskreten Wert abgerundet, während alle anderen Designvariablen ihre kontinuierlichen Werte behalten. Der Zielfunktionswert und die Werte der Nebenbedingungen werden dann mit Hilfe der entsprechenden Antwortflächen berechnet. Dieselbe Designvariable wird anschließend aufgerundet und ebenfalls die Zielfunktions- und Nebenbedingungswerte durch die Antwortflächen bestimmt. Die Zielfunktions- und Nebenbedingungswerte dieser beiden Rechnungen werden nun verglichen, um zu entscheiden, ob die entsprechende Designvariable auf- oder abgerundet werden sollte. Dieses Vorgehen kann für jede Designvariable wiederholt werden, womit man letztendlich für jede Variable eine Aussage zum Ab- oder Aufrunden erhält.

3 Verfahren der Strukturoptimierung

Klassischerweise unterscheidet man in der Strukturoptimierung die drei Disziplinen Topologie-, Gestalt- und Parameteroptimierung. In neuerer Zeit werden als weitere Disziplinen auch noch die Topographie- (Sicken-) und Free-Size-Optimierung unterschieden. Die Unterschiede der drei klassischen Strukturoptimierungsverfahren (Topologie-, Gestalt- und Parameteroptimierung) lassen sich anschaulich anhand des in Abb. 3.1 dargestellten Optimierungsproblems eines Brückenträgers erläutern. In der Topologieoptimierung wird das grundsätzliche Aussehen der Struktur (im Beispiel Anordnung und Anzahl der Fachwerkstäbe) bestimmt. Ist dieser prinzipielle Aufbau festgelegt, so kann mittels der Gestaltoptimierung die Form der Brücke durch das Verschieben einzelner Knoten optimiert werden. Die Parameteroptimierung übernimmt die Aufgabe der Dimensionierung der einzelnen Elemente, hier der Fachwerksstäbe, und damit deren Querschnittsflächen.

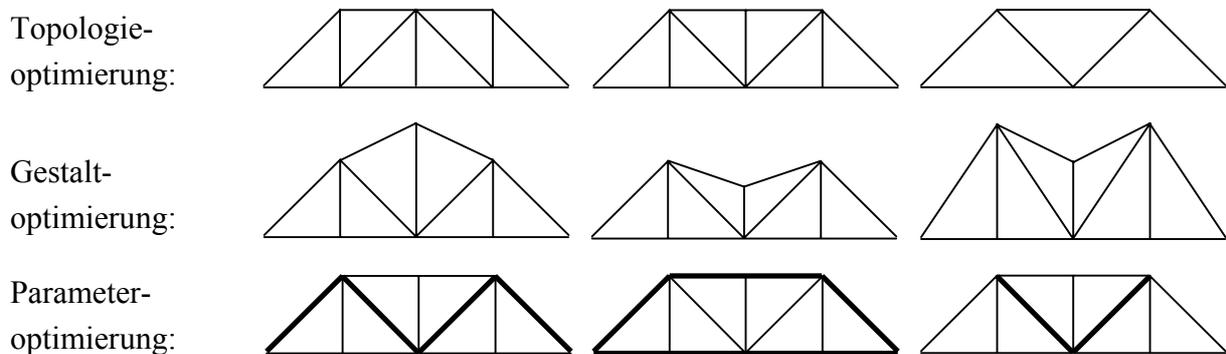


Abb. 3.1 Unterschiede der klassischen Strukturoptimierungsverfahren am Beispiel eines Brückenträgers

Es sei noch erwähnt, dass in der Strukturoptimierung üblicherweise nicht, wie in der Mathematik, von „Optimierungsvariablen“, sondern von „Entwurfs- oder Designvariablen“ gesprochen wird. Im Folgenden wird daher nun ebenfalls die Bezeichnung „Designvariablen“ gebraucht.

In den weiteren Abschnitten werden die einzelnen Strukturoptimierungsdisziplinen mit ihren jeweiligen Besonderheiten etwas ausführlicher betrachtet. Dabei werden auch die verschiedenen Algorithmen beleuchtet, die schließlich zum Optimum führen sollen. Grundsätzlich gibt es aus algorithmischer Sicht zwei verschiedene Herangehensweisen. Zum Einen gibt es Verfahren, die sich der Methoden der Mathematischen Programmierung/Optimierung bedienen (siehe Kapitel 2), zum Anderen existieren die sogenannten ESO-Methoden (ESO = **E**volutionary **S**tructural **O**ptimization) und die verwandten OC-Methoden (OC = **O**ptimality **C**riteria, Optimalitätskriterienverfahren). Letztere basieren auf Ideen über die Eigenschaften einer optimalen Struktur und schränken das Optimierungsproblem in Bezug auf die Definition von Zielfunktion und Nebenbedingungen etwas ein, erreichen aber für gewisse Spezialprobleme eine große Effizienz. Da sich die ESO- und OC-Methoden für die ein-

zelenen Strukturoptimierungsdisziplinen (Topologie-, Gestalt-, Parameter- und Sickenoptimierung) unterscheiden, werden sie hier nicht in einem extra Kapitel, sondern als Abschnitte der jeweiligen Strukturoptimierungsdisziplin erläutert. In Kapitel 7 erfolgt schließlich ein direkter Vergleich der Algorithmen, sowohl anhand von akademischen Optimierungsproblemen als auch von realen Bauteiloptimierungen.

3.1 Parameteroptimierung

Wie schon in Abschnitt 1.2 angedeutet, handelt es sich bei der Parameteroptimierung um die älteste Disziplin der Strukturoptimierung. Prinzipiell kann jedes parametrisierbare Bauteil oder Struktur oder ein Bereich eines Bauteils oder einer Struktur auf diese Weise optimiert werden. Die Anwendungsbereiche sind dabei äußerst vielfältig und reichen von geometrischen Abmaßen bis zu einstellbaren Materialparametern, beispielsweise den Faserorientierungen bei faserverstärkten Kunststoffen. In Verbindung mit der FEM ist eine Anwendung besonders dann sehr einfach möglich, wenn es sich bei den Bauteilparametern um Querschnittsabmessungen oder Querschnittsflächen von Balkenelementen, Schalendicken oder eben Materialparametern handelt, für deren Variation keine Veränderung des FE-Netzes nötig ist.

Besonderes Augenmerk sollte bei der Definition einer Parameteroptimierungsaufgabe der korrekten Angabe der Nebenbedingungen gelten, da hiervon ganz erheblich die Brauchbarkeit des Optimierungsergebnisses abhängt. Beispielsweise müssen Nebenbedingungen bezüglich der in Abb. 3.2 (rechts) angegebenen Querschnittsparameter so definiert werden, dass sich Ober- und Untergurt des Profils nicht durchdringen.

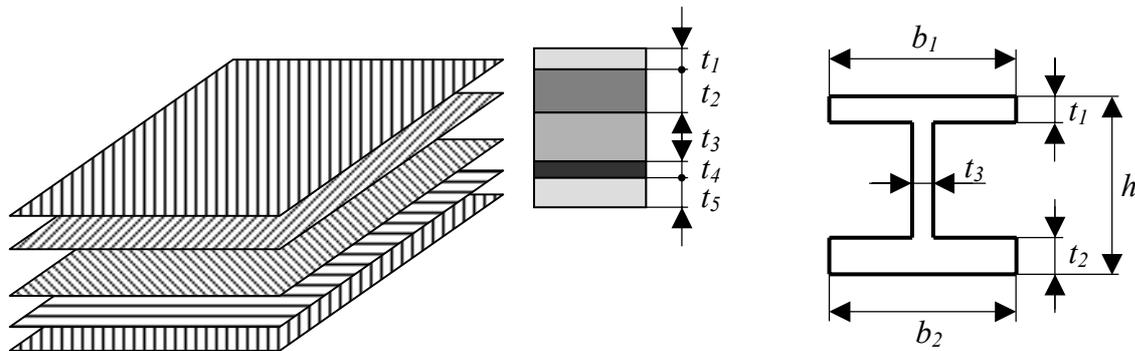


Abb. 3.2 Schichtdicken und Faserorientierungen als Parameter einer Faserverbundstruktur (links) und Querschnittsabmessungen eines Balkens (rechts)

3.2 Gestaltoptimierung

Die Aufgabe der Gestalt- oder Formoptimierung ist es, die äußere Kontur eines Bauteils so zu verändern, dass seine Eigenschaften hinsichtlich eines gewählten Kriteriums optimal werden. In den meisten praktischen Anwendungsfällen wird die Gestaltoptimierung zum Abbau von Spannungsspitzen in bestimmten Bereichen des Bauteils eingesetzt. Grundsätzlich ist aber

auch, in Abhängigkeit des gewählten Optimierungsverfahrens, jede beliebige andere Zielfunktion für die Gestaltoptimierung nutzbar. Da nur für die wenigsten realen Bauteile analytische Lösungen in Bezug auf ihr Strukturverhalten abgeleitet werden können, bietet sich für die Gestaltoptimierung die Nutzung der FEM an.

Zur Bestimmung einer optimalen Bauteilkontur existieren im Wesentlichen zwei verschiedene Verfahrensgruppen [122]. Parameterbasierte Gestaltoptimierungsverfahren beschreiben die Bauteiloberfläche mit vom Optimierungsalgorithmus veränderbaren Parametern, wie z.B. Radien oder Spline-Funktionen. Demgegenüber stehen die parameterfreien Verfahren, die als Designvariablen direkt die äußeren Knotenkoordinaten der finiten Elemente nutzen.

3.2.1 Parameterbasierte Gestaltoptimierungsverfahren

Parameterbasierte Gestaltoptimierungsverfahren bedienen sich oftmals der in einem CAD-System (CAD = Computer-Aided Design) bereits vorhandenen parametrisierten Bauteilbeschreibung, welche durch einen Optimierungsalgorithmus entsprechend verändert wird. Dadurch ist jedoch nach jeder Iteration eine Neuvernetzung des Bauteils erforderlich, was wiederum sehr leistungsfähige und robuste Vernetzungsalgorithmen verlangt, welche in der Lage sind, auch komplizierteste Geometrien mit der erforderlichen Genauigkeit zu diskretisieren. Dies ist besonders bei räumlichen Strukturen nur mit Tetraederelementen möglich und birgt die bekannten Probleme (Stichwort „Locking“) in sich (siehe z.B. [102], [24]).

Aus diesem Grunde kam es zur Entwicklung verschiedener Strategien, die eine Neuvernetzung umgehen bzw. vereinfachen. Eine Möglichkeit ist die Nutzung sogenannter Design-Elemente, die ein Art geometrisches Superelement darstellen. Design-Elemente sind abgewandelte, einfache geometrische Grundformen (z.B. leicht verzerrte Quader mit krummlinigen Kanten), die strukturiert vernetzt werden können. Das gesamte Bauteil, bzw. der zu optimierende Bereich, ist aus derartigen Designelementen aufgebaut, deren Form sich im Laufe der Optimierung verändert. Aufgrund ihrer einfachen geometrischen Grundform ist jedoch immer wieder eine strukturierte Vernetzung möglich (siehe auch [89], [18]).

Weiter verbreitet ist aber die Nutzung von „Basisformen“, „Formmoden“ oder „Basisvektoren“, wobei alle Begriffe dasselbe meinen ([181], [89]). Diese vordefinierten, normierten Verformungen des FE-Netzes werden während der Optimierung gewichtet überlagert:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \sum_i p_i \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}^0). \quad (3.1)$$

Die Wichtungsfaktoren p_i der einzelnen Basisformen, repräsentiert durch die Knotenkoordinaten \mathbf{x}_i , sind die eigentlichen Designvariablen und bestimmen, wie groß der Einfluss einer bestimmten Form auf das Endresultat \mathbf{x} ist. Der Vektor \mathbf{x}^0 beschreibt das unverformte Ausgangsnetz. Grenzen, in denen der Wichtungsfaktor variiert werden darf, gehen als Nebenbedingungen in die Optimierungsaufgabe ein.

Zur Erzeugung der Basisformen gibt es wieder verschiedene Möglichkeiten. Zum Einen können z.B. fiktive Lasten aufgebracht werden, die zu einem verformten Ausgangsnetz führen, welches als Basisform verwendet werden kann. Zum Anderen besteht die Möglichkeit zur Erzeugung der Basisformen durch eine Veränderung der Ausgangsform mit Hilfe von

Morphing-Tools, welche in der Lage sind, ein FE-Netz gezielt zu verändern. Nach einer beliebigen Veränderung des die Ausgangsgestalt darstellenden Netzes, kann diese Form als Basisform gespeichert werden. Schließlich gibt es noch die Variante der Verwendung bestimmter Schwingungseigenformen der Struktur. Dies hat gegenüber den zuvor genannten Möglichkeiten den Vorteil, dass die Basisformen aufgrund der Orthogonalität der Schwingungseigenvektoren voneinander linear unabhängig sind.

Als Vorteil der parameterbasierten Gestaltoptimierung ist zum Einen die geringe Anzahl der Designvariablen zu nennen, was sich wiederum positiv auf die Konvergenz des gewählten Optimierungsalgorithmus auswirkt. Zum Anderen hat der Nutzer bei der Erzeugung der Basisformen eine Kontrolle über die Qualität des deformierten FE-Netzes und kann bei Bedarf eingreifen, um dem Entstehen degenerierter Elemente während der Optimierung vorzubeugen. Ein großer Nachteil der parameterbasierten Gestaltoptimierung ist die recht (zeit-)aufwendige Erstellung der Basisformen, wobei außerdem zu beachten ist, dass die Qualität des Optimierungsergebnisses stark von der Güte der Basisformen abhängt. Letzteres impliziert auch die Problematik, dass möglicherweise die Optimalform durch eine ungünstige Wahl der Basisformen bzw. der die Geometrie beschreibenden Parameter vom Optimierungsalgorithmus nicht gefunden werden kann und letztendlich nur ein lokales Optimum erreicht wird.

3.2.2 Parameterfreie Gestaltoptimierungsverfahren

Bei der parameterfreien Gestaltoptimierung wird die Gestalt bzw. äußere Kontur der Struktur lediglich von den Koordinaten der Oberflächenknoten beschrieben, welche direkt als Designvariablen benutzt werden. Großer Vorteil dieses Vorgehens ist, dass der Designraum, also die zulässige Menge der Designs bzw. Formen, alle möglichen Lösungen umfasst und nicht von der Güte der Parametrisierung abhängt. Für die parameterfreie Gestaltoptimierung existieren zwei unterschiedliche Ansätze, die nachfolgend beschrieben werden.

3.2.2.1 Parameterfreie Gestaltoptimierung mit Hilfe der Mathematischen Programmierung

Bei diesem Ansatz wird die optimale Form des Bauteils anhand einer iterativen Optimierung der Oberflächenknotenkoordinaten erreicht, die sich der Algorithmen der Mathematischen Programmierung (siehe Kapitel 2) bedient. Die besondere Schwierigkeit für den Optimierungsalgorithmus liegt dabei in der Behandlung einer großen Anzahl von Designvariablen, da jeder Knoten, der zum Designgebiet gehört, durch seine Raumkoordinaten wenigstens einer Designvariablen (z.B. der Richtung normal zur Bauteiloberfläche) zugeordnet ist (Abb. 3.3). Jedoch gibt es inzwischen Algorithmen, welche die große Anzahl an Designvariablen effektiv handhaben können (siehe z.B. Abschnitt 3.3.1.3.1). Ein weiteres Problem ist die Empfindlichkeit der Spannungsergebnisse der Elemente gegenüber deren geometrischer Verzerrung, was zu numerischen Instabilitäten führen kann. Um die Elementverzerrungen der Oberflächenelemente zu verringern, werden die Knotenverschiebungen der Außenknoten auch auf die inneren Knoten bis zu einer gewissen Tiefe geeignet übertragen. Darüber hinaus können numerische Instabilitäten auftreten, die dem Checkerboarding (siehe Abschnitt 3.3.3) verwandt

sind, und zu nichtglatten Konturen des optimierten Designbereichs führen. Derartigen Schwierigkeiten kann aber durch den Einsatz bestimmter Filtermethoden begegnet werden [108].

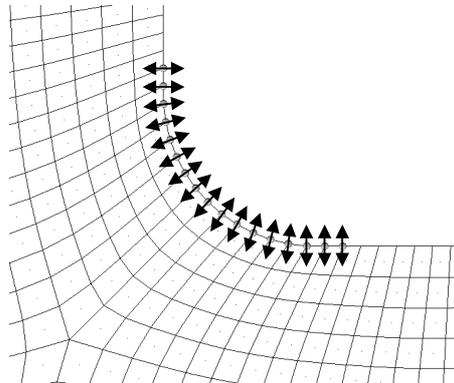


Abb. 3.3 Designknoten bei einer parameterfreien Gestaltoptimierung einer Kerbe mit möglichen Designvariablen als Verschiebungen normal zur Oberfläche

3.2.2.2 Parameterfreie Gestaltoptimierung durch Optimalitätskriterienverfahren

Optimalitätskriterienverfahren basieren, wie bereits mehrfach erwähnt, auf Vorstellungen über die Eigenschaften einer optimalen Struktur bzw. im Falle der Gestaltoptimierung über die Eigenschaften einer optimalen Gestalt. Optimalitätskriterienverfahren erfuhren vor allem durch die Arbeiten von C. Mattheck ([117], [118]) große Beachtung. Mattheck erkannte, dass Bäume und andere natürliche Strukturen (wie z.B. Tierzähne, Hirschgeweihe, Knochen, weitere siehe [115]) durch ihr Wachstum einen ausgeglichenen Spannungszustand hinsichtlich der von Mises-Spannung an der Oberfläche der Struktur erreichen. Optimalitätskriterienverfahren orientieren sich nun an dieser Eigenschaft.

Der ausgeglichene Spannungszustand an der Bauteiloberfläche wird im Prinzip bei allen Abwandlungen dieser Methode durch ein „Wachsen“ von Bereichen mit hoher Spannung und ein „Schrumpfen“ von Bereichen mit niedriger Spannung erreicht. Unterschiede gibt es in der Festlegung des Zusammenhangs zwischen lokalen Spannungen und dem lokalen Wachsen bzw. Schrumpfen. Mattheck schlägt beispielsweise vor, eine fiktive Temperaturverteilung entsprechend der Verteilung der von Mises-Spannungen an der Oberfläche aufzubringen und in einem zweiten Rechenschritt die von der Temperaturverteilung verursachte Ausdehnung bzw. Schrumpfung als Start-Gestalt für die nächste Iteration zu übernehmen. Mit diesem Verfahren konnten viele biologische Wachstumsprozesse eindrucksvoll nachvollzogen werden [115].

Eine weitere Möglichkeit ist, das Wachsen/Schrumpfen vom Abstand zu einer Referenzspannung abhängig zu machen. Dies hat gegenüber der „Temperaturmethode“ den Vorteil, dass pro Iteration nur eine FE-Rechnung nötig ist.

In [179] wird ein ESO-Verfahren vorgestellt, bei dem der zu optimierende Bereich und angrenzende leere Bereiche fein vernetzt werden und dann iterativ die Elemente mit einer geringen von Mises-Spannung wieder entfernt werden. Auf diese Weise wird die optimale Form

„herausgeknabbert“ („Nibbling“). Bei diesem Verfahren ist zwar kein „Wachsen“ der Struktur, sondern nur ein Entfernen von Material durch das Löschen von finiten Elementen möglich, jedoch beruht es auf denselben Grundannahmen wie die zuvor beschriebenen Methoden. Großer Vorteil der Optimalitätskriterienverfahren ist die einfache Implementierbarkeit in bestehende FE-Systeme, die Gradientenfreiheit des Verfahrens und auch die Anwendbarkeit auf nichtlineare FE-Probleme, wie z.B. Kontaktberechnungen. Speziell bei Kontaktproblemen muss dann jedoch das Wachstums- und Schrumpfverhalten gegenüber der Gestaltoptimierung bei freien Oberflächen umgekehrt werden (hohe Spannungen führen zum Schrumpfen, niedrige zum Wachstum, siehe [122]).

Ein wesentlicher Nachteil der Verfahrensgruppe ist die Einschränkung auf bestimmte Zielfunktionen, wie die Homogenisierung der Oberflächenspannungen oder die Minimierung der ersten Eigenfrequenz [121], was jedoch in der Natur der Verfahren begründet liegt.

3.2.2.3 Vergleich einer Gestaltoptimierung mit Hilfe von Optimalitätskriterien mit der analytischen Optimallösung anhand eines Kragbalkens

Bei den Optimalitätskriterienverfahren stellt sich noch die Frage, ob die Grundannahme, dass der ausgeglichene Spannungszustand an der Bauteiloberfläche, zu einer optimalen Gestalt führt, korrekt ist. In [137] wird gezeigt, dass die steifste Gestalt eine gleichmäßige Verzerrungsenergieverteilung an der optimierten Bauteiloberfläche aufweist, soweit dies durch eventuelle Restriktionen zugelassen wird. Gleichzeitig ist diese Gestalt auch diejenige mit der höchsten statischen Festigkeit. Diese Aussagen gelten auch für anisotrope Materialien und nichtlineare Elastizitätsgesetze. Sind die für das Optimalitätskriterium verwendete Vergleichsspannung und das Maß für die Verzerrungsenergieverteilung proportional, dann lassen sich die Aussagen über die Verteilung der Verzerrungsenergieverteilung auch auf die Verteilung der benutzten Vergleichsspannung übertragen. Für den Fall der von Mises-Spannung trifft dies nur bei isotropen, inkompressiblen Materialien zu ([136], [17]).

In diesem Abschnitt soll die Gültigkeit der Grundannahme der Optimalitätskriterienverfahren durch ein einfaches Beispiel demonstriert werden. Bei dem Beispiel handelt es sich um einen ebenen Kragbalken, der durch eine gleichmäßig wirkende Flächenlast q_0 belastet wird (Abb. 3.4, links). Gesucht ist nach einer Balkenform, die bei vorgegebener Last q_0 und Balkenvolumen V_0 zu einer maximalen Balkensteifigkeit führt. Im Folgenden wird zur Beschreibung des mechanischen Balkenverhaltens die einfache Euler-Bernoulli-Balkentheorie verwendet.

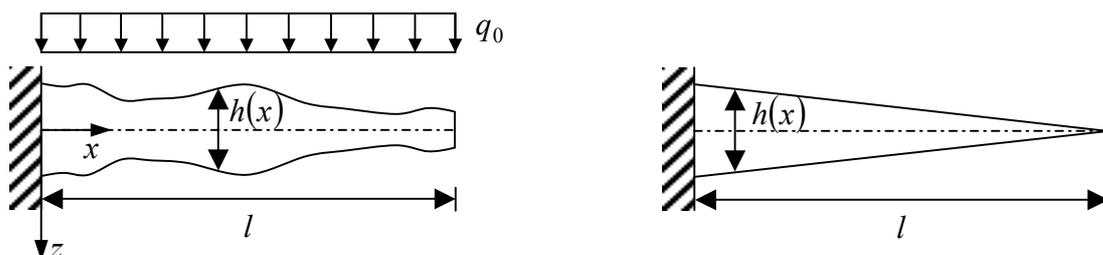


Abb. 3.4 Ebener Kragbalken unter Streckenlast mit variabler Höhe (links) und steifste Balkenform bei vorgegebenem Maximalvolumen (rechts)

Setzt man für den Balken einen rechteckigen Vollquerschnitt mit der Breite b voraus, so wird die Balkenform durch die Balkenhöhe h in Abhängigkeit der Position x auf dem Balken bestimmt (Abb. 3.4, links).

Nutzt man für die Lösung der Aufgabe die Lagrange-Multiplikator-Methode und definiert die Balkensteifigkeit und damit die Zielfunktion als die Summe der Verschiebungen aller materiellen Punkte gemäß

$$\min_h \int_{x=0}^{x=l} w(x) dx \quad (3.2)$$

unter der Nebenbedingung eines vorgegebenen Volumens

$$V = \int_0^l h(x)b dx = V_0, \quad (3.3)$$

so erhält man nach [114] unter Einbeziehung der Balkenverschiebungsdifferentialgleichung

$$[EI_{yy}(x) \cdot w''(x)]'' = q_0, \quad (3.4)$$

welche für jeden Punkt des Balkens als weitere Nebenbedingung erfüllt sein muss, die optimale Höhenverteilung

$$h(x) = \frac{2V_0}{l^2 \cdot b} \cdot (l-x). \quad (3.5)$$

Bei Lösung des Problems mit Hilfe des Optimalitätskriteriums des ausgeglichenen Spannungszustandes an der Balkenoberfläche, ist zunächst der Momentenverlauf $M_y(x)$ entlang der Balkenlängsachse aus der Schnittlastendifferentialgleichung

$$M_y''(x) = -q_0 \quad (3.6)$$

durch zweimaliges Integrieren zu bestimmen. Die Integrationskonstanten ergeben sich aus den Randbedingungen $M_y'(x=l) = Q(x=l) = 0$ und $M_y(x=l) = 0$, womit man schließlich für den Momentenverlauf

$$M_y(x) = -\frac{q_0 l^2}{2} \left[1 - 2\frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right] = -\frac{q_0}{2} (l-x)^2 \quad (3.7)$$

erhält. Mittels der Äquivalenzbedingung

$$\sigma_{xx}(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_{yy}(x)} \cdot z \quad (3.8)$$

zwischen Biegenormalspannung σ_{xx} und Biegemoment M_y können nun die Spannungen in den Randfasern (Oberfläche) des Balkens ($z = \pm h/2$) für das gegebene Flächenträgheitsmoment $I_{yy} = (bh^3)/12$ des rechteckigen Balkenquerschnittes berechnet werden:

$$|\sigma_{xx}| = \left| \frac{\pm 3q_0(l-x)^2}{bh^2} \right|. \quad (3.9)$$

Die Bedingung für einen ausgeglichenen Spannungszustand hinsichtlich der Normalspannung σ_{xx} in der Randfaser lautet $\sigma_{xx} = const.$ und führt mit (3.9) und einer konstanten, stets positiven Linienlast q_0 auf die Höhenverteilung

$$h(x) = C(l-x). \quad (3.10)$$

Die Konstante C kann aus der Vorgabe des Balkenvolumens bestimmt werden:

$$\int_0^l h(x) \cdot b dx = \int_0^l Cb(l-x) dx = Cb \left[lx - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^l = Cb \left(\frac{1}{2} l^2 \right) = V_0, \quad (3.11)$$

womit für C folgt:

$$C = \frac{2V_0}{l^2 \cdot b}. \quad (3.12)$$

Damit erhält man mit dem Kriterium des ausgeglichenen Spannungszustandes an der Balkenoberfläche die gleiche Höhenverteilung, wie sie mit Hilfe der Lagrange-Multiplikator-Methode in [114] gefunden wurde:

$$h(x) = \frac{2V_0}{l^2 \cdot b} \cdot (l-x), \quad (3.13)$$

vgl. Abb. 3.4 (rechts). Dies lässt sich auch durch eine FE-Rechnung bestätigen. In Abb. 3.5 ist links die verformte Lage des Kragbalkens mit der farbigen Darstellung der Spannung σ_{xx} zu sehen. Im Diagramm ist der Verlauf dieser Spannungskoordinate entlang der oberen Balkenkante aufgetragen. Es ist zu erkennen, dass auch in der FE-Rechnung die Spannung in der Randfaser der optimierten Balkenform entlang des Balkens, bis auf geringe Abweichungen am linken und rechten Rand, konstant bleibt. Die Abweichungen von der konstanten Spannung am linken Balkenende sind auf Störungen durch die Einspannung des Balkens zurückzuführen, welche in der Euler-Bernoulli-Balkentheorie nicht berücksichtigt werden. Am rechten Balkenende kommt es ebenfalls zu leichten Abweichungen vom konstanten Spannungsverlauf, da die im Bereich der Balkenspitze befindlichen Elemente relativ stark verzerrt sind und daher ungenauere Ergebnisse liefern. Hier könnte die Genauigkeit durch eine feinere Elementierung erhöht werden.

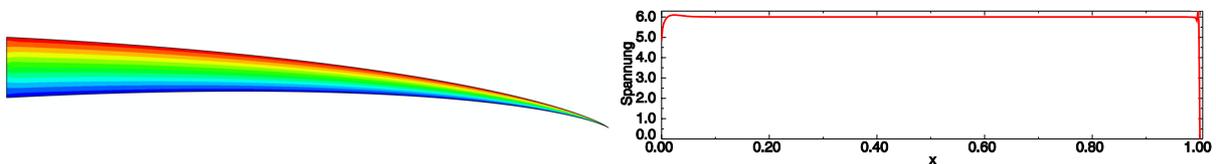


Abb. 3.5 Verformte Lage des optimierten Kragbalkens mit Darstellung der Spannungskoordinate σ_{xx} und Verlauf der Spannungskoordinate σ_{xx} entlang der oberen Balkenkante

3.3 Topologieoptimierung

Die Topologieoptimierung ist unter allen Strukturoptimierungsverfahren sicherlich das interessanteste Verfahren, da mit Hilfe der Topologieoptimierung eine völlig neue Verteilung von Material im Raum und somit die Erschaffung komplett neuer Strukturen möglich ist. Um dies zu erreichen, existieren ähnlich wie bei der Gestaltoptimierung Methoden, die sich der Hilfsmittel der Mathematischen Programmierung bedienen, und Optimalitätskriterienverfahren bzw. ESO-Methoden, wobei die beiden Letztgenannten in vielen Veröffentlichungen als eine Verfahrensklasse angesehen werden (siehe z.B. [153]).

Wie mächtig die Topologieoptimierung sein kann, lässt sich anhand eines einfachen Stabtragwerkes demonstrieren. Beide in Abb. 3.6 dargestellten Tragwerke besitzen dasselbe Volumen, dieselben Stabquerschnitte, dasselbe Material und unterliegen derselben Belastung. Einziger Unterschied ist die Anordnung der beiden mittleren Diagonalstreben.

Nach einer linearen Rechnung ist zu erkennen, dass die Verschiebung in 2-Richtung, welche der negativen Belastungsrichtung entspricht, bei der unteren Topologie betragsmäßig um etwa 16 % geringer ausfällt. Da bei der unteren Stabanordnung der mittlere vertikale Stab außer-

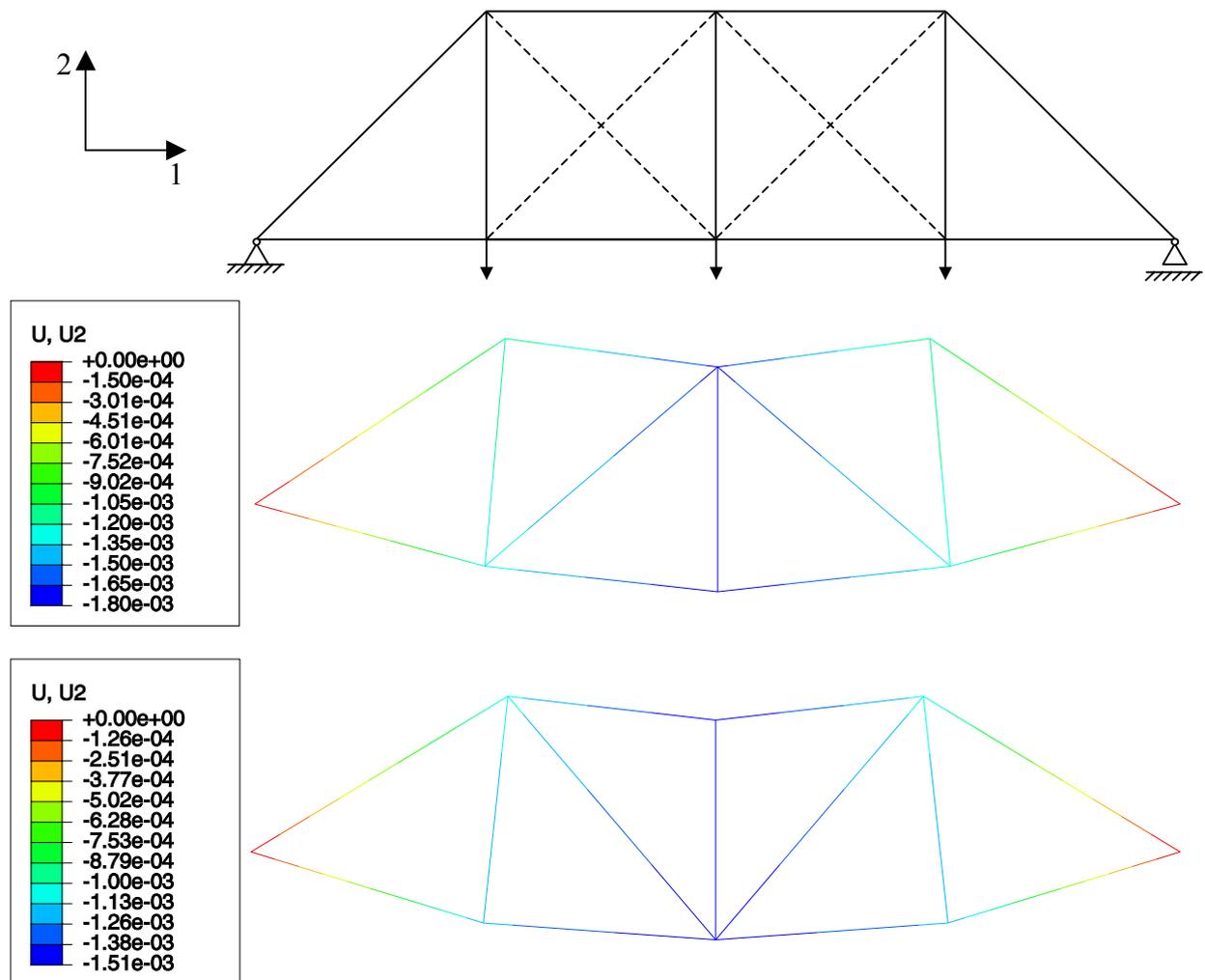


Abb. 3.6 Verschiebungen eines Stabtragwerkes bei unterschiedlichen Topologien

dem ein Nullstab ist, was man bei Freischnitt und Aufstellen des Stabkraftgleichgewichtes für den oberen Knoten des betreffenden Stabes erkennt, ließe sich mit diesem steiferen Tragwerk auch noch Gewicht und Material einsparen.

Aufgabe der Topologieoptimierung ist es also, zu entscheiden, ob sich an einem Punkt des Design-Raumes, welcher den zur Verfügung stehenden Bauraum beschreibt, Material befinden soll oder nicht. Für praktische Anwendungen bietet sich eine Nutzung der Topologieoptimierung in Kombination mit der weit verbreiteten Finite-Elemente-Methode [10] an und ist Stand der Technik. Alle weiteren Ausführungen bezüglich der Topologieoptimierung sind deshalb vor diesem Hintergrund zu betrachten.

Im Allgemeinen wird so vorgegangen, dass der gesamte zur Verfügung stehende Bauraum, inklusive des nicht zu optimierenden Bereiches, vernetzt und mit den entsprechenden Randbedingungen (Lager, Lasten, ...) versehen wird. Der nicht zu optimierende Bereich der Struktur wird dabei als Non-Design-Bereich (gleichbedeutend mit Non-Design-Raum), und der zur Optimierung freigegebene Bereich als Design-Bereich (auch Design-Raum) bezeichnet. Hierbei gibt es prinzipiell keine Einschränkungen hinsichtlich der verwendeten finiten Elemente (Stab-, Balken-, Schalen- oder Volumenelemente). Nach Definition der Zielfunktion und eventueller Nebenbedingungen kann die Optimierung starten.

Ähnlich wie bei der Gestaltoptimierung existieren auch bei der Topologieoptimierung zwei Verfahrensklassen. In vielen Veröffentlichungen wird dabei von parameterbasierten und parameterfreien Verfahren gesprochen, was jedoch nicht immer ganz der gewünschten Unterscheidung entspricht. Sensitivitätsbasierte Topologieoptimierungsverfahren sind zwar immer parameterbasiert, für Optimalitätskriterienverfahren, die ohne Sensitivitätsanalyse auskommen, gilt dies aber nicht immer. Deshalb erfolgt im Weiteren eine Unterscheidung in sensitivitätsbasierte Topologieoptimierungsverfahren und sensitivitätsfreie Optimalitätskriterienverfahren.

3.3.1 Sensitivitätsbasierte Topologieoptimierungsverfahren

Sensitivitätsbasierte Topologieoptimierungsverfahren nutzen die Algorithmen und Möglichkeiten der mathematischen Programmierung (siehe Kapitel 2). Allerdings sind für eine Topologieoptimierung aufgrund der Vielzahl von Designvariablen spezielle Algorithmen erforderlich (siehe Abschnitt 3.3.1.3). Vorteil dieser Verfahren ist, dass der Anwender sehr frei in der Kombination von Zielfunktion und Nebenbedingungen ist. Hier sind nahezu alle (sinnvollen) Kombinationen der Ausgabegrößen einer FE-Rechnung möglich. Eine Ausnahme bilden allerdings Spannungsnebenbedingungen und von den Invarianten des Spannungstensors abgeleitete Größen, die als Nebenbedingung verwendet werden (siehe hierzu Abschnitt 3.3.1.2). Nachteile der sensitivitätsbasierten Verfahren ergeben sich bei nichtkonvexen Optimierungsproblemen, da dann das Auffinden des globalen Optimums nicht mehr garantiert werden kann.

3.3.1.1 Modellparametrisierung bei der Topologieoptimierung

Wie bei jedem Optimierungsvorgang werden auch bei der Topologieoptimierung Designvariablen, das heißt vom Optimierungsalgorithmus veränderbare Parameter, benötigt. Eine Ausnahme bilden hier bestimmte ESO-Methoden, bei denen Elemente mit einem geringen Vergleichsspannungsniveau iterativ direkt gelöscht werden (siehe Abschnitt 3.3.2 und [179]). Bezüglich der Parametrisierung gibt es verschiedene Ansätze, von denen hier nur die zwei gebräuchlichsten Verfahren näher betrachtet werden. Geht man davon aus, dass man am Ende des Optimierungsprozesses eine klare Aussage darüber haben möchte, welche Elemente des Design-Bereiches die gesuchte optimale Struktur bilden sollen und welche Elemente entfernt werden können, so sucht man nach einer sogenannten „Schwarz-Weiß-Verteilung“, die mit den beschriebenen Verfahren annähernd erreicht werden kann. Eine detaillierte Erklärung zu weiteren Vorgehensweisen sowie eine Einteilung der Topologieoptimierung nach Verfahren und Ergebnissen findet man mit zahlreichen Literaturstellen in [151].

3.3.1.1.1 SIMP-Methode

Nach [17] steht SIMP für **S**olid **I**sotropic **M**aterial with **P**enalization. Andere Autoren jedoch übersetzen die Abkürzung mit **S**olid **I**sotropic **M**icrostructures with **P**enalization [151] oder **S**imple **I**sotropic **M**aterial with **P**enalization. Jedoch meinen alle dasselbe Verfahren.

Als Designvariable für den Optimierungsalgorithmus wird ein dimensionsloser „Dichtefaktor“ ρ eingeführt. Dieser Dichtefaktor wird mit dem eigentlichen Elastizitätstensor der finiten Elemente des Design-Bereiches multipliziert. Der Dichtefaktor darf dabei kontinuierliche Werte zwischen 0 und 1 annehmen, wobei aus numerischen Gründen immer $\rho > 0$ gelten muss. Hat ein Element einen sehr geringen Dichtefaktor (z.B. $\rho = 0,01$), so hat es auch eine entsprechend geringe Steifigkeit, jedoch noch sein ursprüngliches Volumen. Bei einem Dichtefaktor von 1 hat das betreffende finite Element seine normalen, dem jeweiligen Material entsprechenden Steifigkeitseigenschaften.

Die Aufgabe des Optimierungsalgorithmus ist es nun, jedem Element einen Dichtefaktor entsprechend der Wichtigkeit des Elementes in der Gesamtstruktur zuzuweisen. Hat ein Element am Ende einer Optimierung eine geringe Dichte, so hat es, wie schon erwähnt, auch eine geringe Steifigkeit und kann ohne größere Einflüsse auf das Verhalten der Gesamtstruktur entfernt werden. Elemente mit hohem Dichtefaktor hingegen sind für die Struktur zum Erfüllen der an sie gestellten Anforderungen sehr wichtig und müssen erhalten bleiben.

Um den Optimierungsalgorithmus, trotz der kontinuierlichen Variation des Dichtefaktors zwischen 0 und 1 zu „zwingen“, schließlich eine Schwarz-(=1)-Weiß-(=0)-Verteilung zu generieren, wird der Dichtefaktor noch mit einem Bestrafungsexponenten p versehen. Somit ergibt sich der Elastizitätstensor eines Elementes zu

$$\mathbf{E} = \rho^p \mathbf{E}^0, \quad (3.14)$$

wobei \mathbf{E}^0 den „normalen“ Elastizitätstensor des finiten Elements entsprechend der Materialeigenschaften des Elements bezeichnet. Der Bestrafungsexponent $p \geq 1$ wird im Normalfall

während der Optimierung schrittweise erhöht. Der Einfluss des Bestrafungsexponenten auf die Elementsteifigkeit lässt sich in Abb. 3.7 erkennen.

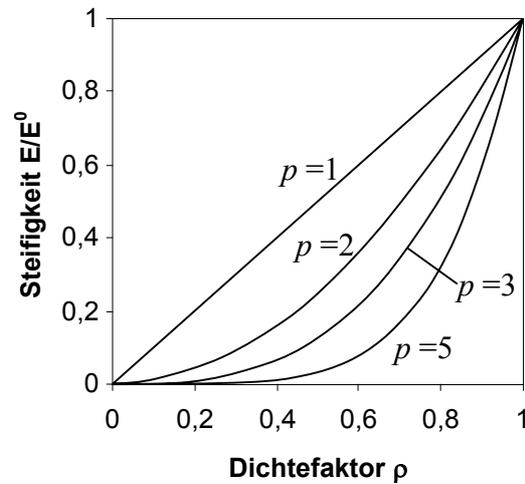


Abb. 3.7 Einfluss des Bestrafungsexponenten p auf die Elementsteifigkeit in Abhängigkeit des Dichtefaktors ρ

Bei steigendem Bestrafungsexponenten nimmt die Steifigkeit des Elements bei gleichbleibendem Dichtefaktor ab. Für die Optimierung bedeutet dies Folgendes: Ist es beispielsweise das Ziel einer Optimierung, das Volumen einer Struktur, welches sich aus der Summe aller Elementvolumina multipliziert mit dem jeweiligen Dichtefaktor (ohne Bestrafungsexponent) ergibt, zu minimieren oder die Steifigkeit bei vorgegebenem Volumen zu maximieren, so verursacht ein Element mit einem mittelgroßen Dichtefaktor im Sinne der Optimierung hohe Kosten bei geringem Nutzen. Angenommen ein Element hat einen Dichtefaktor von $\rho=0,4$, so beträgt sein Volumen das 0,4-fache des eigentlichen Elementvolumens. Bei einem Wert des Bestrafungsexponenten von $p=3$ hätte es aber nur eine relative Steifigkeit von $0,4^3 = 0,064$. Der Optimierungsalgorithmus muss nun entscheiden, ob das Element (trotz der hohen Kosten von 0,4) für das Strukturverhalten wichtig ist, und im Falle einer positiven Bewertung den Dichtefaktor erhöhen, wodurch sich die Kosten/Nutzen-Bilanz des Elements verbessert. Im Falle einer negativen Bewertung der Wichtigkeit des Elements, wird der Optimierungsalgorithmus den Dichtefaktor möglichst weit senken, um die Kosten so gering wie möglich zu halten. Letztendlich führt ein höherer Bestrafungsexponent auf diese Weise zu einer Verringerung der Elemente mit Zwischendichten, bei denen unklar ist, ob sie zur späteren Struktur gehören sollen oder nicht.

Nachteil bei Verwendung eines Bestrafungsexponenten größer als 1 ist jedoch, dass auch eigentlich konvexe Probleme, wie z.B. die Maximierung der mittleren Steifigkeit einer Struktur, zu nichtkonvexen Problemen werden (siehe z.B. [164], [162]), wodurch die Auffindung des globalen Optimums nicht mehr gesichert werden kann. Aus diesem Grunde wird bei praktischen Anwendungen so vorgegangen, dass zu Beginn der Optimierung mit einem Exponenten von $p=1$ gearbeitet wird, welcher dann im Verlaufe der Iterationen (wenn also bereits eine gewisse Annäherung an das Optimum erfolgte) schrittweise auf Werte bis zu $p=5$ erhöht wird.

Großer Vorteil der SIMP-Methode ist die geringe Anzahl von Designvariablen, da die zu optimierenden Elementeigenschaften mit jeweils nur einer einzigen Variablen, dem Dichtefaktor, beschrieben werden. Dies vereinfacht die Aufgabe für den Optimierungsalgorithmus und hält den Speicherplatzbedarf in Computersystemen in Grenzen.

Die SIMP-Methode wurde 1989 zuerst von M. P. Bendsøe als „Direkter Ansatz“ („direct approach“) bzw. als „Künstliche Dichte-Methode“ („artificial density method“) beschrieben [13]. Weitere in der Literatur oft verwendete Bezeichnungen für die SIMP-Methode, die jedoch alle dasselbe Verfahren umschreiben, sind „material interpolation method“, „artificial material method“, „power law method“ sowie „density method“.

3.3.1.1.2 Homogenisierungsmethode

Obwohl mit Hilfe der SIMP-Methode sehr vielversprechende Ergebnisse erzielt wurden, kam es zu Beginn der 1990er Jahre zur Entwicklung der sogenannten Homogenisierungsmethode. Ein Grund hierfür war, dass man keine physikalische Bedeutung für „graue“ Elemente mit Zwischendichten bei Anwendung der SIMP-Methode hatte. Weitere Vorbehalte gegenüber der SIMP-Methode, wie beispielsweise die Gutartigkeit der Problemstellung und die Netzabhängigkeit der Lösung betreffend, waren vornehmlich theoretischer Natur und können in einer kleinen Zusammenfassung in [151] nachgelesen werden.

Die Homogenisierungsmethode arbeitet mit Mikrostrukturen auf Finite-Element-Ebene und wird deswegen oft auch (je nach Art der verwendeten Mikrostruktur) als OMP-Methode (**O**ptimal **M**icrostructures with **P**enalization) bzw. NOM-Methode (**N**ear **O**ptimal **M**icrostructures) bezeichnet. Dabei wird ein einzelnes Element des Designraumes als eine Mikrostruktur aufgefasst, die zu einem Teil mit Material gefüllt, und zum anderen Teil leer ist (Abb. 3.8, links).

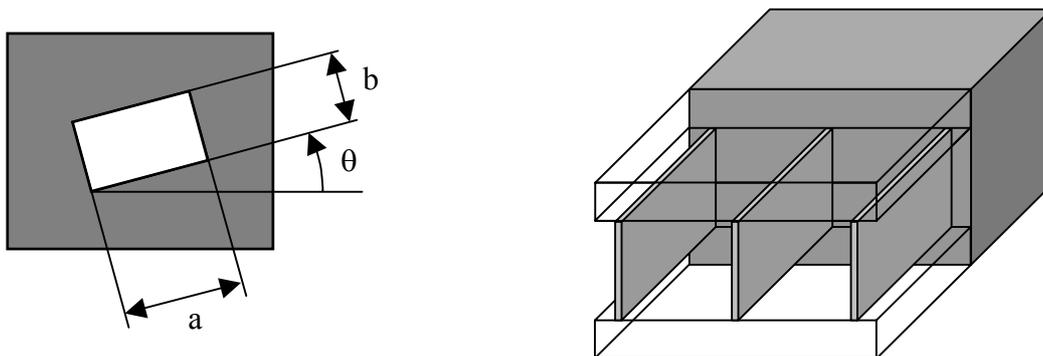


Abb. 3.8 Mikrostruktur mit Parametern für ebene Probleme (links) und dreidimensionale Rank-3-Mikrostruktur (rechts), aus [17]

Die Designvariablen für den Optimierungsalgorithmus sind dann die Abmessungen des Loches (a, b) sowie dessen Orientierung (θ). Die durch Änderungen der „Lochparameter“ hervorgerufenen Veränderungen der elastischen Eigenschaften des Elementes werden in den Elastizitätstensor mit Hilfe einer Homogenisierung der neuen Elementeigenschaften eingearbeitet, woraus sich auch der Name der Methode ableitet. Die Herleitung der Elementeigenschaften kann analytisch (siehe [17], [14]) oder numerisch erfolgen (siehe [17] und [158]).

Um die Existenz von Lösungen für Topologieoptimierungsprobleme mit mehreren Lastfällen zu garantieren, kam es auch zur Entwicklung sogenannter „ranked laminates“ (Abb. 3.8, rechts). Dies sind periodisch aufgebaute Mikrostrukturen, die aus mehreren Ebenen („ranks“) bestehen und durch entsprechend viele Designvariablen beschrieben werden.

Prinzipiell erfolgt die Beurteilung des Optimierungsergebnisses ähnlich wie bei der SIMP-Methode. Elemente mit großen Löchern haben eine geringe Tragfähigkeit und können ohne großen Einfluss auf das Gesamtverhalten der Struktur entfernt werden.

Die Homogenisierungsmethode kann in bestimmten Fällen auf einen Strafexponenten wie bei der SIMP-Methode verzichten, da die Dichte eines Elementes, die sich aus dem Verhältnis von Lochvolumen zum Gesamtvolumen des Elementes ergibt, sich nicht proportional zur Steifigkeit des Elementes verhält und somit immer eine fest vorgegebene „Bestrafung“ von Zwischendichten stattfindet. (Womit der Homogenisierungsmethode die Nicht-Konvexität der Optimierungsprobleme automatisch inne wohnt.) Allerdings ist die durch die Nicht-Proportionalität zwischen Dichte und Steifigkeit vorgegebene „Bestrafung“ oftmals zu gering für praktische Anwendungen, so dass künstlich weitere Maßnahmen ergriffen werden müssen, um diesen Bestrafungseffekt zu erhöhen. Trotzdem ist es für Topologieoptimierungsergebnisse, die mit Hilfe der Homogenisierungsmethode erzielt wurden, typisch, dass große Bereiche des Designraumes „graue“ Elemente aufweisen, bei denen nicht ganz klar ist, ob sie aus der Struktur entfernt werden können oder nicht. Diese zunächst als Nachteil der Methode aufzufassende Eigenschaft kann für bestimmte Anwendungen aber auch von Vorteil sein. Durch die anisotropen elastischen Eigenschaften der einzelnen (optimierten) Mikrostrukturen kann man beispielsweise wertvolle Hinweise für die Auslegung eines Bauteils mit faserverstärkten Materialien erhalten. Das Optimierungsergebnis der Homogenisierungsmethode nutzt also durch eine gewisse Anisotropie das zur Verfügung stehende Material sehr effizient, wohingegen bei einem isotropen Material (wie es die SIMP-Methode erzeugt) eine „Materialverschwendung“ in den nicht belasteten Richtungen auftritt.

Zusammenfassend muss man jedoch feststellen, dass die SIMP-Methode eine größere Verbreitung und Anwendung, vor allem bei kommerzieller Topologieoptimierungssoftware, erfährt. Gründe hierfür sind die geringe Anzahl von Designvariablen (nur eine Variable pro Element), was zu einem geringeren Speicherplatzbedarf führt. Weiterhin kann die Nichtlinearität der Volumen- zu Steifigkeits-Beziehung mit Hilfe des Bestrafungsexponenten bei der SIMP-Methode beliebig angepasst werden. Schließlich benötigt die SIMP-Methode auch keinen Homogenisierungsprozess der Mikrostruktur, um den Elastizitätstensor bereitzustellen, was natürlich Rechenzeit spart. Einen ausführlicheren Vergleich beider Methoden findet man mit Verweis auf zahlreiche Literaturstellen in [151].

3.3.1.2 Spannungsnebenbedingungen

Besondere Aufmerksamkeit sei hier kurz den Spannungsnebenbedingungen in einer Topologieoptimierung gewidmet, da sich hierbei einige Schwierigkeiten ergeben, die unabhängig von der Modellparametrisierung (SIMP- oder Homogenisierungsmethode) oder der Art des zu

optimierenden Tragwerkes (Fachwerk oder kontinuierliche Strukturen) auftreten. Führt man Spannungsnebenbedingungen in ein Topologieoptimierungsproblem ein, so sollen diese ja in der Regel für das gesamte Modell gelten, was dann mit wenigstens einer Nebenbedingung pro Element zu einer sehr großen Anzahl an Nebenbedingungen führt. Man benötigt also Optimierungsalgorithmen, die mit einer sehr hohen Zahl an Nebenbedingungen umgehen können bzw. ein Verfahren zur Reduktion der Anzahl der Nebenbedingungen. Letzteres kann beispielsweise mit Hilfe einer Aktive-Mengen-Strategie (siehe z.B. [43]) oder durch sogenannte „Globale Spannungsfunktionen“ (siehe z.B. [180], [73], [134]), welche die lokalen Spannungen approximieren, erreicht werden.

Darüber hinaus erzeugen Spannungsnebenbedingungen einen „degenerierten“ Designraum, was in der Topologieoptimierungsliteratur unter dem Namen „Spannungs-Singularitäts-Problem“ bekannt ist (z.B. [17], [43]). Diese Singularität der Spannungen liegt darin begründet, dass bei geringen Dichten ρ der SIMP-Methode, kleinen Mikrostrukturabmessungen der Homogenisierungsmethode oder geringen Stabquerschnitten bei Fachwerken die Spannungen gegen einen endlichen Wert streben, falls die jeweiligen Optimierungsparameter gegen null gehen. Um dies besser zu verstehen, muss man folgende Überlegungen anstellen (beispielhaft für die SIMP-Methode): Aus verschiedenen Gründen (z.B. Erweiterbarkeit der Isotropie der Steifigkeitseigenschaften auf Spannungen, korrekte Abbildung mikrostruktureller Betrachtungen, näheres siehe [43]) ist es sinnvoll, die „lokalen“ Spannungen σ_{ij} , die in einem Element herrschen, mit Hilfe des Dichtefaktors und der „makroskopischen“ Spannungen $\langle \sigma_{ij} \rangle$ zu beschreiben:

$$\sigma_{ij} = \frac{\langle \sigma_{ij} \rangle}{\rho^q}. \quad (3.15)$$

Die makroskopischen Spannungen ergeben sich dabei formal aus den Dehnungen, die das betreffende Element, welches ja makroskopisch die elastischen Eigenschaften $\rho^p E_{ijkl}^0$ besitzt, erfährt und durch Verschiebungen der angrenzenden Bereiche erzeugt werden, gemäß

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \rho^p E_{ijkl}^0 \langle \varepsilon_{ij}^0 \rangle, \quad (3.16)$$

mit den makroskopischen Verzerrungen $\langle \varepsilon_{ij}^0 \rangle$, die nicht direkt vom Dichtefaktor abhängen. Aus Gründen der physikalischen Verträglichkeit ist es weiterhin sinnvoll (siehe [43]), die Bestrafungsexponenten für die Steifigkeit p und für die „lokalen“ Spannungen q so zu wählen, dass $p = q$ gilt. Tut man dies und setzt (3.16) in (3.15) ein, so erhält man als Grenzwert für die „lokalen“ Spannungen für einen gegen null gehenden Dichtefaktor

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sigma_{ij} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^p}{\rho^q} E_{ijkl}^0 \langle \varepsilon_{ij}^0 \rangle \stackrel{p=q}{=} E_{ijkl}^0 \langle \varepsilon_{ij}^0 \rangle. \quad (3.17)$$

Somit erreichen die Spannungen auch für noch so geringe Dichtefaktoren einen endlichen Wert. Wird das Element aber komplett entfernt, so herrscht eine lokale Spannung von null, wodurch die Spannungssingularität beim Wechsel von einem gegen null strebenden Dichtefaktor zu einem Dichtefaktor identisch null erzeugt wird.

Einfacher vorstellbar wird dieses Phänomen bei Verwendung der Homogenisierungsmethode oder bei einer Fachwerksoptimierung. Bei Ersterer ergeben sich die „lokalen“ Spannungen aus den makroskopischen Dehnungen, die das Element erfährt, und den Materialeigenschaften der Mikrostruktur, welche ja den normalen Materialeigenschaften des verwendeten Materials entsprechen und unabhängig von den Optimierungsparametern, also den Abmessungen der Mikrostruktur, sind. Somit erhält man auch hier endliche Werte für die lokalen Spannungen (zumindest streben diese nie gegen null) bei beliebig kleinen Abmessungen der Mikrostruktur. Ähnlich ist der Zusammenhang bei Fachwerkstäben mit verschwindendem Querschnitt. Die Problematik, die sich aus diesem Verhalten für einen Optimierungsalgorithmus ergibt, lässt sich für ein Beispiel mit zwei Designvariablen in Abb. 3.9 erkennen. Dargestellt ist der zulässige Bereich (gepunktete Region) eines Optimierungsproblems mit zwei Designvariablen und Spannungsnebenbedingungen. Auf der linken Seite ist zu erkennen, was unter einem degenerierten Designraum zu verstehen ist. Das Optimum ist mit dem restlichen zulässigen Bereich nur durch eine Linie verbunden, so dass der zulässige Bereich aus Regionen mit unterschiedlichen Dimensionen besteht. Der Optimierungsalgorithmus müsste also den Wert (z.B. den Dichtefaktor) der einen Designvariablen auf null reduzieren, um das Optimum zu erreichen, denn nur dann verschwinden die Spannungen, die ja einen endlichen Wert annehmen und als aktive Nebenbedingung wirken. Praktisch ist dies zum Einen aus numerischen Gründen nicht möglich, zum Anderen basieren klassische Optimierungsalgorithmen auf den KKT-Bedingungen (siehe Abschnitt 2.1.4.2), welche wiederum gewisse Regularitätsbedingungen an das Optimierungsproblem stellen [43], die im vorliegenden Falle verletzt sind. Folglich ist ein Erreichen des Optimums nicht möglich. Außerdem kann für bestimmte Fälle gezeigt werden, dass auch der Punkt S in Abb. 3.9 (links) die KKT-Bedingungen erfüllt (siehe [31]).

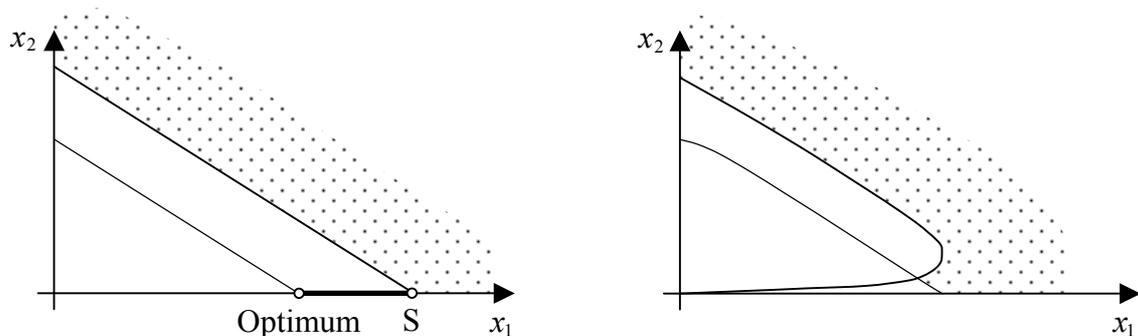


Abb. 3.9 Aufgrund von Spannungsnebenbedingungen degenerierter Designraum bei zwei Designvariablen (links) und relaxiertes Problem (rechts), aus [17]

Aus mechanischer Sicht bedeutet dies z.B. für die SIMP-Methode, dass der Optimierungsalgorithmus nicht in der Lage ist, in bestimmten Regionen mit sehr geringen Dichten das Material vollständig zu entfernen, was jedoch zum Erreichen des wahren Optimums notwendig wäre. Zur Lösung des beschriebenen Spannungs-Singularitäts-Problems existieren Verfahren, die auf verschiedene Weise eine Relaxation (im Sinne der Mathematischen Programmierung) des ursprünglichen Problems erreichen (Abb. 3.9, rechts). Einen recht guten Überblick hierzu findet man in [27]. Um einen kurzen Einblick in die Idee der Relaxation des ursprünglichen

spannungsrestringierten Problems zu erhalten, sollen hier überblicksweise der sogenannte ε -Ansatz und nachfolgend der qp-Ansatz beschrieben werden.

3.3.1.2.1 ε -Relaxations-Ansatz

Üblicherweise würde man eine Spannungsnebenbedingung wie folgt formulieren:

$$\sigma_{ij} < \sigma_1 \quad \text{mit} \quad \sigma_{ij} = \frac{\langle \|\sigma_{ij}\| \rangle}{\rho^q}, \quad \text{falls } \rho > 0. \quad (3.18)$$

Hierbei ist σ_1 eine maximal zulässige Spannung (beispielsweise in einem Zugversuch ermittelt) und $\langle \|\sigma_{ij}\| \rangle$ eine geeignete Norm des Spannungstensors, z.B. die von Mises-Spannung des betreffenden Integrationspunktes. Um die Bedingung $\rho > 0$ zu eliminieren, die dazu dient, die Spannungen in einem Element nur zu betrachten, wenn die Dichte größer als null ist, lässt sich (3.18) umschreiben zu:

$$\left(\langle \|\sigma_{ij}\| \rangle - \rho^q \sigma_1 \right) \rho \leq 0. \quad (3.19)$$

Somit ist die Spannungsnebenbedingung für $\rho=0$, also einem Verschwinden des Elementes, immer erfüllt. Denkt man an eine Stabtragwerksoptimierung, bei der die Designvariablen nicht Dichte-Parameter ρ , sondern die Querschnittsflächen der einzelnen Stäbe sind, so entspricht die Umformulierung in (3.19) einer Betrachtung der Kräfte in den Stäben und nicht der Spannungen (siehe auch [31]).

Die eigentliche Relaxation erfolgt nun in Form einer „Aufweichung“ der Bedingung (3.19) durch Einführung des Parameters ε :

$$\left(\langle \|\sigma_{ij}\| \rangle - \rho^q \sigma_1 \right) \rho \leq \varepsilon \quad \text{mit} \quad \varepsilon^2 = \rho_{min} \leq \rho. \quad (3.20)$$

Für $\varepsilon > 0$ wird das ursprüngliche Problem gestört und die Spannungssingularität beseitigt. Der Designraum ist nicht mehr degeneriert (siehe Abb. 3.9, rechts). Gleichung (3.20) ist für ein hinreichend kleines ρ immer erfüllt und entspricht für $\varepsilon \rightarrow 0$ dem ursprünglichen Problem [31]. Die Begrenzung der minimalen Dichte auf ε^2 ist für praktische Anwendungen nicht unbedingt notwendig. Wie sich zeigen lässt, ist für die Konvergenz bezüglich $\varepsilon \rightarrow 0$ lediglich wichtig, dass ρ kleiner ist als ε [31]. Die Optimierung würde also mit einem genügend großen Wert für ε gestartet werden, um den entarteten Designraum für den Optimierungsalgorithmus zugänglich zu machen. Im weiteren Verlauf der Optimierung kann dann ε schrittweise verkleinert werden, womit eine Annäherung an das ursprüngliche Optimierungsproblem erreicht wird.

3.3.1.2.2 qp-Ansatz

Eine zweite Möglichkeit, eine Relaxation zu erreichen, ist der sogenannte qp-Ansatz (siehe z.B. [27]). Dabei macht man sich zu Nutze, dass die Spannungssingularität in (3.17) für $q < p$ verschwindet, da

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sigma_{ij} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^p}{\rho^q} E_{ijkl}^0 \langle \varepsilon_{ij}^0 \rangle = 0 \quad \text{für } q < p. \quad (3.21)$$

Eine Wahl von $q \neq p$ ist nach [43] jedoch physikalisch nicht begründet und sollte daher als rein mathematisches Werkzeug zur Vermeidung der Spannungssingularität betrachtet werden. In einem Algorithmus umgesetzt würde der qp-Ansatz mit einem hinreichend kleinen q starten, welches dann, ähnlich wie beim ε -Ansatz, allmählich erhöht wird, um schließlich für $q = p$ das Ursprungsproblem zu erhalten.

Einen Vergleich der beiden Relaxationsansätze sowie ausführlichere Beschreibungen, Illustrationen und sehr anschauliche Beispiele findet man in [27].

3.3.1.3 Optimierungsalgorithmen für Strukturoptimierungsprobleme

An Optimierungsalgorithmen für größere Strukturoptimierungsprobleme, wie z.B. ein Topologieoptimierungsproblem, werden besondere Anforderungen gestellt. Zunächst muss ein solcher Algorithmus mit einer sehr großen Anzahl an Designvariablen zurechtkommen. Auch alle Arten von im Allgemeinen nichtlinearen Nebenbedingungen und Zielfunktionen müssen effizient behandelt werden können. Da einzelne Funktionsauswertungen bei Strukturoptimierungen in der Regel sehr teuer sind, sollten solche Berechnungen auf ein Minimum beschränkt sein. Im folgenden Abschnitt wird überblicksweise ein Algorithmus vorgestellt, der die genannten Anforderungen erfüllt und in vielen kommerziellen Strukturoptimierungsprogrammen Anwendung findet.

3.3.1.3.1 Der MMA-Algorithmus

MMA steht für „**M**ethod of **M**oving **A**symptotes“ [165] und beschreibt ein Verfahren zur Lösung allgemeiner Strukturoptimierungsprobleme der Art

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad (3.22)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (3.23)$$

$$\mathbf{x}^u \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^o. \quad (3.24)$$

Die Nebenbedingungen in (3.23) beschreiben beispielsweise Strukturkennzahlen wie die Verschiebung an einem bestimmten Knoten oder Spannungen eines Elementes. In (3.24) sind obere und untere Grenzen definiert, die die Designvariablen direkt betreffen, also z.B. maximale oder minimale Blechdicken oder die Variation des Dichteoperators bei der Topologieoptimierung. Prinzipiell handelt es sich dabei um Nebenbedingungen, die auch durch (3.23) erfasst werden könnten. Es hat sich jedoch herausgestellt, dass durch eine Unterscheidung der Nebenbedingungen eine effizientere Behandlung derselben möglich ist [54]. Der Einfachheit halber werden im Folgenden die Zielfunktion $f(\mathbf{x})$ als auch die Nebenbedingungen $g_i(\mathbf{x})$ gleichermaßen als $f_i(\mathbf{x})$ bezeichnet, wobei $f_0(\mathbf{x})$ die Zielfunktion meint.

Der Algorithmus geht so vor, dass ausgehend von einem Startdesign \mathbf{x}^0 zunächst der Zielfunktionswert und die Ableitungen der Zielfunktion nach den Designvariablen berechnet wer-

den. Ausgehend von diesen Daten werden dann für die Zielfunktion und die Nebenbedingungen (3.23) Näherungsfunktionen berechnet, welche die wichtige Eigenschaft der Konvexität besitzen. Das Optimum des Ersatzproblems ergibt dann den neuen Iterationspunkt \mathbf{x}^{k+1} , an dem mit Hilfe der Ableitungen an diesem Punkte neue Näherungsfunktionen gebildet werden. Zielfunktion und Nebenbedingungen werden durch folgende Näherung 1. Ordnung beschrieben:

$$f_i^k(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}^k) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^k}{U_j^k - x_j^k} + \frac{q_{ij}^k}{x_j^k - L_j^k} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^k}{U_j^k - x_j} + \frac{q_{ij}^k}{x_j - L_j^k} \right) \quad (3.25)$$

mit

$$p_{ij}^k = \begin{cases} (U_j^k - x_j^k)^2 \partial f_i / \partial x_j & \text{für } \partial f_i / \partial x_j > 0 \\ 0 & \text{für } \partial f_i / \partial x_j \leq 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

$$q_{ij}^k = \begin{cases} 0 & \text{für } \partial f_i / \partial x_j \geq 0 \\ -(x_j^k - L_j^k)^2 \partial f_i / \partial x_j & \text{für } \partial f_i / \partial x_j < 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

wobei die Ableitungen an der Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{x}^k$ ausgewertet werden.

Die Parameter U_j^k und L_j^k werden als „moving asymptotes“ bezeichnet und nach einer bestimmten Regel gewählt. Grundsätzlich kann mit Hilfe dieser Parameter eingestellt werden, wie konservativ die Approximation erfolgt. Durch eine Veränderung der Parameter kann auch der Optimierungsprozess bei einer Oszillation stabilisiert oder, falls er monoton und langsam abläuft, relaxiert werden. Näheres hierzu findet man in [165].

Um die Approximation besser zu verstehen, empfiehlt es sich, die Parameter U_j^k und L_j^k zunächst fest zu wählen, und zwar als $L_j^k = 0$ und $U_j^k \rightarrow \infty$. Dadurch ergibt sich ein Spezialfall der MMA, der CONLIN-Algorithmus [54], welcher ebenfalls vielfach in kommerzieller Strukturoptimierungssoftware eingesetzt wird. CONLIN steht für „**C**onvex **L**inearization“ und verwendet folgende Approximation:

$$f_i^k(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}^k) + \sum_{+} \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^k} \cdot (x_j - x_j^k) + \sum_{-} \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^k} \cdot \frac{x_j^k}{x_j} (x_j - x_j^k). \quad (3.28)$$

Hierbei sind in der ersten Summe alle Variablen enthalten, für die $\partial f_i / \partial x_j > 0$ gilt. Diese Variablen werden linear als Taylor-Reihe approximiert. In der zweiten Summe werden die restlichen Variablen zusammengefasst und mit Hilfe ihrer Reziproken linear approximiert. Dies führt letztendlich auf eine konservative, konvexe, gemischte Approximation einer Funktion an einem gegebenen Iterationspunkt [54]. Werden auf diese Weise Funktionen für die Zielfunktion und die Nebenbedingungen definiert, kann das Minimum des dadurch neu definierten Optimierungsproblems

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} f_0^k(\mathbf{x}) \\ & f_i^k(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i > 0 \\ & \mathbf{x}^u \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^o \end{aligned} \quad (3.29)$$

mit einem beliebigen Verfahren bestimmt werden. Besonders bieten sich hierfür aber duale Methoden an ([54], [165]). Das gefundene Optimum ist dann der Ausgangspunkt \mathbf{x}^{k+1} für die nächste Approximation.

Die Arbeitsweise des CONLIN-Algorithmus, als einfacherer Spezialfall der MMA, soll im Folgenden anhand eines kleinen Beispiels aus der Mechanik verdeutlicht werden.

3.3.1.3.2 Beispiel für die Arbeitsweise des MMA- bzw. CONLIN-Algorithmus

Abb. 3.10 zeigt ein einfaches Stabtragwerk, modelliert mit Hilfe von zwei Stabelementen. Die beiden Stabelemente haben die Länge $\sqrt{2}l$ und die Querschnittsfläche A_1 bzw. die Länge l mit der Querschnittsfläche A_2 . Ziel der Optimierung soll es sein, die Querschnittsflächen A_1 und A_2 so zu bestimmen, dass das Gesamtvolumen des Tragwerkes minimiert wird und die Verschiebung in 1-Richtung am Angriffspunkt der Kraft F einen bestimmten Wert nicht überschreitet.

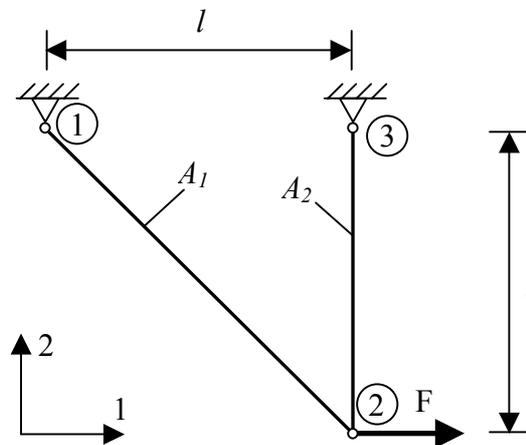


Abb. 3.10 Mit Hilfe des MMA- bzw. CONLIN-Algorithmus zu optimierendes Stabtragwerk

Modelliert man das Tragwerk mittels zweier Stabelemente und wendet den Formalismus der Finiten-Elemente-Methode an, so erhält man für das reduzierte Gesamtgleichungssystem:

$$\frac{E}{l} \begin{bmatrix} \frac{A_1}{2\sqrt{2}} & -\frac{A_1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{A_1}{2\sqrt{2}} & \frac{A_1}{2\sqrt{2}} + A_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Auf der linken Seite des Gleichungssystems finden sich die reduzierte Steifigkeitsmatrix in Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls E des verwendeten Materials, multipliziert mit den Knotenverschiebungen u und v in 1- bzw. 2-Richtung des Lastangriffsknotens (Knoten 2).

Rechts des Gleichheitszeichens steht der reduzierte Knotenkraftvektor. Nach Auflösen des Gleichungssystems ergibt sich für die interessierende Verschiebung des Lastangriffsknotens in 1-Richtung:

$$u_2 = \frac{Fl}{E} \left(\frac{2\sqrt{2}}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right). \quad (3.31)$$

Geht man von kreisrunden Stabquerschnitten mit $r_1 = r_2 = 2 \text{ mm}$ aus, ergibt sich für die Parameterwerte $E = 210000 \text{ MPa}$, $l = 100 \text{ mm}$ und $F = 1000 \text{ N}$ eine Verschiebung von $u_2 \approx 0,145 \text{ mm}$.

Für die Optimierung der Stabradien wird nun das Tragwerksvolumen als Zielfunktion definiert:

$$f(r_1, r_2) = A_1 \sqrt{2} l + A_2 l = \pi l (\sqrt{2} r_1^2 + r_2^2). \quad (3.32)$$

Als Nebenbedingung wird zum Einen eine maximale Verschiebung am Lasteinleitungsknoten in 1-Richtung von $\hat{u}_2 = 0,2 \text{ mm}$ vorgegeben, womit man mit (3.31)

$$g_1 = \frac{Fl}{E\pi} \left(\frac{2\sqrt{2}}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right) - 0,2 \leq 0 \quad (3.33)$$

erhält. Zum Anderen muss das Auftreten einer Instabilität des druckbelasteten, und damit knickgefährdeten, Stabes 2 verhindert werden. Für den vorliegenden Euler'schen Knickfall II ergibt sich somit als weitere Nebenbedingung

$$g_2 = F - \frac{\pi^3 E r_2^4}{4l^2} \leq 0. \quad (3.34)$$

Die Optimierung wird am Punkt $\mathbf{x}^0 = (2 \ 2)^T \text{ mm}$ gestartet, womit sich nach Gleichung (3.28) wegen $\partial f / \partial r_i > 0$ und $\partial g_i / \partial r_j < 0$ folgende Approximationen für die Zielfunktion und die Nebenbedingungen in der ersten Iteration ergeben:

$$\begin{aligned} f^0(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}^0) + \left. \frac{\partial f}{\partial r_1} \right|_{\mathbf{x}^0} (r_1 - r_1^0) + \left. \frac{\partial f}{\partial r_2} \right|_{\mathbf{x}^0} (r_2 - r_2^0) \\ &= 4\pi l (\sqrt{2} \cdot r_1 + r_2 - \sqrt{2} - 1), \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} g_1^0(\mathbf{x}) &= g_1(\mathbf{x}^0) + \left. \frac{\partial g_1}{\partial r_1} \right|_{\mathbf{x}^0} \left(\frac{r_1^0}{r_1} \right) (r_1 - r_1^0) + \left. \frac{\partial g_1}{\partial r_2} \right|_{\mathbf{x}^0} \left(\frac{r_2^0}{r_2} \right) (r_2 - r_2^0) \\ &= \frac{Fl}{E\pi} \left(\frac{2\sqrt{2}}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{2\sqrt{2}-1}{4} \right) - 0,2 \end{aligned} \quad (3.36)$$

und

$$\begin{aligned} g_2^0(\mathbf{x}) &= g_2(\mathbf{x}^0) + \left. \frac{\partial g_2}{\partial r_2} \right|_{\mathbf{x}^0} \left(\frac{r_2^0}{r_2} \right) (r_2 - r_2^0) \\ &= F - \frac{4\pi^3 E}{l^2} \left(5 - \frac{8}{r_2} \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Um diese Approximationen zu erhalten, muss im Allgemeinen eine FE-Analyse zur Bestimmung der Werte der Zielfunktion und Nebenbedingungen am Startpunkt durchgeführt werden. Weiterhin ist es notwendig, dem Algorithmus die Ableitungen der Zielfunktion und der Nebenbedingungen nach den Designvariablen am Startpunkt bereitzustellen, was bei Kenntnis der Steifigkeitsmatrix der Struktur möglich ist. Die Bestimmung des Optimums der Approxi-

mation kann jetzt mit einem geeigneten Optimierungsalgorithmus erfolgen. Hierfür sind keine weiteren, teuren FE-Analysen notwendig. Nutzt man beispielsweise ein SQP-Verfahren (siehe z.B. Abschnitt 2.3.4), so erhält man als Optimalpunkt der Approximation den Punkt $\mathbf{x}^1 \approx (1,66 \ 1,73)^T \text{ mm}$, welcher gleichzeitig Startpunkt für die nächste Iteration ist. Verfährt man weiter nach der beschriebenen Vorgehensweise, so erhält man für die 2., 3. und 4. Iteration die Punkte $\mathbf{x}^2 \approx (1,72 \ 1,60)^T \text{ mm}$, $\mathbf{x}^3 \approx (1,74 \ 1,58)^T \text{ mm}$ und $\mathbf{x}^4 \approx (1,75 \ 1,57)^T \text{ mm}$. Abb. 3.11 (links) verdeutlicht den Verlauf des Optimierungsprozesses. Die dünnen, schwarzen Linien kennzeichnen die Höhenlinien der Zielfunktion $f(\mathbf{x})$. Die fettgedruckten, schwarzen Linien markieren die Nebenbedingungen $g_1(\mathbf{x})$ und $g_2(\mathbf{x})$, und somit die Grenzen des zulässigen Bereiches, welcher sich im oberen, rechten Bereich des Diagramms befindet. Farblich unterschiedlich dargestellt sind im linken Diagramm die approximierten Nebenbedingungen und die zugehörigen ermittelten Optima ($\mathbf{x}^1 \dots \mathbf{x}^4$) der Approximationen für die jeweilige Iteration. Es ist zu erkennen, dass sich der CONLIN-Algorithmus aus dem nicht zulässigen Bereich dem Optimum $\mathbf{x}^* \approx (1,757 \ 1,574)^T \text{ mm}$ nähert. Grund hierfür ist, dass die Approximationen der Nebenbedingung g_1 zwar konvex, nicht jedoch konservativ gegenüber der ursprünglichen Nebenbedingung sind (fettgedruckte Linie). Die ursprüngliche Nebenbedingung (3.33) ist von der Gestalt a/x^2 und weist somit eine stärkere Krümmung als die Approximation (3.36) auf, welche von der Gestalt a/x ist, wobei a eine beliebige Konstante beschreibt. Abb. 3.12 verdeutlicht diesen Sachverhalt.

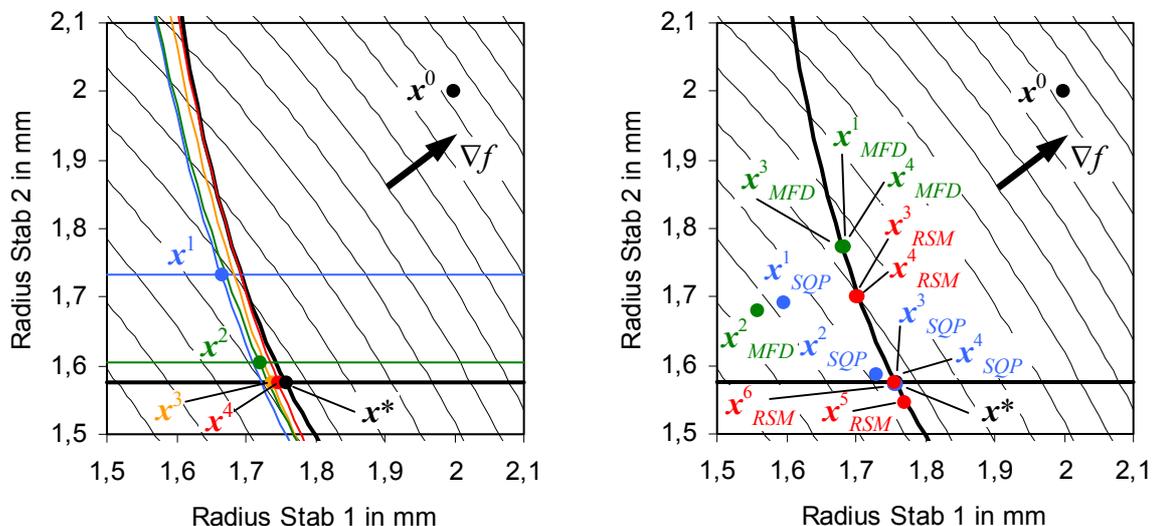


Abb. 3.11 Verlauf der Stabtragwerksoptimierung mit CONLIN-Algorithmus (links) und mit Hilfe anderer Verfahren (rechts)

In Abb. 3.11 (rechts) ist zum Vergleich das Verhalten anderer ausgewählter Optimierungsalgorithmen dargestellt (SQP = Sequential **Q**uadratic **R**esponse-**M**ethod (siehe Abschnitt 2.3.4), MFD = **M**ethod of **F**easible **D**irections (Abschnitt 2.3.5) und RSM = Adaptive **R**esponse **S**urface **M**ethod (Abschnitt 2.4)). Hierbei fällt auf, dass die Methode der zulässigen Richtungen nicht in die Nähe des Optimalpunktes \mathbf{x}^* gelangt und die Iteration an einem zulässigen Punkt abbricht. Die Ergebnisse des ersten und zweiten Iterationsschrittes der RSM liegen mit

$\mathbf{x}_{RSM}^1 = (2,33 \ 2,0)^T \text{ mm}$ und $\mathbf{x}_{RSM}^2 = (2,0 \ 2,33)^T \text{ mm}$ außerhalb des im Diagramm dargestellten Bereiches.

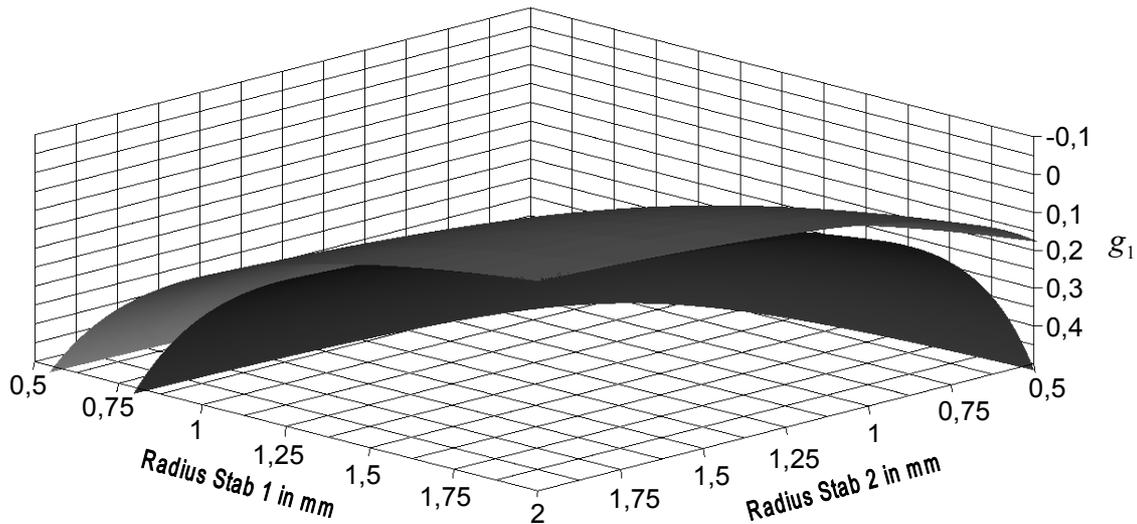


Abb. 3.12 Darstellung der Nebenbedingung g_1 (dunkle Fläche) und der Approximation der Nebenbedingung in der ersten Iteration g_1^0 (hellere Fläche) am Punkt $\mathbf{x}^0 = (2 \ 2)^T \text{ mm}$

3.3.2 Optimalitätskriterienverfahren

Im Gegensatz zu den sensitivitätsbasierten Verfahren benötigen Optimalitätskriterienverfahren keinerlei Ableitungen, vielmehr basieren sie auf Vorstellungen über Eigenschaften der optimalen Struktur. Eine solche Vorstellung ist beispielsweise das „Fully Stressed Design“, bei dem eine Struktur als optimal angesehen wird, wenn alle Komponenten demselben homogenen Spannungszustand unterliegen. Um dies zu erreichen, können verschiedene Wege beschrieben werden. Allen Vorgehensweisen gemein ist jedoch, dass die Bewertung über die Wichtigkeit eines finiten Elementes innerhalb der Struktur anhand des Spannungszustandes des Elementes (oder einer vergleichbaren Größe, z.B. der Verzerrungsenergiedichte) erfolgt. Hierzu wird eine Vergleichsspannung, meist die von Mises-Spannung, herangezogen. Elemente mit geringer Vergleichsspannung werden dann, je nach Verfahren, iterativ gelöscht („hard-kill“-Methoden, ESO-Verfahren, siehe [179]) oder ihre Steifigkeit herabgesetzt („soft-kill“-Methoden). Das Löschen der Elemente erfolgt bei den ESO-Verfahren so lange, bis keine Elemente mehr im Designraum vorhanden sind oder die Steifigkeitsmatrix schlecht konditioniert ist. Dann werden rückblickend die nach jeder Iteration erzeugten Designs hinsichtlich der Zielfunktion bewertet und schließlich das beste ausgewählt.

Großer Vorteil dieser Verfahren ist deren Einfachheit. So ist es ohne größere Probleme möglich, ein solches Verfahren in ein bestehendes FE-System zu integrieren, wenn eine entsprechende Schnittstelle besteht. Ein weiterer Vorteil ist die geringe Anzahl an Iterationen (die bei „soft-kill“-Methoden auch a priori bekannt ist, nicht jedoch bei ESO-Verfahren) gegenüber den sensitivitätsbasierten Methoden, zumal die Rechenzeit in jeder Iteration sinkt, sollte die „hard-kill“-Methode verwendet werden. Aufgrund des Verzichts auf Ableitungen, sind Optimalitätskriterienverfahren auch nicht abhängig von der Konvexität des Optimierungsprob-

lems. Somit können diese Verfahren auch für nichtlineare strukturmechanische Probleme, wie z.B. Kontaktberechnungen und nichtlineare Materialgesetze, eingesetzt werden.

Jedoch gibt es auch eine Reihe von Kritikpunkten. Zunächst einmal sind Optimalitätskriterienverfahren auf bestimmte Optimierungsaufgaben beschränkt. Dies ist im Wesentlichen die Maximierung der Steifigkeit bei vorgegebenem Volumen [168]. Hauptkritikpunkt ist allerdings, dass Optimalitätskriterienverfahren zu nicht optimalen Ergebnissen führen können. Dies trifft insbesondere auf statisch unbestimmte Systeme zu, da hier eine der Grundannahmen des Fully Stressed Designs, wonach das Hinzufügen oder Entfernen von Material in einem Bereich des Gesamtsystems maßgeblich nur die Spannungen in diesem Bereich beeinflusst, nicht zutrifft [74]. Dennoch liegt das Fully Stressed Design auch für derartige Systeme in der Nähe der globalen Optimalstruktur. Es lassen sich jedoch auch Beispiele anführen, bei denen ESO-Methoden komplett versagen. Ein in der jüngeren Literatur ([183], [152], [153]) oft verwendetes Beispielproblem ist in Abb. 3.13 dargestellt.

Verwendet man für die Optimierungsaufgabe als Material Stahl mit den Materialparametern $E = 210000 \text{ N/mm}^2$ und $\nu = 0,3$ und diskretisiert mittels finiter Elemente für den ebenen Spannungszustand mit linearem Elementansatz und voller Integration, so stellt man fest, dass die von Mises-Spannung bei einem Verhältnis der vertikalen Last zur horizontalen Last von z.B. 1 zu 6 im Element a (gemittelt über die vier Integrationspunkte) am geringsten ist. Eine ESO-Methode wird also gerade dieses Element entfernen (siehe Abb. 3.13, rechts), was sich jedoch hinsichtlich der Steifigkeit des Gesamtmodells als Fehler herausstellt. Nutzt man nämlich als Maß für die Steifigkeit den Kehrwert der Verzerrungsenergie des gesamten Modells und setzt diese für das Ausgangsdesign (Abb. 3.13, links) zu 100% an, so beträgt der Kehrwert der Verzerrungsenergie nach Entfernung des Elementes a nur noch 17%. Hätte der Algorithmus statt des Elementes a , beispielsweise das Element b entfernt, so würde die Steifigkeit bei gleicher Volumenabnahme immer noch 98% des Startdesigns betragen. Eine ausführliche numerische Untersuchung des in Abb. 3.13 dargestellten Problems sowohl mit der ESO- als auch mit der SIMP-Methode bei verschiedenen Netzfeinheiten kann man [45] entnehmen.

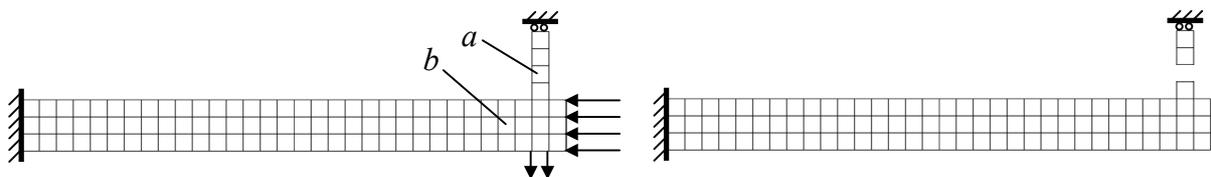


Abb. 3.13 Problemstellung für ESO-Algorithmus (links) und Modell nach 1. Iteration (rechts)

3.3.3 Das Checkerboard-Problem

Unter dem Checkerboard-Problem versteht man das Auftreten schachbrettartiger Dichteverteilungen als Lösung eines Topologieoptimierungsproblems, sowohl bei Verwendung sensitivitätsbasierter Algorithmen als auch bei optimalitätskriterienbasierten Verfahren. Im dargestellten Beispiel (Abb. 3.14) wurde nach der steifsten Struktur (minimale Verzerrungsenergie)

für einen Kragbalken (feste Einspannung am linken Rand und belastet durch Einzelkraft in der Mitte der rechten Seite) mit Hilfe der SIMP-Methode gesucht, wobei nur maximal 40% des zur Verfügung stehenden Bauraumes mit Material gefüllt werden durften. Das Auftreten der schachbrettartigen Muster ist gut zu erkennen. Elemente mit hohen Dichtewerten, also hoher Steifigkeit, wechseln sich mit Elementen niedriger Dichte und damit geringer Steifigkeit ab. Dieses ist ein typisches Ergebnis einer Topologieoptimierung bei Verwendung von finiten Elementen mit linearer Ansatzfunktion. Jedoch ist ein solches Ergebnis unerwünscht, da es die Umsetzung in eine reale Struktur erschwert.

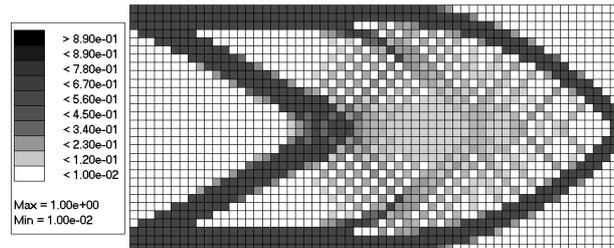


Abb. 3.14 Auftreten von schachbrettartigen Dichteverteilungen („Checkerboarding“) als Topologieoptimierungsergebnis

Der Grund für das Auftreten der Schachbrettmuster ist numerischer Natur und bedingt durch die Finite-Elemente-Methode, in der die Steifigkeitseigenschaften einer schachbrettartigen Struktur bei Verwendung von Elementen mit linearer Ansatzfunktion „überschätzt“ werden. Erklärungen zu diesem Sachverhalt findet man in [40] und sehr detailliert in [90].

Um das Auftreten der Schachbrettmuster zu vermeiden, existieren eine Vielzahl von Verfahren und Möglichkeiten. Die einfachste ist die Verwendung von Elementen mit quadratischer Ansatzfunktion. Hierbei treten, wie u.a. in [40] und [90] gezeigt wird, keine derartigen Strukturen auf, vgl. Abb. 3.15.

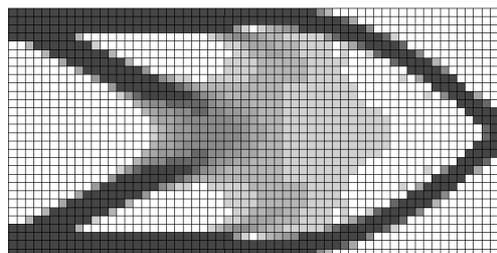


Abb. 3.15 Vermeidung von „Checkerboarding“ durch Nutzung von finiten Elementen mit quadratischer Ansatzfunktion

Jedoch wurden aufgrund der nicht unerheblich höheren Rechenzeit bei Verwendung dieser höherwertigen Elemente Verfahren entwickelt, die auch bei der Nutzung von linearen Elementen eine Checkerboard-Freiheit garantieren. Ein mögliches Verfahren ist die sogenannte „Patch-Methode“. Hierbei werden beispielsweise vier Elemente zu einem „Patch“ zusammengefasst, was zu einer Art „Super-Element“ hinsichtlich der Elementdichten führt, da innerhalb dieses Elementes die Dichten nach einer bestimmten Regel nach jeder Iteration neu berechnet werden. Auch Filtermethoden, die aus der Bildbearbeitung entlehnt sind, können genutzt werden, um ein Checkerboarding zu verhindern. Bei diesen Verfahren wird die Dichte

eines Elementes nach jeder Iteration als gewichtet gemittelter Durchschnittswert der Nachbar-elemente bestimmt. Schließlich gibt es noch die Möglichkeit, eine Checkerboard-Bedingung als Nebenbedingung in die Optimierungsaufgabe einzuführen. Hierzu ist es z.B. denkbar, dass man den Dichteverlauf entlang eines geschlossenen Pfades durch alle an einen Knoten grenzenden Elemente auf seine Monotonie hin überprüft. Ist der Dichteverlauf monoton, so kann kein Checkerboarding im betreffenden Bereich vorliegen. Eine Möglichkeit, dies und auch die anderen genannten Verfahren in einem Algorithmus zu formulieren, findet man in [17] beschrieben. Einen groben Überblick über die angeführten Methoden zur Checkerboard-Vermeidung und auch eine kurze Betrachtung weiterer Herausforderungen in der Topologieoptimierung, wie z.B. der Netzabhängigkeit von Lösungen, wird in [161] gegeben. Abb. 3.16 zeigt den erfolgreichen Einsatz einer Checkerboarding-Vermeidungsstrategie bei Nutzung finiter Elemente mit linearer Ansatzfunktion.

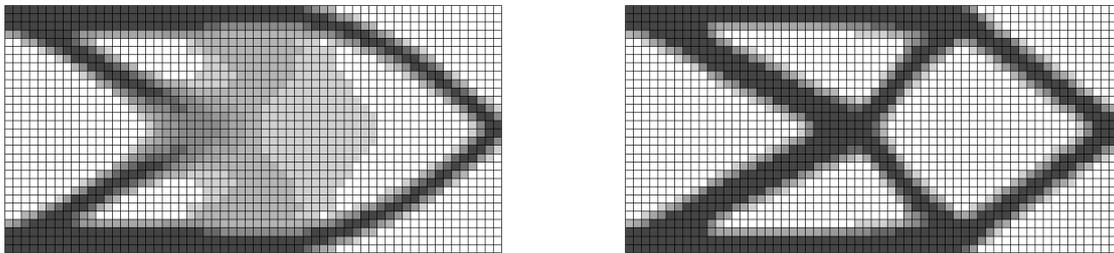


Abb. 3.16 Topologieoptimierungsergebnis mit aktivem Checkerboard-Filter (links) und Ergebnis mit aktivem Checkerboard-Filter und Bestrafungsexponenten $p = 3$ (rechts)

Ein völlig anderer Weg wird in [167] beschrrieben. Hier kommen sechseckige Wachspress- und Voronoi-Finite-Elemente [163] zum Einsatz. Aufgrund ihrer sechseckigen Form sind zwei derartige, benachbarte Elemente immer durch genau zwei Knoten miteinander verbunden, wodurch ein Auftreten von schachbrettmusterartigen Strukturen schon grundsätzlich nicht möglich ist.

3.4 Topographieoptimierung

Die Topographie- oder auch Sickenoptimierung hat meist zum Ziel, blechartige Strukturen durch das Einbringen von Sicken zu versteifen. Auch hierfür existieren unterschiedliche Algorithmen, die sich der Methoden der mathematischen Programmierung bedienen und Optimalitätskriterienverfahren. Beiden Vorgehensweisen ist jedoch gemein, dass die Sicken der mit Schalenelementen vernetzten Struktur durch ein „Herausheben“ bestimmter Knoten des Netzes erzeugt werden (Abb. 3.17).

Die Bestimmung der Verschiebungen einzelner Knoten normal zur Schalenfläche bzw. in eine vom Nutzer vorgegebene Richtung erfolgt in beiden Ansätzen aber auf verschiedene Weise. Nutzt man die Methoden der mathematischen Programmierung, so werden die Knotenverschiebungen und die sich daraus ergebenden Sicken mit Hilfe eines klassischen Optimierungsalgorithmus (z.B. CONLIN, siehe Abschnitt 3.3.1.3) bestimmt, der die Knotenverschiebungen normal zur Schalenfläche direkt als Designvariablen nutzt. Optimalitätskriterienba-

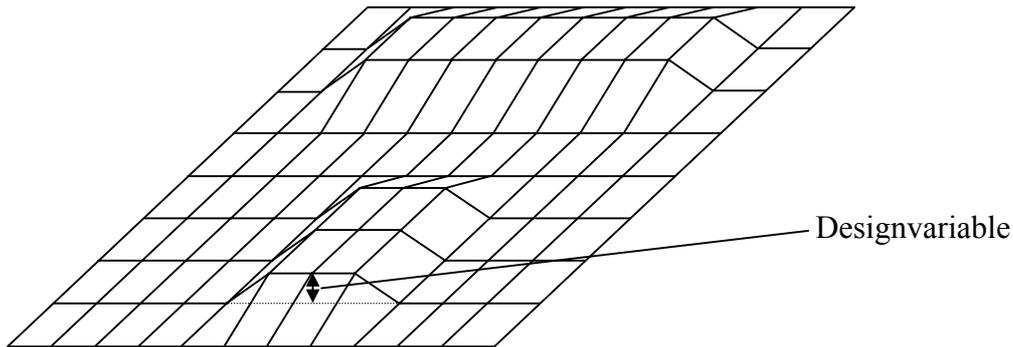


Abb. 3.17 Sicken in blechartiger Struktur mit Knotenverschiebungen normal zur Oberfläche als Designvariablen

sierete Verfahren orientieren die Sicken entlang der Trajektorien der maximalen Biegespannungen [168]. Vorteil dieser Verfahren ist die geringe Netzabhängigkeit der Lösung, allerdings ist der Nutzer auch hier bei der Wahl der Zielfunktion und Nebenbedingungen stark eingeschränkt. Mögliche Zielfunktionen sind die Maximierung der Steifigkeit bei einer statischen Rechnung (Minimierung der Summe der Verzerrungsenergie) und die Maximierung der ersten Eigenfrequenz bei einer modalen Analyse.

Weitere Parameter einer Sickenoptimierung, die unabhängig von der verwendeten Methode durch den Nutzer festgelegt werden müssen, sind die Sickenhöhe und -breite, der Sickenanstiegswinkel (Abb. 3.18) sowie der Versickerungsgrad, der das Verhältnis von versickelter zu ebener Fläche darstellt, bei manchen Programmsystemen auch fest vorgegeben ist und gemäß

$$G_V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{x_{max}} \right| \quad (3.38)$$

definiert ist, wobei n die Anzahl der Designknoten beschreibt, x_i die Knotenverschiebungen in Normalenrichtung darstellen und x_{max} die maximale Sickenhöhe angibt. Hierbei ist darauf zu achten, dass die Sickenhöhe einen kritischen Wert nicht übersteigt, da es sonst zum Ausbeulen der Seitenwände der Sicke kommen kann. Sickenoptimierungsverfahren, die die Möglichkeiten der Mathematischen Programmierung nutzen, haben hier den Vorteil, dass die Beulsicherheit des gesamten Bauteils und somit auch der Sickenwand als Nebenbedingung in die Optimierung einfließen kann.

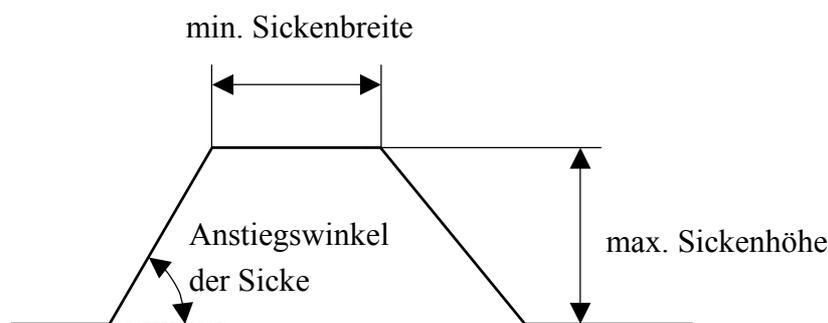


Abb. 3.18 Sickenparameter

3.5 Free-Size-Optimierung

Die Free-Size-Optimierung ist, wie die Topographieoptimierung, auf die Anwendung bei blechartigen Strukturen beschränkt, die mittels Schalenelementen in einem FE-Modell abgebildet werden können. Die Designvariablen der Free-Size-Optimierung sind die Dicken der einzelnen Schalenelemente. Dabei steht dieses Verfahren in Konkurrenz zur Topologieoptimierung, welche auch bei schalenartigen Strukturen Anwendung finden kann. Typischerweise resultiert die Topologieoptimierung in einer fachwerkartigen Struktur, während die Free-Size-Optimierung die Dicken der Schalenelemente gleichmäßiger variiert. In [29] findet sich hierzu ein sehr anschauliches Beispiel. Ein beidseitig gelagerter Träger, bestehend aus mehreren Blechfeldern (idealisiert könnte man von der Geometrie eines Schubfeldträgers sprechen [70]), wird durch eine konstante Flächenlast beansprucht. Die Optimierungsaufgabe besteht darin, die Struktur mit der geringsten Masse bei vorgegebener maximaler Verschiebung des Trägers zu finden. Sowohl für die Topologie- als auch die Free-Size-Optimierung wird diese Optimierung für verschiedene maximal zulässige Verschiebungen durchgeführt. Dabei zeigt sich, dass das Konzept der variablen Blechdicke der Free-Size-Optimierung bei höheren zulässigen Maximalverschiebungen zu einer geringeren Masse des Trägers führt, als dies beim fachwerkartigen Ergebnis der Topologieoptimierung der Fall ist. Werden hingegen nur geringe Verschiebungen zugelassen, so ist eine Fachwerkstruktur hinsichtlich der Masse im Vorteil.

4 Faser-Kunststoff-Verbunde als Werkstoff

Durch die schon beschriebenen Strukturoptimierungsverfahren lässt sich bereits sehr viel Gewicht eines Bauteils einsparen, jedoch kann diese Einsparung noch vergrößert werden, indem verschiedene Materialien miteinander kombiniert werden und sich dadurch im Idealfall die positiven Eigenschaften der einzelnen Komponenten ergänzen. Ein Beispiel für derartige Materialkombinationen sind Faserverbundwerkstoffe, welche aus einem Trägermaterial, der sogenannten Matrix, und Fasern aufgebaut sind. Zwischen Trägermaterial und Faser sind die verschiedensten Werkstoffkombinationen denkbar. So können beispielsweise Metallfasern in einer Keramik oder Beton eingebettet sein (z.B. bei drahtverstärktem Glas bzw. Stahlbeton), aber auch die Einbettung von Metallen in Gummi ist denkbar (z.B. Autoreifen). Einer der ältesten Konstruktionswerkstoffe der Menschheit, das Holz, ist ebenfalls ein faserverstärkter Verbundwerkstoff. Hierbei bildet Lignin den Grundwerkstoff, in den hochfeste Cellulosefasern eingebettet sind. Besonderes Augenmerk wird in dieser Arbeit aber auf Faser-Kunststoff-Verbunde gerichtet. Dieser Werkstoffverbund hat den großen Vorteil, eine sehr geringe Dichte bei hoher Festigkeit aufzuweisen. Dabei sind meist Kohle-, Glas- oder Aramid-Fasern in Polyamid- oder Epoxidharz eingebettet (Abb. 4.1).

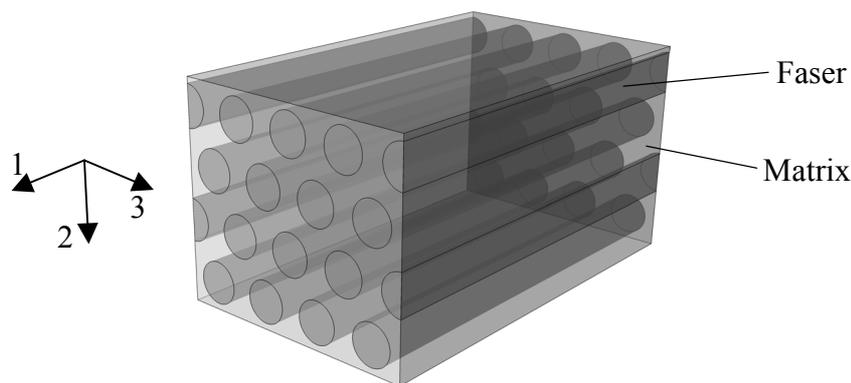


Abb. 4.1 Faser-Kunststoff-Verbund

4.1 Historisches zu Werkstoffverbunden

Die Kombination günstiger Werkstoffeigenschaften in einem Verbundmaterial (im englischen „Composites“) ist keineswegs eine neuzeitliche Idee. Bereits vor etwa 3000 Jahren wurden in Ägypten Lehmziegel durch Pflanzenfasern verstärkt, wie sogar in der Bibel erwähnt wird (2. Buch Mose, Kapitel 5, Vers 7). Und auch in China fertigte man bereits vor 2500 Jahren Gefäße aus in Baumlack getränktem Hanf an. Im 19. Jahrhundert entwickelte der französische Gärtner Joseph Monier (1823-1906) den durch Stahldrähte (den später nach ihm benannten Monier-Eisen) verstärkten Beton. Hierdurch wurden erst die heute üblichen Bauweisen mit großen Spannweiten bei geringem Materialeinsatz möglich. Weitere Entwicklungen gab es dann zu Beginn des 20. Jahrhunderts mit in Phenolharz getränkten Asbestfasern. In Deutsch-

land verwendeten gegen Ende der 1930er Jahre die Flugzeugkonstrukteure Reimar (1915-1994) und Walter Horten (1913-1998) mit Papier verstärkte Phenolharzplatten für die Tragflächen ihrer Flugzeuge. Anfangs der 1940er Jahre wurden dann auch schon Bootsrümpfe und weitere Flugzeugkomponenten aus Glasfaser-Kunststoff-Verbunden gefertigt, wobei die Glasfasern ursprünglich aus der Elektrotechnik stammten. Durch die Entwicklung hochfester Kohlenstofffasern in den 1960er sowie der Aramid-Faser im Jahre 1973 verbreiterte sich die Anwendungspalette der Faser-Kunststoff-Verbunde besonders im Luftfahrtbereich. Ab diesem Zeitpunkt wuchs die Verbreitung dieser Werkstoffe beständig auch im maritimen, dem Automobil-, dem Medizin- und dem Freizeit- und Spitzensportbereich, aber auch im Bauwesen und der Elektrotechnik.

In heutiger Zeit sind Faser-Kunststoff-Verbunde insbesondere aus dem Luftfahrtbereich nicht mehr wegzudenken. Beispielsweise tragen bei modernen Verkehrsflugzeugen wie der Boeing 787 oder dem Airbus A380 Faser-Kunststoff-Verbunde bis zu 50% zur Gesamtmasse des Flugzeugs bei [35]. Weitere interessante Aspekte zur Geschichte der Faser-Verbundwerkstoffe findet man in [159].

4.2 Die Fasern

In einem Faser-Verbund-Werkstoff übernehmen hauptsächlich die Fasern die lasttragende Funktion und garantieren eine hohe Steifigkeit sowie Festigkeit. Für Letzteres sind starke atomare Bindungskräfte notwendig. Verlangt man gleichzeitig noch ein möglichst geringes Fasergewicht, so führt dies schnell auf die Elemente Bor, Kohlenstoff und Silizium als mögliche Faserwerkstoffe. Für die höhere Festigkeit der Faser gegenüber dem Rohwerkstoff sind im Wesentlichen vier Gründe maßgebend:

- **Größeneffekt:** Vergleicht man ein großes Werkstoffvolumen bzw. eine große Querschnittsfläche eines Werkstoffes mit einem kleinen Werkstoffvolumen bzw. einer kleinen Werkstoffquerschnittsfläche, so ist die absolute Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Fehlstellen im großen Werkstoffquerschnitt höher, was wiederum zu einer geringeren Festigkeit des größeren Werkstoffquerschnittes führt. Darüber hinaus können in kleinen Querschnitten auch nur kleine, weniger kritische Fehlstellen auftreten. Wie sich in Versuchen herausstellte, steigt die Festigkeit der Faser mit sinkendem Faserdurchmesser [159]. Extrapoliert man die Faserfestigkeit für einen gegen null gehenden Faserdurchmesser, so erreicht man auch die sich theoretisch aus der atomaren Bindungskraft ergebende Festigkeit.
- **Orientierungseffekt:** Bedingt durch das Faserherstellungsverfahren wirken die stärksten Bindungskräfte zwischen den einzelnen Faserteilchen in der Faserlängsrichtung. Hierdurch kommt es jedoch zu einer Verringerung der Festigkeit und Steifigkeit quer zur Faserrichtung, wodurch die Faser selbst ein anisotropes Materialverhalten aufweist.
- **Kerbfreiheit:** Risse quer zur Faserlängsrichtung erzielen durch ihre Kerbwirkung eine besonders starke Verringerung der Festigkeit. Jedoch wirken sich auch hier die Fa-

serfertigungsverfahren günstig aus, da diese eher unkritische Längs- als kritische Querrisse bedingen. Darüber hinaus ist es möglich, eventuell vorhandene Querrisse nach der Fertigung durch Ätzen zu entfernen.

- **Eigenspannungen:** Besonders bei Glasfasern kommt es während der Abkühlung nach der Fertigung zur Entstehung von Druckeigenspannungen an der Faseroberfläche, die durch die verzögerte Abkühlung des Faserkerns induziert werden. Diese Druckeigenspannungen wirken dann der Entstehung und Ausbreitung von Rissen entgegen.

In [146] findet sich für verschiedene Materialien ein interessanter Vergleich der theoretisch erreichbaren Steifigkeits- und Festigkeitswerte mit den Werten des Werkstoffes in Faserform und in „Normalform“. Beispielsweise erreicht man mit Glas in Faserform 100% der theoretischen Steifigkeit und 36% der theoretischen Festigkeit, wohingegen der Werkstoff in Normalform nur 87,5% der theoretisch ermittelten Steifigkeit und nur 0,5% der Festigkeit besitzt.

Bei der Verwendung von Faser-Kunststoff-Verbunden wird zwischen lang- (bzw. endlos-) und kurzfaserverstärkten Kunststoffen unterschieden. Typischerweise haben Kurzfasern eine Länge von unter 1,5 mm. Hierzu findet man in der einschlägigen Literatur auch leicht abweichende Angaben. In kurzfaserverstärkten Kunststoffen liegen die Fasern meist zufällig und ungeordnet vor, was zu isotropen Materialeigenschaften des Verbundes und einer leichten Verarbeitung z.B. im Spritzgießverfahren führt. In dieser Arbeit geht es jedoch ausschließlich um endlosfaserverstärkte Kunststoffe, in denen die Fasern gerichtet geordnet vorliegen.

4.2.1 Faserarten

Neben Naturfasern, wie Haaren, Wolle, Hanf, Flachs, Stroh und Palmenfasern, unterscheidet man außerdem Polymerfasern (z.B. Aramid-, Polyethylen-, Polypropylenfasern), Metallfasern, Kohlenstofffasern und anorganische Fasern (z.B. Glas-, Quarz-, Asbestfasern). Größere Bedeutung bei Faser-Kunststoff-Verbunden haben aber nur Kohlenstoff-, Glas- und Aramidfasern, weshalb im Weiteren nur auf diese Faserarten eingegangen wird. Informationen zu anderen Fasermaterialien findet man beispielsweise in [159].

4.2.2 Faserherstellung und -eigenschaften

Tabelle 4.1 gibt einen kurzen Überblick über die Materialparameter einiger Fasermaterialien (nach [147] und [159]). Interessant aus Sicht des Leichtbaus sind aber nicht nur die absoluten Steifigkeits- und Festigkeitswerte, sondern auch auf die jeweilige Faserdichte bezogene Kennwerte. So ist beispielsweise die spezifische Festigkeit der hochfesten Kohlenstofffaser aufgrund der geringeren Dichte des Kohlenstoffs größer als die der S-Glas-Faser. Es ist auch möglich, verschiedene Fasern in einem Gewebe miteinander zu kombinieren. So werden z.B. oftmals Kohle- und Aramidfasern in sogenannten Hybridgeweben vermischt, was aufgrund der hohen Zähigkeit der Aramidfaser zu einer größeren Schlagfestigkeit führt.

Detaillierte Informationen zu weiteren Faserarten, den Anwendungsbereichen der einzelnen Faserarten sowie zu deren Vor- und Nachteilen, finden sich in [159]. Im Folgenden wird nun

kurz auf die Herstellungsverfahren der drei am weitesten verbreiteten Fasermaterialien eingegangen.

Tabelle 4.1 Materialparameter einiger Fasermaterialien

Fasermaterial	Dichte $\left[\frac{g}{cm^3}\right]$	Zugfestigkeit $\left[\frac{N}{mm^2}\right]$	E-Modul (längs) $\left[\frac{N}{mm^2}\right]$	E-Modul (quer) $\left[\frac{N}{mm^2}\right]$	G-Modul $\left[\frac{N}{mm^2}\right]$	Quer- kontraktions- zahl
Kohlenstoff (hochfest)	1,74	3430	230000	28000	50000	0,23
Kohlenstoff (hochmodulig)	1,81	2450	392000	15200	28600	0,2
E-Glas	2,54	2400	73000	wie längs (isotrop)	29920	0,22
S-Glas	2,49	4500	86810	wie längs (isotrop)	35578	0,22
Siliciumcarbid	2,55	2450-2950	176000- 196000	keine Angabe	keine Angabe	keine Angabe
Aluminiumoxid	3,9	3100	380000	keine Angabe	keine Angabe	keine Angabe
Bor	2,36	3400	380000	keine Angabe	keine Angabe	keine Angabe
Aramid (hochzäh)	1,44	2800	67000	keine Angabe, aber anisotrop	keine Angabe	keine Angabe
Aramid (hochsteif)	1,45	2800	130000	5400	1450	0,32
Polyethylen	0,97	2700-3600	89000- 116000	keine Angabe, aber anisotrop	keine Angabe	keine Angabe
Flachs	1,5	750	37500	keine Angabe	keine Angabe	keine Angabe
Bananenfaser	1,0	700	25000	keine Angabe	keine Angabe	keine Angabe

4.2.2.1 Herstellung von Kohlenstofffasern

Heutzutage werden Kohlenstofffasern in der Regel in einem 4-stufigen Prozess hergestellt. Ausgangsmaterial sind entweder Polyacrylnitril-Fasern (PAN-Fasern), ein Produkt aus der Textilindustrie, oder durch Schmelz-Spinnen zu Fasern verarbeitetes Pech. Im ersten Schritt, dem Stabilisieren, werden die Ausgangsfasern bei 180-350°C in oxidativer Atmosphäre und unter Zugspannung in eine unschmelzbare Struktur überführt. In Stufe zwei, dem Karbonisieren, werden bei Temperaturen von bis zu 1500°C und hohen Aufheizraten unter Stickstoffatmosphäre Nicht-Kohlenstoffatome von der Faser abgespalten. In der 3. Stufe, der Graphitierung, werden die späteren Eigenschaften der Faser maßgeblich festgelegt. Abhängig von der Graphitierungstemperatur (2000-3000°C) und der Verstreckung während der vorangegangenen Arbeitsschritte lässt sich die Orientierung der Graphitebenen parallel zur Faserachse und damit der E-Modul der Faser variieren. Dieser Prozess erfolgt unter einer Schutzgasatmosphäre (z.B. Argon). Abschließend erfolgt in der 4. Stufe eine Oberflächenbehandlung der Faser, bei der Oberflächenoxide erzeugt werden, die später die Haftung zur Matrix verbessern.

4.2.2.2 Herstellung von Glasfasern

Ausgangsstoff für die Glasfaserherstellung ist Siliziumdioxid (Quarz), welches unter Zugabe geringer Mengen Metalloxide bei etwa 1400-1600°C aufgeschmolzen wird. Anschließend werden aus sehr kleinen Spinn Düsen mit hoher Geschwindigkeit die Elementarglasfäden ausgezogen, die sich schnell abkühlen und unter Zugabe einer Schlichte zu einem Spinnfaden zusammengeführt werden.

4.2.2.3 Herstellung von Aramidfasern

Bei „Aramid“ handelt es sich um einen Oberbegriff für aromatische Polyamide, welche durch einen hohen Anteil aromatischer Strukturelemente gekennzeichnet sind. Wie auch bei anderen Chemiefasern besteht der Herstellungsprozess aus den Schritten Polymerisation, Verspinnen und Verstrecken. Genauere Informationen hierzu mit zahlreichen Abbildungen unter Angabe der Strukturformeln findet man in [50].

4.3 Die Matrix

Hauptaufgaben der Matrix in einem Verbundwerkstoff sind die Fixierung der Fasern in einer gewünschten Position, die Einleitung und Verteilung der Kräfte auf die Fasern, Stützung der Fasern bei Druckbeanspruchung und Schutz der Fasern vor Umwelteinflüssen. Aber auch mechanische Lasten werden von der Matrix mitgetragen, insbesondere in Faserquerrichtung. Als Matrixmaterialien kommen hauptsächlich Polymere zum Einsatz. Für Hochtemperaturanwendungen werden aber auch Keramiken, Metalle und Kohlenstoff als Matrixwerkstoff eingesetzt, sollen hier allerdings nicht näher betrachtet werden. Informationen zu diesen Matrixwerkstoffen findet man in [50]. Die polymeren Matrixsysteme können in die Duroplasten, Thermoplasten und Elastomere unterteilt werden.

4.3.1 Duroplaste

Duroplaste sind die am häufigsten eingesetzten Matrixsysteme. Vor der Verarbeitung werden meist mehrere Komponenten miteinander gemischt, die in einer chemischen Reaktion nach Tränkung der Fasern aushärten. Ein Aufschmelzen oder Schweißen der Duroplaste sowie ein Auflösen in Lösungsmitteln ist dann nicht mehr möglich. Als Vorteile der Duroplaste sind der relativ hohe E-Modul, eine geringe Kriechneigung und die sehr gute thermische und chemische Beständigkeit zu nennen. Allerdings zeigen Duroplaste ein sprödes Bruchverhalten und sind schwierig zu recyceln.

Zu den Duroplasten gehören die Epoxid-, Vinylester-, Phenol- und ungesättigte Polyesterharze sowie die Polyimide (letztere hochtemperaturbeständig bis 300 °C).

4.3.2 Thermoplaste

Thermoplaste sind im Gegensatz zu Duroplasten plastisch verformbar und können bei hohen Temperaturen in einem reversiblen Vorgang aufgeschmolzen werden, was zu einer guten Schweiß- und Recyclbarkeit führt. Insbesondere bei höheren Temperaturen neigen Thermoplaste eher zum Kriechen, da sie im Gegensatz zu den Duroplasten nicht aus räumlich vernetzten Molekülen bestehen, sondern die polymeren Makromoleküle durch mechanische Verbindungen wie Verhakungen und Verschlaufungen verknüpft sind.

Zu den Thermoplasten gehören z.B. Polypropylen (PP), Polyamide, Polyethylenterephthalat (PET), Polybutylenterephthalat, Polysulfone- und sulfide, Polyphenylensulfid, Polyetherimid und Polyetherketon, wobei die fünf Letztgenannten wieder zu den hochtemperaturbeständigen Polymermatrizen zählen.

4.3.3 Elastomere

Elastomere besitzen, im Gegensatz zu den bereits erwähnten Polymermaterialien, nur schwach vernetzte Molekülketten, woraus eine hohe Dehnfähigkeit mit Reißdehnungen von mehreren hundert Prozent folgt. Aufgrund dieser hohen Dehnfähigkeit eignen sich Elastomere nicht für druckbeanspruchte Anwendungen, sondern lediglich für Zugbeanspruchungen, z.B. bei Keilriemen oder Autoreifen. Elastomere sind nicht löslich, nicht schmelzbar und damit auch nicht schweißbar. Zu ihnen zählen Polyurethane, Silikone und Gummi.

4.3.4 Die Glasübergangstemperatur

Der Glasübergangsbereich trennt zwei unterschiedliche Zustandsbereiche von Kunststoffen. Unterhalb des Glasübergangsbereiches liegt der spröde energieelastische Glasbereich, darüber der weiche entropieelastische Bereich (Gummibereich). Im Glasübergangsbereich ändern sich die Eigenschaften des Kunststoffes. Beispielsweise steigt der thermische Ausdehnungskoeffizient, die spezifische Wärmekapazität, die Bruchdehnung und die mechanische Dämpfung. Die Steifigkeit und Festigkeit sinken hingegen sehr stark ab. Die Temperatur, bei der nun die Änderung dieser Eigenschaften am größten ist, wird als Glasübergangstemperatur T_g bezeichnet und stellt einen wichtigen Materialparameter für polymere Matrixwerkstoffe dar. Die

Glasübergangstemperatur ist dabei nicht mit der Schmelztemperatur des Werkstoffes zu verwechseln.

Der Einsatzbereich von Duroplasten liegt unterhalb der Glasübergangstemperatur, der von Elastomeren darüber. Duroplaste und Elastomere beginnen aufgrund ihrer Molekülvernetzung auch nicht, ab einer bestimmten Temperatur zu schmelzen, sondern zersetzen sich. Thermoplaste können sowohl unterhalb (amorphe Thermoplaste) als auch oberhalb der Glasübergangstemperatur (teilkristalline Thermoplaste) eingesetzt werden. Für weitere Details siehe [159].

Abschließend sind in der nachfolgenden Tabelle 4.2 einige wichtige Materialparameter (nur Anhaltswerte) ausgewählter polymerer Matrixwerkstoffe zusammengefasst (nach [50] und [159]).

Tabelle 4.2 Materialparameter einiger Matrixwerkstoffe (Duro- und Thermoplaste)

Polymer	Dichte $\left[\frac{g}{cm^3}\right]$	Zugfestigkeit $\left[\frac{N}{mm^2}\right]$	E-Modul $\left[\frac{N}{mm^2}\right]$	Bruchdehnung [%]	T_g [°C]	Quer- kontraktions- zahl
Venylesterharz	1,14	83	4000	6	130	keine Angabe
Epoxidharz	1,2	90	3400	5	140	0,35
Ungesättigtes Polyesterharz	1,22	60	4800	2	125	keine Angabe
Polypropylen (PP)	0,9	37	1300	650	-18	0,4
Polyamid 6.6 (Hexamethylen- diamin)	1,14	57	1700	170	50	0,4
Polyphenylensulfid (PPS)	1,35	78	3300	3-20	88	keine Angabe

4.4 Recycling-Möglichkeiten von Faser-Kunststoff-Verbunden

Wie bei allen Kunststoffen sollte auch bei Faser-Kunststoff-Verbunden bereits bei der Herstellung an die Recyclingfähigkeit des Materials gedacht werden. Je nach verwendetem Matrixwerkstoff (Duro-/Thermoplast, Elastomer) ist der Verbundwerkstoff mehr oder weniger gut recyclebar. Bei Thermoplasten ist eine Überführung in eine Schmelze oder Lösung und damit eine erneute Umformung möglich. Duroplaste und Elastomere werden typischerweise zerkleinert und als Füllstoff (z.B. in Verpackungen) weiterverwertet. Kunststoffgranulat wird auch bei der Stahlherstellung in Hochöfen eingeblasen, wo es als Reduktionsmittel dient. Prinzipiell hängen die Recycling-Möglichkeiten eines Verbundes immer von der

Faser-/Matrixkombination ab. Beispielsweise gibt es bei Verwendung von Cyanatharzen in Verbindung mit Kohlenstoff- oder Glasfasern die Möglichkeit, den Verbund chemisch aufzulösen. Alle daraus hervorgehenden Reaktionsprodukte (Verstärkungsfasern und Chemikalien) können dann z.B. als begehrte Grundstoffe in der chemischen Industrie vollständig wiederverwertet werden [11]. Im großindustriellen Rahmen kann auch eine Verwendung von zerkleinerten Faser-Kunststoff-Verbunden als Zusatzstoff bei der Zementherstellung sinnvoll sein [109].

5 Beschreibung des mechanischen Verhaltens geschichteter Faser-Kunststoff-Verbunde

An einem Volumenelement, bestehend aus einem beliebigen Werkstoff, lassen sich im allgemeinen Fall neun verschiedene Spannungskordinaten definieren (Abb. 5.1).

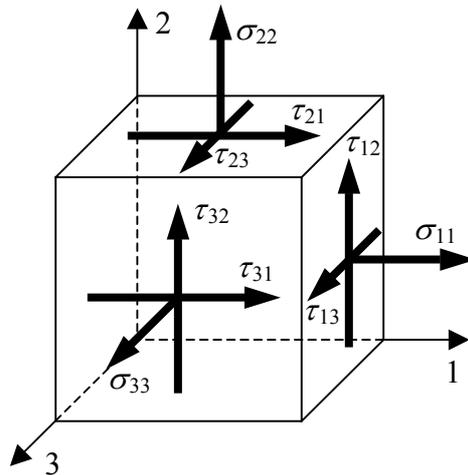


Abb. 5.1 Spannungskordinaten am Volumenelement

Diese Spannungen verursachen in der Regel Verzerrungen am Volumenelement, welche sich beispielsweise durch den Green-Lagrange'schen Verzerrungstensor mit Hilfe des Deformationsgradienten \mathbf{F} und des Einheitstensors \mathbf{I} beschreiben lassen [23]:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}). \quad (5.1)$$

Da \mathbf{F} ein materielles Linienelement $d\mathbf{a}$ der Basiskonfiguration (BKFG) in die Momentankonfiguration $d\mathbf{x}$ gemäß $d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}$ abbildet, lässt sich (5.1) auch umschreiben zu

$$G_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_k}{\partial a_j} - \delta_{ij} \right). \quad (5.2)$$

Mittels des Verschiebungsvektors $u_k = x_k - a_k$ bzw. dessen Gradienten erhält man für (5.2) auch

$$G_{ij} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_k}{\partial a_i} + \delta_{ki} \right) \left(\frac{\partial u_k}{\partial a_j} + \delta_{kj} \right) - \delta_{ij} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial a_i} \frac{\partial u_k}{\partial a_j} + \delta_{ki} \frac{\partial u_k}{\partial a_j} + \delta_{kj} \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \right) \quad (5.3)$$

und schließlich

$$G_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \right). \quad (5.4)$$

Ist der Verschiebungsgradient $\partial u_i / \partial a_j$ hinreichend klein, so kann das Produkt der Verschiebungsgradienten in (5.4) vernachlässigt werden. Weiterhin kann man zeigen (siehe z.B. [23]), dass dann auch der Lagrange'sche Verschiebungsgradient $\partial u_i / \partial a_j$ durch den Euler'schen Verschiebungsgradienten $\partial u_i / \partial x_j$ ersetzt werden kann, womit man aus (5.4) letztendlich den linearisierten Verzerrungstensor (oftmals auch als infinitesimaler Verzerrungstensor bezeichnet) ε_{ij} erhält:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (5.5)$$

Der Cauchy-Spannungstensor σ_{ij} , aufgebaut aus den neun Spannungskordinaten am Volumenelement (Abb. 5.1), ist nun mit dem infinitesimalen Verzerrungstensor ε_{ij} bei einem linear elastischen Material über einen Tensor 4. Stufe, den Elastizitätstensor, verknüpft:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (5.6)$$

Ein Tensor 4. Stufe besitzt 81 Koordinaten, welche hier die Materialparameter darstellen, die die Beziehung zwischen Spannung und Dehnung beschreiben. In [2] wird gezeigt, dass aus dem Momentengleichgewicht mit Hilfe des Divergenztheorems und der lokalen Gleichgewichtsbedingung (1. Cauchy-Bewegungsgleichung) die Symmetrie des Cauchy'schen Spannungstensors (im klassischen Kontinuum) folgt. Selbiges ergibt sich auch aus dem Drehimpulserhaltungssatz [88]. Die Symmetrie des linearisierten Verzerrungstensors erkennt man anhand dessen Definitionsgleichung (5.5), womit dann gilt:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}. \quad (5.7)$$

Das durch (5.6) beschriebene lineare Gleichungssystem reduziert sich dadurch von neun auf sechs voneinander unabhängige Gleichungen mit sechs Variablen, was auf $6 \times 6 = 36$ unabhängige Konstanten des Elastizitätstensors führt, der damit symmetrisch bezüglich der ersten und letzten beiden Indizes wird:

$$E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk}. \quad (5.8)$$

Setzt man weiterhin die Existenz eines quadratischen elastischen Potentials

$$W = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (5.9)$$

voraus (Hyperelastizität), aus dem man durch zweimaliges Differenzieren nach dem Verzerrungstensor gemäß

$$E_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = E_{klij} \quad (5.10)$$

wieder den Elastizitätstensor erhält, so wird klar, dass durch die Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge auch die Symmetrie $E_{ijkl} = E_{klij}$ angenommen werden kann und sich die Anzahl der voneinander unabhängigen Koordinaten des Elastizitätstensors auf 21 verringert.

Betrachtet man das in Abb. 4.1 dargestellte Volumenelement eines Faser-Kunststoff-Verbundes, so erkennt man, dass es Symmetrieebenen gibt. Beispielsweise kann man sich eine Ebene normal zur 1-Achse vorstellen, an der das Volumenelement gespiegelt werden kann, ohne dass sich die Grundstruktur und damit das Materialverhalten ändert. Diese Spiegelung entspricht z.B. einer Drehung des Elastizitätstensors um 180° um die 3-Achse, was durch Multiplikation mit einem entsprechenden Drehtensor erreicht werden kann. Die transformierten Materialparameter müssen dann in beiden Systemen dieselben sein. Dies ist nur möglich, wenn einige Koordinaten des Elastizitätstensors den Wert null annehmen, da aufgrund der 180° -Drehung z.B. $\bar{E}_{1123} = -E_{1123}$ gelten muss, was nur für $\bar{E}_{1123} = -E_{1123} = 0$ erfüllt ist. In Abb. 4.1 lassen sich noch zwei weitere Symmetrieebenen finden, die senkrecht zur ersten stehen. Mit derselben Argumentation wie bei Drehung um die 3-Achse lässt sich zeigen, dass weitere Koordinaten des Elastizitätstensors zu null werden und sich schließlich die Anzahl unabhängiger Materialparameter auf neun reduziert, d.h.

$$E_{ijkl} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & E_{2222} & E_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & E_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & E_{2323} & 0 & 0 \\ & sym. & & & E_{1313} & 0 \\ & & & & & E_{1212} \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

womit sich ein sogenanntes orthotropes Materialverhalten beschreiben lässt.

Eine weitere Besonderheit des in Abb. 4.1 dargestellten Faser-Kunststoff-Verbund-Ausschnittes ist, dass in Schnittflächen parallel zur 2-3-Ebene isotropes Materialverhalten auftritt, womit die 1-Achse eine Symmetrieachse darstellt (transversale Isotropie). Somit müssen weitere Koordinaten des Elastizitätstensors voneinander abhängig bzw. identisch sein (Herleitung siehe [58]) und es verbleiben schließlich 5 unabhängige Materialparameter.

Aus Gründen der einfacheren Handhabbarkeit ist es üblich, die vier Indizes, die die Koordinaten des Elastizitätstensors kennzeichnen, auf zwei zu reduzieren [35], womit die Spannungs-Dehnungs-Beziehung dann in Voigt'scher Notation für ein transversal isotropes Material mit der 1-Achse als Symmetrieachse

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & E_{22} & E_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & E_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(E_{22} - E_{23}) & 0 & 0 \\ & sym. & & & E_{55} & 0 \\ & & & & & E_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

lautet. Üblich ist auch die Darstellung in verzerrungsexpliziter Form mit den Ingenieurkonstanten Steifigkeits-/ Schubmoduln und Querkontraktionszahlen, welche z.B. in [35] und [3] anschaulich hergeleitet wird:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Hierbei sind die in (5.13) verwendeten Bezeichnungen für die E-Moduln in 1, 2- und 3-Richtung E_1, E_2 und E_3 nicht mit den Koordinaten des Elastizitätstensors zu verwechseln. Weiterhin muss für (5.13) aufgrund der transversalen Isotropie $G_{13} = G_{12}$, $E_2 = E_3$ und $\nu_{21} = \nu_{31}$ gelten. Sehr detaillierte Informationen bezüglich der Symmetrieeigenschaften des Elastizitätstensors und weitere Übersichten finden sich in [3].

Es sei noch angemerkt, dass die in (5.12) und (5.13) beschriebenen Größen aufgrund der Verwendung der technischen Verzerrungen $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ formal ihre Tensoreigenschaften verlieren. Alle Tensortransformationen müssen daher mit Hilfe der tensoriellen Verzerrungen ε_{ij} durchgeführt werden. Hiernach kann dann wieder eine Umrechnung in die technischen Verzerrungen erfolgen.

Oftmals werden in der deutschsprachigen Literatur die Steifigkeitsgrößen transversal isotroper Faser-Kunststoff-Verbunde auch symbolisch indiziert, wobei „ \perp “ für „quer zur Faserrichtung“ und „ \parallel “ für „in Faserrichtung“ steht:

$$E_1 = E_{\parallel}, \quad E_2 = E_3 = E_{\perp}, \quad G_{12} = G_{13} = G_{\perp\parallel}, \quad G_{23} = G_{\perp\perp}. \quad (5.14)$$

Zur Herleitung einer Beziehung zwischen den aufgebrachten Lasten und den resultierenden Verzerrungen in einem schichtweise aufgebauten Faser-Kunststoff-Verbund (Laminat) werden im Wesentlichen zwei Theorien verwendet. Dies ist zum Einen die schubstarre, klassische Laminattheorie (CLT = **C**lassical **L**aminate **T**heory), welche auch in vielen Laminat-Berechnungsprogrammen genutzt wird, und zum Anderen die Schubdeformationstheorie 1. Ordnung (FSDT = **F**irst-**O**rdner **S**hear **D**eformation **T**heory). Darüber hinaus war in früheren Zeiten auch die gegenüber der CLT ungenauere, aber einfacher handhabbare Netztheorie sehr weit verbreitet (siehe z.B. [159], [173]), die die Steifigkeit der Matrix vernachlässigt und mit deren Hilfe nur Scheibenprobleme berechnet werden können. Hier soll im Folgenden zunächst auf die klassische Laminattheorie und anschließend auf die Schubdeformationstheorie 1. Ordnung eingegangen werden. Einen Überblick über eine Reihe weiterer Laminattheorien gibt unter Verweis auf eine Vielzahl an Literaturstellen [62] und auch [145].

5.1 Die klassische Laminattheorie (CLT)

Bei der klassischen Laminattheorie handelt es sich um eine Erweiterung der Kirchhoff'schen Plattentheorie ([166], [70]) auf schichtweise aufgebaute Verbundwerkstoffe mit hinreichend großen Längs- zu Dickenabmessungen. Für homogene, isotrope Platten liefert die Kirchhoff'sche Theorie gute Ergebnisse, falls das Verhältnis der maximalen Durchbiegung der Platte zur Plattendicke kleiner als 0,2 und das Verhältnis der Plattendicke zur kleinsten Abmessung in der Plattenebene kleiner als 0,1 ist. Bei Laminaten sollte dieses Verhältnis jedoch noch geringer sein, da bei diesen Werkstoffen aufgrund der oftmals sehr geringen Schubsteifigkeit auch schon bei Dicken- zu Längenverhältnissen von unter 0,05 nicht zu vernachlässigende Schubdeformationen auftreten [3]. Ist dies nicht der Fall, sollte für dickere Laminat auf die FSDT (Abschnitt 5.2) zurückgegriffen werden. Weitere Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der CLT sind nach [159]:

- Die Einzelschichten sind eben und parallel zur Mittelebene des Schichtverbundes orientiert.
- Die Dicke der einzelnen Schichten ist konstant.
- Die Einzelschichten sind perfekt miteinander verklebt und lösen sich während der Belastung nicht voneinander.
- Die Verformungen sind klein.
- Die Querschnitte des Laminates bleiben während der Verformung eben ($\Rightarrow \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$).
- Das Materialverhalten des Laminates ist linear elastisch.
- Jede Schicht des Verbundes wird als quasi-homogen angesehen, besitzt jedoch orthotrope Materialeigenschaften.
- Ein ebener Spannungszustand liegt vor ($\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$).
- Verzerrungen in Laminatdickenrichtung sind vernachlässigbar klein ($\varepsilon_z = 0$).

Ziel der folgenden Abschnitte zur klassischen Laminattheorie ist es, eine Beziehung zwischen den Schnittlasten eines gekoppelten Scheibe-/Platte-Faserverbundelementes und den herrschenden Verzerrungen bzw. Krümmungen herzustellen. Hierfür werden zunächst die kinematischen Verhältnisse zwischen Verschiebungen und Verzerrungen des Gesamtlaminats bestimmt, welche für die jeweils verwendete Laminattheorie charakteristisch sind. Weiterhin wird ein Zusammenhang zwischen den Spannungen und Verzerrungen einer Einzelschicht über die lokalen Schichtsteifigkeiten benötigt. Diese Schichtsteifigkeiten müssen für eine spätere Zusammenfassung zu einer Gesamtsteifigkeit des Laminates, welches alle Schichten enthält, in ein gemeinsames, globales Koordinatensystem transformiert werden. Durch Einsetzen und Zusammenfassen der Spannungs-Verzerrungsbeziehung im globalen Koordinatensystem in die Schnittlastendefinition der Scheibe und Platte erhält man schließlich den oben erwähnten, gesuchten Zusammenhang.

5.1.1 Spannungs-Verzerrungsbeziehungen einer Einzelschicht

Jede k -te Einzelschicht des Laminates kann als transversal isotrop betrachtet werden und genügt demnach folgender Beziehung:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Allgemein können aus gedanklichen uniaxialen Zug- bzw. Schubversuchen die Beziehungen der Koordinaten der Nachgiebigkeitsmatrix zu den Ingenieurskonstanten (Elastizitäts- und Schubmoduln sowie Querkontraktionszahlen), wie sie in (5.13) verwendet sind, ermittelt werden. Durch Invertierung der Nachgiebigkeitsmatrix erhält man die Steifigkeitsmatrix und damit im Speziellen auch die Beziehungen der Koordinaten der Schichtsteifigkeitsmatrix ${}^k Q$ in (5.15) zu den Ingenieurskonstanten der Einzelschicht:

$$\begin{aligned} {}^k Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & {}^k Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ {}^k Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & {}^k Q_{66} &= {}^k G_{12}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

wobei wegen der Symmetrie in (5.13)

$$\left(\frac{\nu_{ij}}{E_i} \right) = \left(\frac{\nu_{ji}}{E_j} \right) \quad \text{mit } i \neq j \quad (5.17)$$

gilt [3].

Nach Voraussetzung sind die Schubspannungen und Scherungen in Laminatdickenrichtung vernachlässigbar klein, obwohl die entsprechende Schubsteifigkeit des Laminates einen endlichen Wert annimmt. Allerdings kann man durch Auflösen der Gleichgewichtsbedingung

$$\operatorname{div} \sigma_{ij} = 0 \quad (5.18)$$

nach den Schubspannungskordinaten gemäß

$$\begin{aligned} \tau_{13}(x_3) &= - \int_{-\frac{t}{2}}^{x_3} \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} \right) dx_3 \\ \tau_{23}(x_3) &= - \int_{-\frac{t}{2}}^{x_3} \left(\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} \right) dx_3 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Schubspannungen durch Integration über die Schichtdicke t berechnen, die für veränderliche Spannungen σ_1 , σ_2 und τ_{12} von null verschiedene Werte annehmen. Diese Inkonsistenz wird aber in der CLT akzeptiert und die Querschubspannungen können näherungsweise über die Gleichgewichtsbedingungen (5.19) bestimmt werden [3].

5.1.2 Bestimmung der Steifigkeitsparameter einer Einzelschicht

Für das Aufstellen der Steifigkeitsmatrix einer Einzelschicht ${}^k\mathbf{Q}$ mit Hilfe der Gleichungen (5.16) ist es notwendig, die E-Moduln der Einzelschicht in Faserrichtung und in Faserquer- richtung sowie den Schubmodul zu kennen. Diese Werte können natürlich mit Hilfe von ent- sprechenden Versuchen bestimmt werden. Jedoch liegen längst nicht für jede Faser-Matrix- Kombination entsprechende Versuchswerte für den Verbund vor. Vielmehr sind meist nur die separaten Steifigkeitswerte der Faser und der Matrix bekannt. Um aus diesen die E-Moduln einer uniaxial orientierten Schicht zu bestimmen, ist ein geeignetes Umrechnungsmodell von- nöten, welches die Faser- und Matrixmoduln geeignet miteinander verknüpft. Ein solches Modell ist die sogenannte „Mischungsregel“.

Um den E-Modul der Schicht in Faserrichtung zu bestimmen, stellt man sich den Faser- Matrix-Verbund als eine Parallelschaltung der Faser- und Matrixsteifigkeit gemäß Abb. 5.2 (mittig) vor. Bei Berücksichtigung des Faservolumengehaltes φ_F der gesamten Einzelschicht, also des Verhältnisses von Faser- zu Schichtvolumen, gilt dann für den E-Modul der Schicht in Faserrichtung

$${}^kE_1 = E_{\parallel} = \varphi_F E_{Faser_{\parallel}} + (1 - \varphi_F) E_{Matrix} \quad (5.20)$$

mit dem E-Modul $E_{Faser_{\parallel}}$ der Faser in Faserlängsrichtung und dem E-Modul E_{Matrix} der Mat- rix.

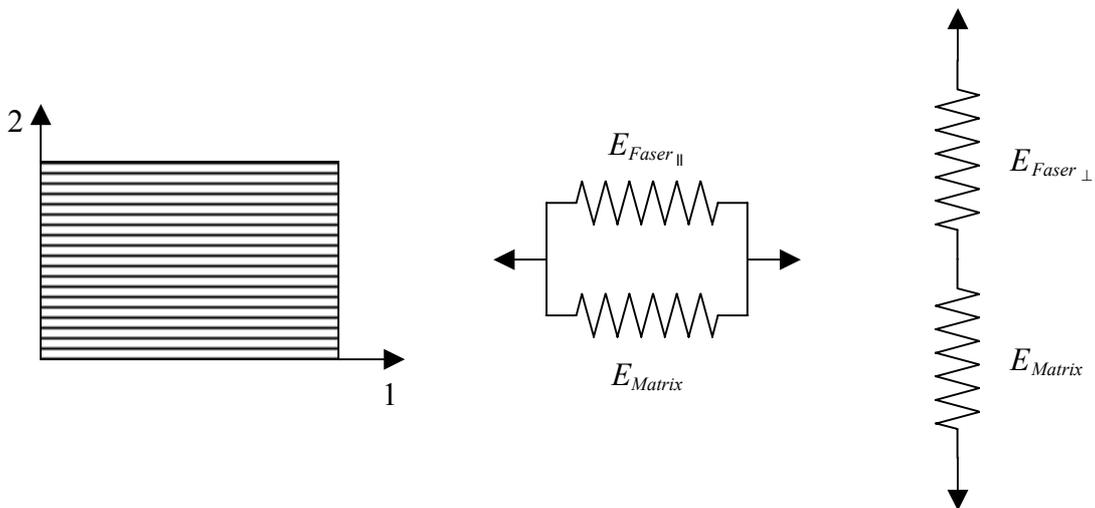


Abb. 5.2 Modellhafte Parallel- (mittig) und Reihenschaltung (rechts) von Faser und Matrix zur Ermittlung der Steifigkeitsgrößen einer Einzelschicht (links) nach der Mischungsregel

Quer zur Faserrichtung ergibt sich der E-Modul der Einzelschicht aus der Modellvorstellung der Reihenschaltung beider Steifigkeiten (Abb. 5.2, rechts). Aus

$$\frac{1}{E_{\perp}} = \frac{1}{E_{Faser_{\perp}}} \varphi_F + \frac{1}{E_{Matrix}} (1 - \varphi_F) \quad (5.21)$$

erhält man nach Umstellung

$${}^k E_2 = E_{\perp} = \frac{E_{Faser_{\perp}} \cdot E_{Matrix}}{\varphi_F E_{Matrix} + (1 - \varphi_F) E_{Faser_{\perp}}} \quad (5.22)$$

Zur Bestimmung des Schichtschubmoduls lässt sich ebenfalls die Modellvorstellung einer Hintereinanderschaltung der Schubmoduln von Faser und Matrix anwenden. Nach Abb. 5.3 ergibt sich die Schubverzerrung einer Einzelschicht aus den entsprechend des Faservolumenanteils gemittelten Schubverzerrungen der Faser und der Matrix zu

$$\gamma_{12_{Gesamt}} = \varphi_F \gamma_{12_{Faser}} + (1 - \varphi_F) \gamma_{12_{Matrix}} \quad (5.23)$$

und damit aus dem Hooke'schen Gesetz $\tau_{12} = G_{12} \gamma_{12}$

$$\frac{\tau_{12}}{{}^k G_{12}} = \varphi_F \frac{\tau_{12}}{G_{12_{Faser}}} + (1 - \varphi_F) \frac{\tau_{12}}{G_{12_{Matrix}}} \quad (5.24)$$

Nach dem Herauskürzen der Schubspannung τ_{12} lässt sich (5.24) nach dem Schubmodul G_{12} auflösen und man erhält mit $G_{Faser} = G_{12_{Faser}}$ (für den hier betrachteten ebenen Spannungszustand) und $G_{Matrix} = G_{12_{Matrix}}$ (aufgrund der Isotropie der Matrix)

$${}^k G_{12} = G_{\perp\parallel} = \frac{G_{Faser} \cdot G_{Matrix}}{\varphi_F G_{Matrix} + (1 - \varphi_F) G_{Faser}} \quad (5.25)$$

als Schubsteifigkeit einer beliebigen Einzelschicht.

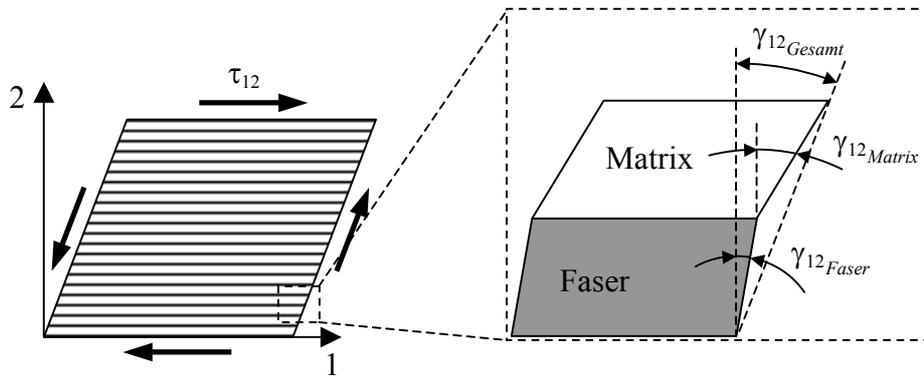


Abb. 5.3 Modellvorstellung zum Schubverhalten von Faser und Matrix zur Bestimmung der Schubsteifigkeit einer unidirektionalen Einzelschicht

Zur Querkontraktionszahl ${}^k \nu_{\perp\parallel}$ des Faser-Matrix-Verbundes mit der Breite ${}^k b$ einer Einzelschicht gelangt man ebenfalls über die entsprechend des Faservolumenanteils gewichtete Zusammensetzung der Verzerrung quer zur Faserrichtung bei Belastung in Faserrichtung aus den einzelnen Querverzerrungen der Fasern und Matrix. Aus der Definition

$${}^k \nu_{\perp\parallel} = -\frac{{}^k \varepsilon_{\perp}}{{}^k \varepsilon_{\parallel}} \quad (5.26)$$

folgt mit

$${}^k \varepsilon_{\perp} = -\frac{\Delta {}^k b}{{}^k b} = -\frac{\Delta {}^k b_{Faser} + \Delta {}^k b_{Matrix}}{{}^k b} = -\left[\varphi_F \varepsilon_{\perp_{Faser}} + (1 - \varphi_F) \varepsilon_{\perp_{Matrix}} \right] \quad (5.27)$$

und den Querkontraktionszahlen des Faser- und Matrixmaterials

$$\nu_{Faser} = -\frac{\varepsilon_{\perp Faser}}{\varepsilon_{\parallel Faser}}, \quad \nu_{Matrix} = -\frac{\varepsilon_{\perp Matrix}}{\varepsilon_{\parallel Matrix}} \quad (5.28)$$

sowie der Voraussetzung, dass die Verzerrungen von Faser und Matrix in Faserrichtung gleich groß sind, d.h. $\varepsilon_{\parallel} \equiv \varepsilon_{\parallel Faser} \equiv \varepsilon_{\parallel Matrix}$, schließlich

$${}^k \nu_{12} = {}^k \nu_{\parallel\perp} = \varphi_F \nu_{Faser} + (1 - \varphi_F) \nu_{Matrix}. \quad (5.29)$$

Über die Gleichung (5.17) lässt sich dann ${}^k \nu_{21}$ bzw. $\nu_{\perp\parallel}$ berechnen.

Da die Steifigkeitswerte der Faser sinnvollerweise wesentlich höhere Werte annehmen als die der Matrix, lässt sich aus den Gleichungen (5.20) und (5.22) erkennen, dass bei den in der praktischen Anwendung üblichen hohen Faservolumengehalten von $\varphi_F \geq 50\%$ der Schicht-E-Modul E_{\parallel} in Faserrichtung vom Faser-E-Modul und der Schicht-E-Modul E_{\perp} quer zur Faserrichtung vom E-Modul der Matrix dominiert wird.

In experimentellen Untersuchungen wurde jedoch festgestellt, dass die durch die Gleichungen (5.22) und (5.25) berechneten Moduln insbesondere bei hohen Faservolumenanteilen von experimentellen Ergebnissen abweichen. Gründe hierfür sind beispielsweise Fehlstellen im Material und Querkontraktionsbehinderungen der Matrix durch die steifen Fasern. Zur Korrektur und Berücksichtigung dieser Effekte existieren neben äußerst aufwendigen analytischen auch einfacher handhabbare semi-empirische Modelle. Zur letzten Gruppe gehört auch das Halpin-Tsai-Modell (siehe z.B. [75], [76]), welches für eine genauere Bestimmung des E-Moduls quer zur Faserrichtung und des Schubmoduls einer Einzelschicht genutzt werden kann. Hierbei ergibt sich der gesuchte Modul M mit Hilfe der entsprechenden Faser- und Matrix-Moduln M_{Faser} bzw. M_{Matrix} aus folgender Beziehung:

$$M = M_{Matrix} \frac{1 + \xi \eta \varphi_F}{1 - \eta \varphi_F} \quad \text{mit} \quad \eta = \frac{(M_{Faser} / M_{Matrix}) - 1}{(M_{Faser} / M_{Matrix}) + \xi}. \quad (5.30)$$

Der Parameter ξ ist u.a. abhängig von der Fasergeometrie und -anordnung und dient zur Anpassung der berechneten Steifigkeitswerte an experimentelle Daten. Bezüglich detaillierterer Informationen zur Herleitung der Schicht-Moduln und -Querkontraktionszahlen sei auf [3] und [159] verwiesen. Hinweise zu weiteren semi-empirischen Bestimmungsgleichungen der Schicht-Moduln findet man auch in [35], [91] und [126].

5.1.3 Transformation der Steifigkeiten der Einzelschichten in ein gemeinsames Koordinatensystem

Die Beziehung (5.15) mit der Steifigkeitsmatrix ${}^k \underline{Q}$ einer Einzelschicht k gilt für das ${}^k 1, {}^k 2$ -Schichtkoordinatensystem, wobei die ${}^k 1$ -Richtung der Faserrichtung entspricht und um den Winkel ${}^k \theta$ gegenüber dem globalen 1,2-Koordinatensystem gedreht ist (Abb. 5.4). Um alle Schichten des Laminates in einer globalen Steifigkeitsmatrix \underline{Q} zusammenfassen zu können, die dann einer Parallelschaltung der einzelnen Schichtsteifigkeiten entspricht, müssen die

Steifigkeiten ${}^k\mathbf{Q}$ der einzelnen Schichten zunächst in ein gemeinsames Koordinatensystem transformiert werden, um sie dann aufsummieren zu können.

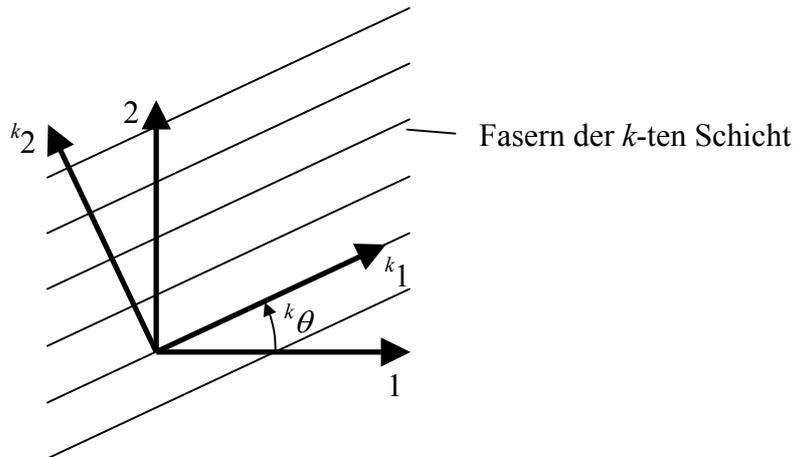


Abb. 5.4 Lokales ${}^k1, {}^k2$ -Koordinatensystem mit der k1 -Richtung in Faserrichtung der k -ten Schicht und globales 1,2-Koordinatensystem

Die Transformation eines polaren Tensors 4. Stufe erfolgt allgemein nach [156] gemäß:

$$\bar{Q}_{ijkl} = S_{im} S_{jn} S_{ko} S_{lp} Q_{mnop} \quad (5.31)$$

mit dem Drehtensor

$$S_{ij} = S_{kl} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

bei Drehung in mathematisch positiver Richtung. Durch eine derartige Transformation (Einzelheiten und Anmerkungen siehe Anhang B.1), welche für die Steifigkeitsmatrix ${}^k\mathbf{Q}$ einer jeden Schicht in ähnlicher Form durchzuführen ist, erhält man die Steifigkeitsmatrizen ${}^k\bar{\mathbf{Q}}$ der Schichten im globalen 1,2-Koordinatensystem, welche dann später zur Bestimmung der Gesamtsteifigkeiten des Verbundes genutzt werden. Nachfolgend werden nun die im globalen Koordinatensystem angegebenen Schnittlasten, Spannungen und Verzerrungen entsprechend der VDI-Richtlinie 2014 (Blatt 3) mit x , y und z indiziert. Demnach entspricht die 0° -Richtung des lokalen 1,2-Schichtkoordinatensystems der x -Richtung im globalen Koordinatensystem.

5.1.4 Verschiebungs-Verzerrungsbeziehungen des Schichtverbundes

Abb. 5.5 zeigt die geometrischen Verhältnisse an einem gekoppelten Platte-/Scheibe-Element bei kleinen Deformationen und Voraussetzung der Kirchhoff-Hypothese.

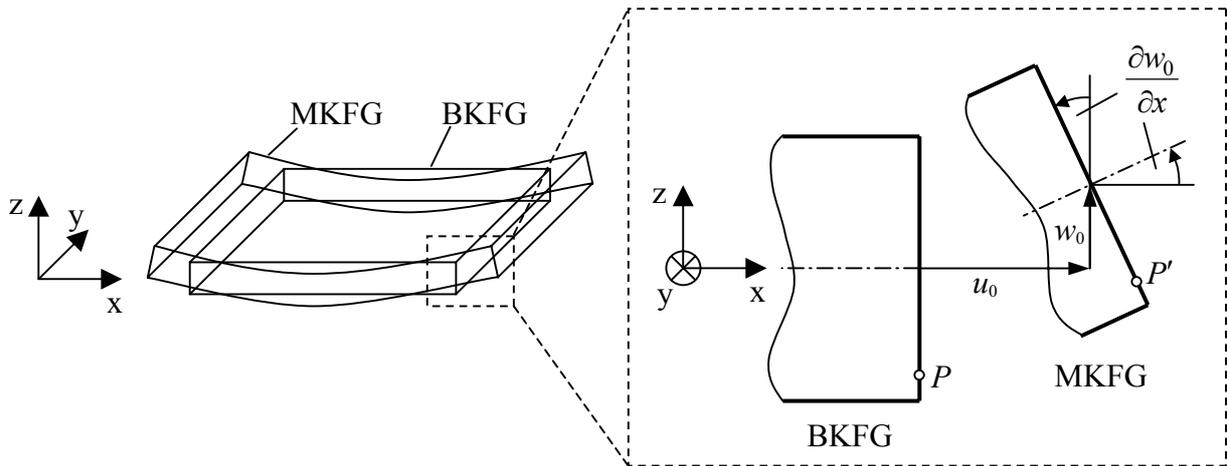


Abb. 5.5 Randbereich eines schubstarrten, gekoppelten Platte-/Scheibe-Elements vor (BKFG) und nach der Deformation (MKFG)

Addiert man die aus dem Scheibenproblem resultierenden Verschiebungen u_0 und v_0 in der x,y -Ebene und die aus dem Plattenproblem resultierenden Verschiebungen w_0 , so erhält man für die Gesamtverschiebungen eines Punktes $P(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} u &= u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v &= v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w &= w_0. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Über

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \tag{5.34}$$

erhält man dann folgende Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \tag{5.35}$$

mit den Membranverzerrungen der Mittelebene

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \tag{5.36}$$

sowie den Krümmungen

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (5.37)$$

5.1.5 Scheiben- und Plattenschnittlasten als Spannungsergebnende

Da die Spannungen aufgrund der unterschiedlichen Schichtsteifigkeiten trotz gleicher Verzerungen von Schicht zu Schicht variieren, ist es zweckmäßig mit den integralen Effekten der Spannungen, also den Kräften und Momenten zu arbeiten. Abb. 5.6 zeigt die aus den Spannungen an einem Flächenelement einer Einzelschicht mit der Länge dx und Breite dy sowie der Dicke t resultierenden Kräfte und Momente, wobei die Indizierung der Momente den Spannungen folgt, aus denen sie resultieren.

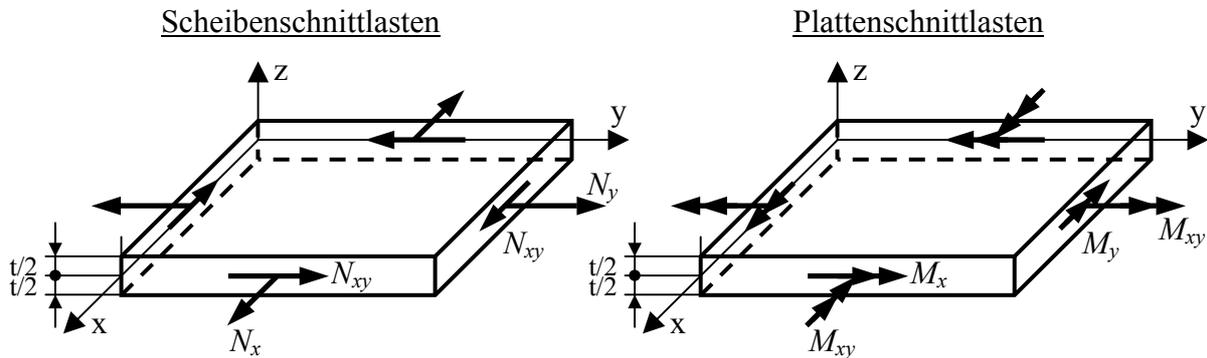


Abb. 5.6 Scheiben- und Plattenanteil der Schnittlasten am Schichtenelement

Die Kräfte und Momente pro Einheitslänge der k -ten Einzelschicht ergeben sich wie folgt aus den Spannungen:

$${}^k N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz, \quad {}^k N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz, \quad {}^k N_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz \quad (5.38)$$

und

$${}^k M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz, \quad {}^k M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz, \quad {}^k M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz. \quad (5.39)$$

Bei mehrschichtigen Laminaten (bestehend aus n Schichten), wie sie in der Praxis Verwendung finden, ergeben sich dann die Gesamtschnittlasten als Summe der einzelnen Schicht-schnittlasten:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \quad \text{sowie} \quad \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz, \quad (5.40)$$

wobei z_k jeweils die Koordinaten der Schichtübergänge gemäß Abb. 5.7 bezeichnet.

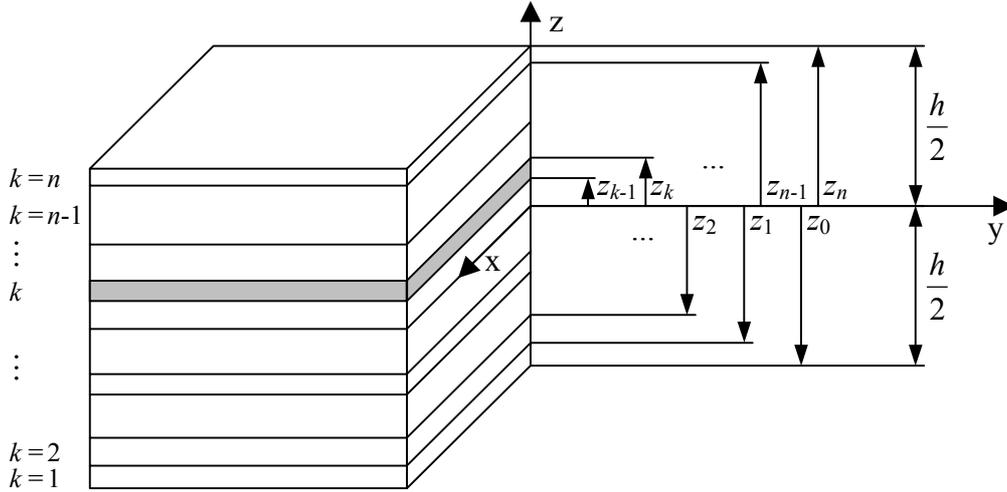


Abb. 5.7 Mehrschichtiges Laminat aus n Schichten mit Definition der Dickenkoordinaten der k -ten Schicht (nach [35])

5.1.6 Schnittlasten-Verzerrungsbeziehungen des Gesamtverbundes

Die Gleichungen (5.40) lassen sich mit Hilfe von (5.35) und den ins globale Koordinatensystem transformierten Gleichungen (5.15) wie folgt umschreiben:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz + \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right\} \quad (5.41)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz + \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 dz \right\}. \quad (5.42)$$

Die in das globale Koordinatensystem transformierten Schichtsteifigkeiten ${}^k\bar{Q}$ sowie die Membranverzerrungen ε^0 und Krümmungen κ können, wie in (5.41) und (5.42) geschehen, vor die Integrale gezogen werden, da diese nicht von der Koordinate z in Laminatdickenrichtung abhängen. Weiterhin ändern sich von Schicht zu Schicht nur die Schichtsteifigkeiten ${}^k\bar{Q}$, während sich ε^0 und κ auf den Gesamtverbund beziehen, so dass die Verzerrungen und Krümmungen aus den Summen in (5.41) und (5.42) ausgeklammert werden können:

$$\begin{aligned} N &= \left[\sum_{k=1}^n {}^k\bar{Q} \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz \right] \varepsilon^0 + \left[\sum_{k=1}^n {}^k\bar{Q} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right] \kappa \\ &= \left[\sum_{k=1}^n {}^k\bar{Q} \cdot (z_k - z_{k-1}) \right] \varepsilon^0 + \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n {}^k\bar{Q} \cdot (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right] \kappa = \mathbf{A} \cdot \varepsilon^0 + \mathbf{B} \cdot \kappa \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \left[\sum_{k=1}^n {}^k \bar{Q} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right] \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \left[\sum_{k=1}^n {}^k \bar{Q} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 dz \right] \boldsymbol{\kappa} \\
&= \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n {}^k \bar{Q} \cdot (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right] \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \left[\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n {}^k \bar{Q} \cdot (z_k^3 - z_{k-1}^3) \right] \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\kappa}.
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Zusammenfassend ergibt sich letztendlich folgende Gleichung für die Schnittlasten-Verzerrungs-Beziehung des Gesamtverbundes:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ \hline B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \tag{5.45}$$

Hierbei sind

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n {}^k \bar{Q}_{ij} (z_k - z_{k-1}) \tag{5.46}$$

die Scheibensteifigkeiten,

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n {}^k \bar{Q}_{ij} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \tag{5.47}$$

die sogenannten Koppelsteifigkeiten und

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n {}^k \bar{Q}_{ij} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \tag{5.48}$$

die Platten- oder Biegesteifigkeiten des Gesamtverbundes. Ist der Laminataufbau bezüglich der Mittelfläche des Verbundes symmetrisch, so erkennt man aus (5.47), dass dann die Matrix der Koppelsteifigkeiten \mathbf{B} zu null wird. Dies bedeutet, dass dann Scheiben- und Plattenproblem voneinander entkoppelt sind und es beispielsweise aufgrund von Kräften, die in der Scheibenebene wirken, nicht zu einer Verbiegung des Gesamtverbundes aus der Scheibenebene heraus kommen kann. Illustrierte Beispiele für nicht entkoppelte Probleme finden sich in [3] und [123].

5.1.7 Zusammenfassung des Vorgehens bei der klassischen Laminattheorie

Die Vorgehensweise der klassischen Laminattheorie zur Berechnung geschichteter Faser-Kunststoff-Verbunde lässt sich zusammenfassend in die folgenden Schritte unterteilen:

1. Berechnung der Schichtsteifigkeitsmatrix ${}^k Q_{ij}$ der k-ten Einzelschicht aus den Schichtsteifigkeitsparametern ${}^k E_1$, ${}^k E_2$, ${}^k G_{12}$ und ${}^k \nu_{12}$ mit Hilfe der Gleichungen (5.16).

2. Bestimmung der Schichtsteifigkeitsmatrizen ${}^k\bar{Q}_{ij}$ im globalen Koordinatensystem durch Transformation der Schichtsteifigkeitsmatrizen ${}^kQ_{ij}$ mit Hilfe der Gleichungen (B.10).
3. Bestimmung der Scheiben-, Platten- und Koppelsteifigkeiten A_{ij} , D_{ij} und B_{ij} des Gesamtverbundes aus den Schichtsteifigkeiten und den Abständen z_k der Einzelschichten zur Laminatmittelfläche entsprechend den Gleichungen (5.46) bis (5.48).
4. Berechnung der Verzerrungen und Krümmungen der Laminatmittelfläche durch Umstellung der Gleichung (5.45) nach den Verzerrungen und Krümmungen und Einsetzen der aufgetragenen Lasten.
5. Berechnung der Verzerrungen jeder Einzelschicht im globalen Koordinatensystem über die Beziehung (5.35).
6. Transformation der Verzerrungen der Einzelschichten aus dem globalen Koordinatensystem in lokales Schichtkoordinatensystem (siehe Anhang B.2) und (sofern benötigt) Berechnung der Spannungen im lokalen Schichtkoordinatensystem nach Gleichung (5.15).
7. Beurteilung der Festigkeit jeder Einzelschicht mit Hilfe der ermittelten Spannungen und Verzerrungen im lokalen Schichtkoordinatensystem und eines geeigneten Festigkeitskriteriums.

5.2 Die Schubdeformationstheorie 1. Ordnung (FSDT)

Ähnlich der CLT, die von der Kirchhoff'schen Plattentheorie abgeleitet ist, wird die FSDT aus der schubweichen Reissner-Mindlin-Theorie für Platten abgeleitet, welche sich im Wesentlichen in einem Punkt von der Kirchhoff-Theorie unterscheidet. Gedachte Normalen, die im unverformten Zustand senkrecht auf der Mittelebene der Platte stehen, müssen dies im verformten Zustand nicht mehr tun und können einen Winkel ungleich 90° mit der Mittelfläche einschließen, bleiben jedoch weiterhin Geraden (Abb. 5.8, vgl. auch Abb. 5.5).

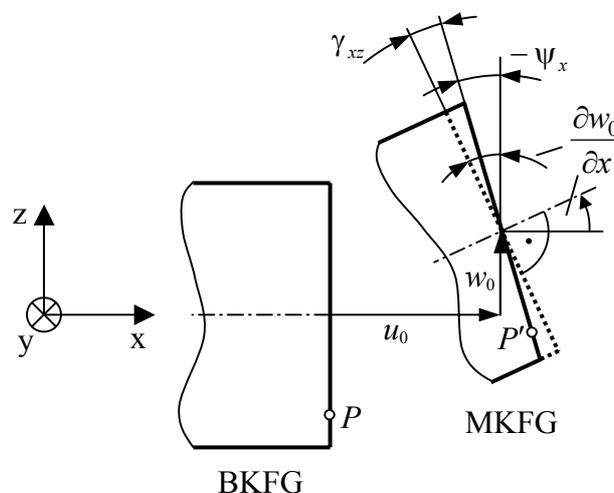


Abb. 5.8 Randbereich eines schubweichen, gekoppelten Platte-/Scheibe-Elementes vor (BKFG) und nach der Deformation (MKFG)

Für die Gesamtverschiebungen eines Punktes $P(x, y, z)$ erhält man nun

$$\begin{aligned} u &= u_0 + z\psi_x \\ v &= v_0 + z\psi_y \\ w &= w_0. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Im Gegensatz zur auf der Kirchhoff-Hypothese beruhenden klassischen Laminattheorie, hängen die Krümmungen nicht ausschließlich von der Änderung der Durchbiegung nach (5.37) ab, sondern werden durch unabhängige Funktionen $\psi_x(x, y)$ bzw. $\psi_y(x, y)$ beschrieben. Somit werden bei der FSDT insgesamt fünf unabhängige Funktionen $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$, $w_0(x, y)$, $\psi_x(x, y)$ und $\psi_y(x, y)$ zur Beschreibung des Deformationszustandes benötigt.

Analog zur CLT erhält man für die Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (5.50)$$

hier jedoch mit den Krümmungen

$$\kappa_x = \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad \kappa_y = \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}. \quad (5.51)$$

Zusätzlich ergibt sich für die transversalen Schubverzerrungen (nach Abb. 5.8):

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial w_0}{\partial x} - (-\psi_x) = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Für die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung der k -ten Einzelschicht erhält man durch Erweiterung von (5.15) um die transversalen Schubspannungen bzw. -verzerrungen

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{45} & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (5.53)$$

Nach (5.53) wären die transversalen Schubspannungen τ_{23} und τ_{13} in der k -ten Einzelschicht über deren Dicke konstant, was jedoch aufgrund der Gleichgewichtsbedingungen nicht sein kann. Daher stellen die nach (5.53) berechneten transversalen Schubspannungen nur eine grobe Näherung dar. Genauere Werte erhält man nach [12] durch Integration der Gleichgewichtsbedingungen entsprechend der Gleichungen (5.19).

Die nun als zusätzliche Schnittlast vorhandenen Querkräfte Q_1 und Q_2 resultieren aus den transversalen Schubdeformationen durch Aufsummierung der transversalen Schubspannungen der Einzelschichten gemäß

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \tau_{13} dx_3 \\
 Q_2 &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \tau_{23} dx_3.
 \end{aligned} \tag{5.54}$$

Die Transformationen der Schichtsteifigkeiten auf ein gemeinsames globales Koordinatensystem erfolgt analog zur CLT (siehe Abschnitt 5.1.3), jedoch liefert die Addition der transversalen Schichtschubsteifigkeiten Q_{44} , Q_{45} und Q_{55} zu einer Gesamtschubsteifigkeit A^s nach der einfachen Gleichung

$$A_{ij}^s = \sum_{k=1}^n {}^k \bar{Q}_{ij} \cdot (z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n {}^k \bar{G}_{ij} \cdot (z_k - z_{k-1}) \quad \text{mit } i, j = 4, 5 \tag{5.55}$$

nur eine grobe Näherung, welche die wirkliche Steifigkeit überschätzt. Die ${}^k G_{ij}$ beschreiben die konstanten Schubmoduln einer Einzelschicht, wobei G_{44} dem Schubmodul G_{23} und G_{55} dem Schubmodul G_{13} gleichkommt. Nach Tabelle B.1 entspricht die Schubmodul-Matrixkoordinate G_{45} in Tensornotation der Koordinate E_{2331} des Elastizitätstensors. Diese ist aber bei orthotropem Materialverhalten und Orientierung der 1-Achse in Faserrichtung nach Gleichung (5.11) gleich null, womit dann $G_{45} = 0$ gilt. Zu realistischeren Werten für die transversalen Schubsteifigkeiten A_{ij}^s gelangt man, wenn man ähnlich wie bei „einschichtigen“ Materialien beispielsweise folgende Gewichtsfunktion für die Verteilung der transversalen Schubspannungen über die Laminatdicke h annimmt:

$$f(z) = \frac{5}{4} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right]. \tag{5.56}$$

Mit Hilfe dieser angenommenen Schubspannungsverteilung und den Beziehungen (5.54) und (5.53) (Einzelheiten siehe z.B. [3]) lassen sich dann die transversalen Schubsteifigkeiten wie folgt bestimmen:

$$A_{ij}^s = \frac{5}{4} \sum_{k=1}^n {}^k \bar{Q}_{ij} \cdot \left[(z_k - z_{k-1}) - \frac{4}{3h^2} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \right] \quad \text{mit } i, j = 4, 5. \tag{5.57}$$

Für eine isotrope Platte lässt sich aus (5.57) der aus der Reissner'schen Plattentheorie bekannte Schubkorrekturfaktor von 5/6 herleiten.

Ähnlich wie bei der CLT, kann die Schnittlasten-Verzerrungs-Beziehung letztendlich auch bei der FSDT in einer Hypermatrixform angegeben werden:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ \hline B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44}^s & A_{45}^s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{45}^s & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}. \quad (5.58)$$

Abschließend sei noch bemerkt, dass in FE-Programmen vorwiegend die FSDT zum Einsatz kommt. Grund hierfür ist zum Einen die höhere Ergebnisgenauigkeit bei dickeren Laminaten, zum Anderen wird bei der FSDT nur eine $C^{(0)}$ -Stetigkeit (Kompatibilität der Verschiebungen an den Elementgrenzen, Differentialoperator in den Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen ist nur erster Ordnung) der Formfunktionen benötigt, wohingegen die CLT $C^{(1)}$ -Stetigkeit (Kompatibilität der Verschiebungen und Verdrehungen, Differentialoperator in den Verschiebungs-Verzerrungsbeziehungen ist zweiter Ordnung) verlangt, was die Nutzung komplizierterer Formfunktionen erfordert.

5.3 Hygrothermale Einflüsse auf das Steifigkeitsverhalten von Faser-Kunststoff-Verbunden

In dieser Arbeit soll auf die Einflüsse von Temperatur und Feuchtigkeit auf das mechanische Verhalten von Faser-Kunststoff-Verbunden nicht näher eingegangen werden. Allgemein lässt sich jedoch grob sagen, dass mit steigender Temperatur und steigender Feuchtigkeitsabsorption des Laminats insbesondere die matrixdominierten Steifigkeiten und Festigkeiten abnehmen. Eine Berücksichtigung der Steifigkeitsveränderungen ist beispielsweise durch eine Erweiterung der CLT möglich.

Für detaillierte Informationen zum Problemkreis der hygrothermalen Effekte bei Faser-Kunststoff-Verbunden sei hier auf die Spezialliteratur (z.B. [159] und [35]) verwiesen.

6 Festigkeitsbeurteilung von Faser-Kunststoff-Verbunden

Die Festigkeitsbeurteilung von Faser-Kunststoff-Verbunden stellt sich im Allgemeinen wesentlich schwieriger dar, als diejenige für klassische, isotrope Werkstoffe wie Stahl oder Aluminium. Für letztere existieren schon seit langem recht zuverlässige Modelle für das Schädigungs- und Bruchverhalten oder zumindest für das Erreichen der Fließgrenze. Die Beschreibung des Versagensverhaltens von Faser-Kunststoff-Verbunden hingegen ist allein schon aufgrund der Beteiligung sehr unterschiedlicher Materialien äußerst komplex und schwierig. Hierfür bestehen eine Reihe sehr unterschiedlicher Modelle, die in den folgenden Abschnitten genauer erläutert werden, da sie in dieser Arbeit intensiv verwendet werden.

6.1 Bruchmodi von Faser-Kunststoff-Verbunden

Bei Faser-Kunststoff-Verbunden können je nach Art der Belastung verschiedene Bruchmodi auftreten. Das Auftreten eines bestimmten Bruchmodus in einer Schicht oder einem Bereich einer Schicht muss dabei nicht zwingend zu einem Versagen des Gesamtverbundes führen, vielmehr kann es in solch einem Fall auch zu Lastumlagerungen auf weniger stark belastete Bereiche des Verbundes kommen, wodurch ein katastrophales Versagen zunächst vermieden wird.

Abb. 6.1 zeigt den Bruchmodus „Faserbruch“ durch das Auftreten nicht mehr ertragbarer Zug- oder Druckspannungen in Faserlängsrichtung bei einer unidirektionalen Einzelschicht.

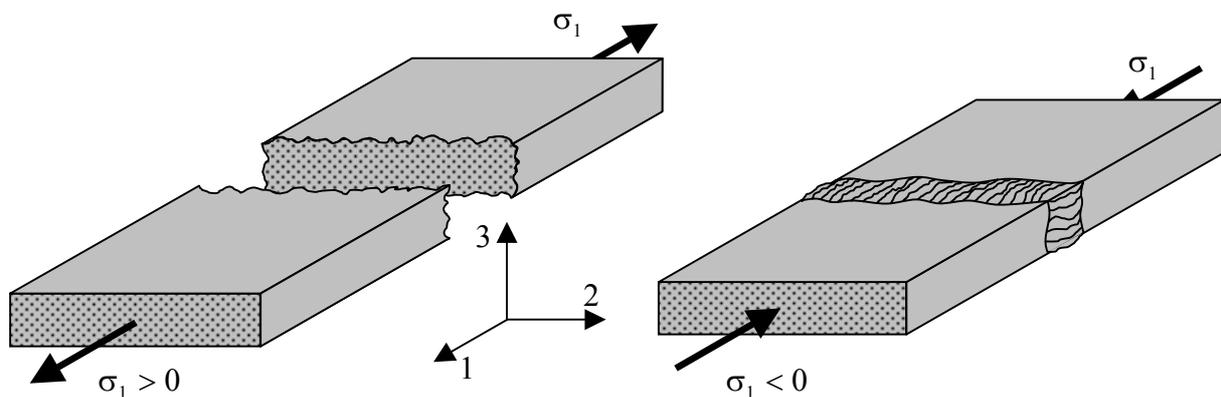


Abb. 6.1 Faserbruch bei einer unidirektionalen Schicht, verursacht durch zu hohe Zug- (links) bzw. Druckspannungen (rechts) in Faserlängsrichtung (nach [3])

Neben dem Faserbruch, kann es auch zum „Zwischenfaserbruch“ kommen, wobei hierunter ein reiner Matrixbruch als auch der Bruch innerhalb der Faser-Matrix-Grenzschicht verstanden wird. Man unterscheidet die drei verschiedenen Bruchmodi A, B und C, welche durch unterschiedliche Belastungen verursacht werden, Abb. 6.2.

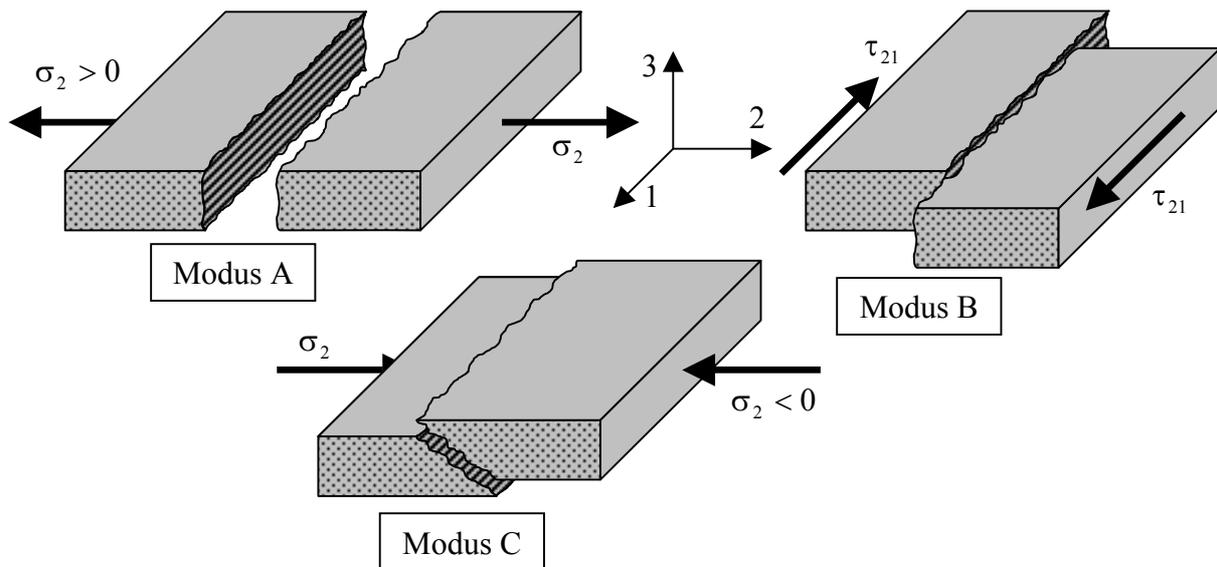


Abb. 6.2 Zwischenfaserbruchmodi einer unidirektionalen Einzelschicht aufgrund von Zug- (Modus A) bzw. Druckspannungen (Modus C) quer zur Faserrichtung und Schubspannungen in der Schichtebene (Modus B)

Bei den bisher erwähnten Bruchmodi wird von einer Belastung innerhalb der Schichtebene ausgegangen. Darüber hinaus ist auch noch ein Versagen einer Einzelschicht durch Quer-Quer-Schub denkbar, Abb. 6.3. Der Bruch tritt bei dieser Belastung typischerweise unter einem Winkel von 45° zur Belastungsrichtung aufgrund des dem Schub äquivalenten Hauptspannungszustandes auf, welcher einer Querdzugbeanspruchung nach Abb. 6.2 (Modus A) entspricht. Die für den Bruch entscheidende Festigkeit ist also die Querdzugfestigkeit, da diese offenbar niedriger ist als die Schubfestigkeit quer zur Faserrichtung. Der Bruchwinkel des Zwischenfaserbruch-Modus C hingegen beträgt etwa 53° (Definition des Bruchwinkels nach Abb. 6.8). Zwar tritt auch hierbei die größte Schubspannung unter einem Winkel von 45° auf, jedoch resultiert aus der Belastung auch eine Querdrukkomponente auf die mögliche Bruchfläche, was zu einer gewissen „inneren“ Reibung führt und den Bruchwiderstand erhöht, woraus eine etwas „flachere“ Bruchebene folgt.

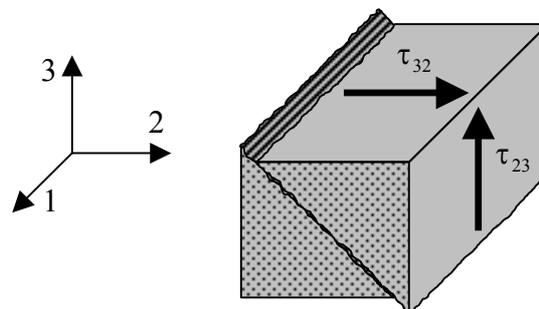


Abb. 6.3 Zwischenfaserbruch aufgrund von Quer-Quer-Schubbeanspruchung

Eine weitere, besondere Versagensform, die nur bei mehrschichtigen Laminaten auftritt, ist die Delamination. Hierunter versteht man einen sich flächig ausbreitenden Trennungsbruch zwischen zwei Laminatschichten. Hervorgerufen werden Delaminationen durch interlaminare Spannungen, d.h. Spannungen in der Grenzfläche zwischen zwei Schichten. Ausgangspunkt

für eine Delamination ist oftmals ein bereits bestehender Zwischenfaserbruch, welcher z.B. durch eine Zugspannung quer zur Faserrichtung entstanden ist. Da der Rissrand selber spannungsfrei ist, müssen sich die Zugspannungen über Schubspannungen zur Nachbarschicht auf- bzw. abbauen und können so eine Delamination bewirken. Weitere Delaminationsursachen und Informationen zu deren Vermeidung können [159] entnommen werden.

Zu jedem Bruchmodus und der dazugehörigen Beanspruchung gibt es eine sogenannte Basisfestigkeit. In Tabelle 6.1 sind die Basisbeanspruchungen und zugehörigen Basisfestigkeiten mit ihren unterschiedlichen Indizierungsmöglichkeiten (englisch- und deutschsprachige Literatur) zusammengefasst, wobei alle Basisbeanspruchungen und alle Basisfestigkeiten einer Zeile immer zueinander äquivalente Bezeichnungen sind. Die Indizes der tensoriellen Spannungsnotation beziehen sich auf das in den Abb. 6.1 bis Abb. 6.3 verwendete Koordinatensystem.

Tabelle 6.1 Bezeichnungen der Basisbeanspruchungen und zugehörigen Basisfestigkeiten

Basisbeanspruchung				Basisfestigkeit		
Normal- beanspruchung	$\sigma_1 > 0$	σ_{\parallel}^+	$\sigma_L > 0$	X_t	$R_{\parallel}^+, R_{\parallel}^t, R_{\parallel}^z$	σ_{Lt}
	$\sigma_1 < 0$	σ_{\parallel}^-	$\sigma_L < 0$	X_c	$R_{\parallel}^-, R_{\parallel}^c, R_{\parallel}^d$	σ_{Lc}
	$\sigma_2 > 0$ bzw. $\sigma_3 > 0$	σ_{\perp}^+	$\sigma_T > 0$	Y_t	$R_{\perp}^+, R_{\perp}^t, R_{\perp}^z$	σ_{Tt}
	$\sigma_2 < 0$ bzw. $\sigma_3 < 0$	σ_{\perp}^-	$\sigma_T < 0$	Y_c	$R_{\perp}^-, R_{\perp}^c, R_{\perp}^d$	σ_{Tc}
Schub- beanspruchung	$\tau_{12} = \tau_{21}$ bzw. $\tau_{13} = \tau_{31}$	$\tau_{\perp\parallel}$	τ_{LT}	S_{21}, S^L	$R_{\perp\parallel}$	τ_S
	$\tau_{23} = \tau_{32}$	$\tau_{\perp\perp}$	τ_{TZ}	S_{23}, S^T	$R_{\perp\perp}$	

6.2 Versagenskriterien für faserverstärkte Kunststoffe

Bruch- oder Versagenskriterien für faserverstärkte Kunststoffe sind alle empirischer Natur und lassen sich z.B. nach [103] in folgende drei Gruppen unterteilen:

- Interaktionslose Kriterien,
- Interaktionskriterien mit teilweiser oder vollständiger Interaktion,
- bruchtypenbezogene Kriterien (wirkebenenbasierte Kriterien).

Allen Kriterien ist jedoch gemein, dass sie in der Form

$$F(\sigma, \mathbf{R}, \dots) \underset{\leq}{\overset{\geq}{=}} 1 \quad \text{bzw.} \quad F(\varepsilon, {}^e\mathbf{R}, \dots) \underset{\leq}{\overset{\geq}{=}} 1 \quad (6.1)$$

formuliert sind. Dies bedeutet, dass aus dem herrschenden Spannungszustand σ bzw. dem Verzerrungszustand ε , den zugehörigen Festigkeiten \mathbf{R} bzw. Bruchdehnungen ${}^e\mathbf{R}$ und möglicherweise noch weiteren Parametern ein Wert für das Bruchkriterium F berechnet wird, der entweder größer, gleich oder kleiner 1 ist. Durch die Funktion

$$F(\sigma, \mathbf{R}, \dots) = 1 \quad (6.2)$$

wird, hier beispielhaft im Spannungsraum, eine Bruchkurve bzw. für mehr als zweiachsige Spannungszustände ein Bruchkörper beschrieben. In Abb. 6.4 ist exemplarisch eine derartige Bruchkurve im zweidimensionalen Spannungsraum zu sehen.

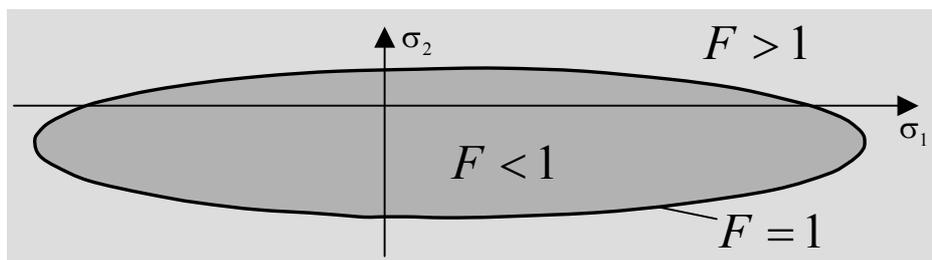


Abb. 6.4 Bruchkurve im zweidimensionalen Spannungsraum

Die vom Versagenskriterium beschriebene Bruchkurve trennt nun diejenigen Spannungszustände, die vom Werkstoff noch ertragen werden können (dunkler Bereich innerhalb der Bruchkurve mit $F < 1$), von denjenigen, bei denen bereits eine Schädigung auftritt (hellerer Bereich außerhalb der Bruchkurve mit $F > 1$). Somit ist der Wert des Bruchkriteriums ein Maß dafür, ob der Faser-Verbund-Werkstoff beim herrschenden Spannungszustand geschädigt wird oder nicht. Unter „Schädigung“ wird in diesem Abschnitt eine makroskopische Schädigung, also z.B. ein Faser- oder Zwischenfaserbruch verstanden.

Der positive Faktor, mit dem alle aufgebrauchten Spannungen, die in das Bruchkriterium eingehen, multipliziert werden müssten, damit das Bruchkriterium den Wert 1 annimmt, heißt Reservefaktor f_{Res} . Bei Eigenspannungsfreiheit gibt der Reservefaktor das Verhältnis der Längen des Bruchspannungsvektors und des Lastspannungsvektors an. Ein Maß für die Ausnutzung der Materialfestigkeit bei einem herrschenden Spannungszustand stellt die Anstrengung f_E dar. Für den Fall, dass im Werkstoff keinerlei Eigenspannungen vorliegen, ist der Reservefaktor der Kehrwert der Anstrengung. Ist die Bruchfunktion F bezüglich der Spannungen homogen vom Grad 1, d.h. es existiert ein konstanter Faktor λ , der sich aus den Spannungen der Bruchfunktion ausklammern lässt (man spricht von Homogenität vom Grad n , wenn sich ein Faktor λ^n ausklammern lässt), so ist der Wert der Bruchfunktion F gleich dem Kehrwert des Reservefaktors.

Oftmals ist auch eine Formulierung des Bruchkriteriums mit Hilfe der Anstrengung vorteilhaft, da hierbei direkt beschrieben wird, wie stark der Werkstoff im Vergleich zu den maximal ertragbaren Spannungen ausgenutzt wird.

6.2.1 Interaktionslose Bruchkriterien

Werden im Bruchkriterium keine Wechselwirkungen der auf die Materialhauptachsen bezogenen Beanspruchungen berücksichtigt, so spricht man von einem interaktionslosen Bruchkriterium. Diese sehr einfachen Kriterien gestatten lediglich eine grobe Beurteilung des Spannungs- bzw. Verzerrungszustandes hinsichtlich der Gefahr einer Materialschädigung. Nachfolgend werden zwei dieser Bruchkriterien etwas näher erläutert.

6.2.1.1 Das Kriterium der maximalen Spannungen

Bei diesem sehr einfachen Bruchkriterium geht man davon aus, dass ein Versagen dann auftritt, wenn eine der Basisbeanspruchungen, also eine auf die Materialhauptachsen bezogene Spannungskomponente, die zugehörige Basisfestigkeit überschreitet. Die berechneten Schichtspannungen werden hierzu in das lokale Schichtkoordinatensystem transformiert (siehe Punkt 6 und 7 in Abschnitt 5.1.7), und in Beziehung zu den Basisfestigkeiten gesetzt. Der Wert für das Bruchkriterium ergibt sich aus dem Maximalwert dieser Verhältnisse. Für den ebenen Spannungszustand erhält man

$$F = \max \left\{ \frac{\sigma_1}{-R_{\parallel}^c}, \frac{\sigma_1}{R_{\parallel}^t}, \frac{\sigma_2}{-R_{\perp}^c}, \frac{\sigma_2}{R_{\perp}^t}, \left| \frac{\tau_{12}}{R_{\perp\parallel}} \right| \right\}. \tag{6.3}$$

Beispielsweise ergibt sich damit im σ_1 - σ_2 -Spannungsraum die in Abb. 6.5 dargestellte Bruchkurve.

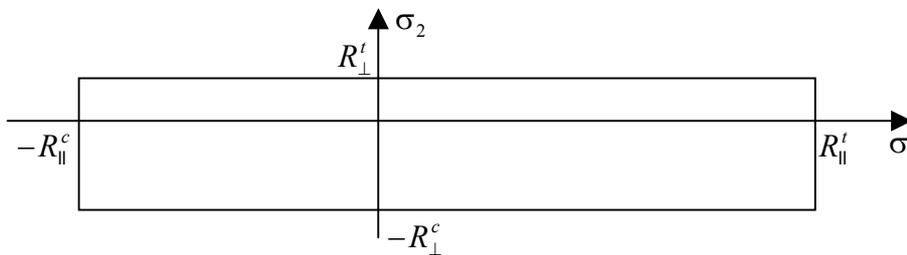


Abb. 6.5 Bruchkurve des Kriteriums der maximalen Spannungen im σ_1 - σ_2 -Spannungsraum

6.2.1.2 Das Kriterium der maximalen Verzerrungen

Das Kriterium der maximalen Verzerrungen ist ähnlich dem Kriterium der maximalen Spannungen aufgebaut und in der industriellen Anwendung weit verbreitet [78], jedoch werden bei diesem Kriterium die auf die Materialhauptachsen bezogenen Verzerrungen zu den zulässigen Verzerrungen ins Verhältnis gesetzt:

$$F = \max \left\{ \frac{\varepsilon_1}{-{}^{\varepsilon}R_{\parallel}^c}, \frac{\varepsilon_1}{{}^{\varepsilon}R_{\parallel}^t}, \frac{\varepsilon_2}{-{}^{\varepsilon}R_{\perp}^c}, \frac{\varepsilon_2}{{}^{\varepsilon}R_{\perp}^t}, \left| \frac{\gamma_{12}}{{}^{\varepsilon}R_{\perp\parallel}} \right| \right\}. \tag{6.4}$$

In Abb. 6.6 (links) ist die Bruchkurve für das Kriterium der maximalen Verzerrungen im ε_1 - ε_2 -Verzerrungsraum zu sehen.

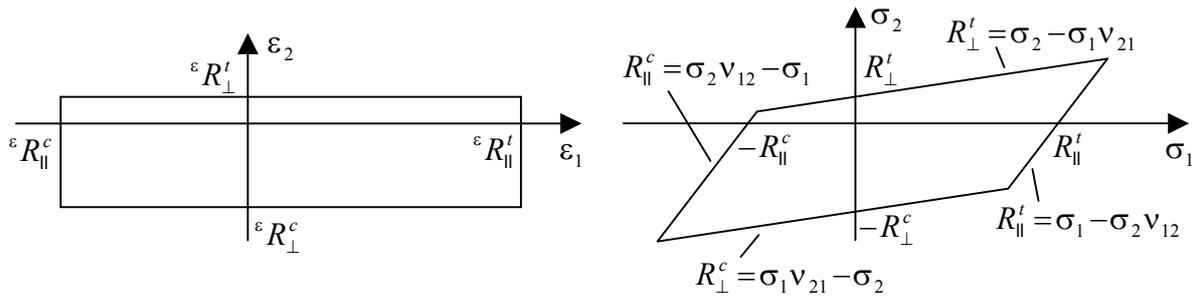


Abb. 6.6 Bruchkurve des Kriteriums der maximalen Verzerrungen im ε_1 - ε_2 -Verzerrungsraum (links) und im σ_1 - σ_2 -Spannungsraum (rechts)

Zu einer äquivalenten Darstellung der Bruchkurve im Spannungsraum gelangt man durch folgende Überlegungen: Nach Gleichung (5.13) erhält man unter der Voraussetzung eines ebenen Spannungszustandes für die Spannung in Faserrichtung

$$\sigma_1 = E_1 \left(\varepsilon_1 + \sigma_2 \frac{\nu_{21}}{E_2} \right) = E_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \nu_{12} \quad (6.5)$$

und für die Spannung quer zur Faserrichtung

$$\sigma_2 = E_2 \left(\varepsilon_2 + \sigma_1 \frac{\nu_{21}}{E_2} \right) = E_2 \varepsilon_2 + \sigma_1 \nu_{21}. \quad (6.6)$$

Bei einer uniaxialen Belastung in Faserrichtung bzw. quer zur Faserrichtung müssen das Maximale-Spannungen-Kriterium und das Kriterium der maximalen Verzerrungen zum selben Ergebnis führen (gleiches gilt für die Schubspannung bzw. -verzerrung, wird aber hier nicht betrachtet), so dass gelten muss:

$$\varepsilon R'_{\parallel} = \frac{R'_{\parallel}}{E_1}, \quad \varepsilon R_{\parallel}^c = -\frac{R_{\parallel}^c}{E_1}, \quad \varepsilon R'_{\perp} = \frac{R'_{\perp}}{E_2}, \quad \varepsilon R_{\perp}^c = -\frac{R_{\perp}^c}{E_2}. \quad (6.7)$$

Wird nun die maximal zulässige Verzerrung erreicht, ist also $\varepsilon_1 = \varepsilon R'_{\parallel}$ bzw. $\varepsilon_2 = \varepsilon R'_{\perp}$ (oder für den Fall einer Druckbelastung $\varepsilon_1 = -\varepsilon R_{\parallel}^c$ bzw. $\varepsilon_2 = -\varepsilon R_{\perp}^c$), so erhält man durch Einsetzen von (6.7) in (6.5) und (6.6) und anschließendem Umstellen nach den maximalen Spannungen

$$R'_{\parallel} = \sigma_1 - \sigma_2 \nu_{12} \quad \text{bzw.} \quad R'_{\perp} = \sigma_2 - \sigma_1 \nu_{21} \quad (6.8)$$

oder für den Fall der Druckbelastung

$$R_{\parallel}^c = \sigma_2 \nu_{12} - \sigma_1 \quad \text{bzw.} \quad R_{\perp}^c = \sigma_1 \nu_{21} - \sigma_2. \quad (6.9)$$

Mit den Gleichungen (6.8) und (6.9) lässt sich dann die Bruchkurve des Kriteriums der maximalen Verzerrungen auch im Spannungsraum zeichnen (Abb. 6.6, rechts).

6.2.2 Bruchkriterien mit teilweiser Interaktion

Interaktionslose Bruchkriterien gestatten zwar eine Unterscheidung zwischen Faser- und Zwischenfaserbruch, jedoch wird das Zusammenwirken der verschiedenen Spannungskoordinaten bei der Bruchentstehung nicht berücksichtigt.

Bruchkriterien mit Teilinteraktion sind ebenfalls in der Lage, zwischen den Versagensformen Faser- und Zwischenfaserbruch zu unterscheiden, allerdings werden hier bei der Zwischenfaserbruchbedingung bereits die Wechselwirkungen der auf die Materialhauptachsen bezogenen Beanspruchungsgrößen in Betracht gezogen. Bei diesen Kriterien wird der Faserbruch meist durch eine einfache Formulierung wie in (6.3) beschrieben. Oftmals erweist sich auch die Quadrierung der einfachen Faserbruchbedingung als vorteilhaft, um Vorzeichenfehlern aus dem Wege zu gehen.

Puck schlug 1969 folgende Bruchbedingungen vor [142], welche 1973 auch von Hashin und Rotem publiziert wurden [81]:

$$\begin{aligned} \text{Faserbruch:} \quad & \left(\frac{\sigma_1}{R_{\parallel}^{t,c}} \right)^2 = 1, \\ \text{Zwischenfaserbruch:} \quad & \left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp}^{t,c}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 = 1. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Hierbei werden, je nachdem ob es sich um einen Druck- oder Zugspannungszustand handelt, die Basisfestigkeiten R^c bzw. R^t verwendet. Der durch (6.10) beschriebene Bruchkörper stellt im σ_1 - σ_2 - τ_{12} -Spannungsraum einen gestreckten Ellipsoid dar, dessen Kappen aufgrund der Faserbruchbedingung durch Ebenen normal zur σ_1 -Achse abgeschnitten sind. Eine Darstellung dieser „Puck’schen Zigarre“ lässt sich [143] entnehmen.

Auch der Kriteriensatz der deutschen Luft- und Raumfahrtindustrie, das ZTL-Kriterium (**Zu-**kunf**t-T**echnik-**L**uft-**K**riterium) fällt in die Gruppe der Kriterien mit Teilinteraktion. Bei diesem Kriterium wird für den Faserbruch ebenfalls die einfache Bruchbedingung aus (6.10) verwendet. Für den Zwischenfaserbruch wird abweichend von (6.10) folgende Bruchbedingung genutzt:

$$\left(\frac{1}{R_{\perp}^t} - \frac{1}{R_{\perp}^c} \right) \sigma_2 + \frac{\sigma_2^2}{R_{\perp}^t R_{\perp}^c} + \frac{\tau_{12}^2}{R_{\perp\parallel}^2} = 1. \quad (6.11)$$

Das ZTL-Kriterium wird auch für die Bewertung räumlicher Spannungszustände eingesetzt, indem neben (6.11) noch eine weitere Zwischenfaserbruchbedingung eingeführt wird, in der σ_2 durch σ_3 ersetzt ist.

Weitere Anmerkungen und kurze Hinweise zu Vor- und Nachteilen der bisher vorgestellten und weiterer Kriterien mit Teilinteraktion findet man in [33].

6.2.3 Bruchkriterien mit vollständiger Interaktion

Die meisten für Faser-Kunststoff-Verbunde entwickelten Bruchkriterien gehören zur Gruppe der Bruchkriterien mit vollständiger Interaktion, welche den großen Vorteil der sehr einfachen Handhabbarkeit bieten und auch als „pauschale“ oder „globale“ Bruchkriterien bezeichnet werden. Derartige Kriterien betrachten den Werkstoff im Sinne der Homogenisierung als „verschmiertes“, orthotropes Kontinuum, wodurch eine Unterscheidung der verschiedenen Faserverbundbruchtypen unmöglich ist.

Als Ursprung der Kriterien mit vollständiger Interaktion gilt die quadratische Fließbedingung von Hill aus dem Jahre 1948 (siehe auch [83], [84]), die eine Erweiterung der von Mises'schen Fließbedingung auf nichtisotrope Materialien mit drei zueinander orthogonalen Symmetrieebenen darstellt und ursprünglich für orthotrope, gewalzte Stahlbleche entwickelt wurde:

$$F(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + G(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + H(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2L\tau_{23}^2 + 2M\tau_{13}^2 + 2N\tau_{12}^2 = 1. \quad (6.12)$$

Hierin sind F , G , H , L , M und N Koeffizienten, die den Anisotropiegrad des Materials beschreiben und 1, 2, 3 die Anisotropieachsen. Für $L = M = N = 3F = 3G = 3H$ geht (6.12) in die von Mises-Fließbedingung über ([84], [6]).

Da es bei Faser-Kunststoff-Verbunden kein ausgeprägtes Fließverhalten gibt, geht man davon aus, dass es beim Erreichen der Fließgrenze sofort zu einem spröden Bruch kommt. Azzi und Tsai interpretierten 1965 die Fließgrenzen in Richtung der Materialhauptachsen (Richtungen der Anisotropieachsen) mit den Bezeichnungen X , Y , und Z und die Schubfestigkeiten mit den Bezeichnungen R , S und T als Bruchfestigkeiten (siehe [6]). Man kann zeigen (siehe Anhang C), dass zwischen den Anisotropie-Parametern aus (6.12) und den Bruchfestigkeiten (bzw. Fließgrenzen) folgender Zusammenhang besteht:

$$\begin{aligned} 2F &= \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2} \\ 2G &= \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2} \\ 2H &= \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \\ 2L &= \frac{1}{R^2}, \quad 2M = \frac{1}{S^2}, \quad 2N = \frac{1}{T^2}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Weiterhin nehmen Azzi und Tsai einen ebenen Spannungszustand im Laminat bzw. der betrachteten Einzelschicht an ($\sigma_3 = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$) und setzen transversal isotropes Materialverhalten jeder Einzelschicht mit der 2,3-Ebene als Isotropieebene voraus, woraus $Y = Z$ folgt. Mit diesen beiden Annahmen führt das Einsetzen von (6.13) in (6.12) auf die oftmals als „Tsai-Hill“-Bruchbedingung benannte Gleichung

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \frac{\tau_{12}^2}{T^2} = 1 \quad (6.14)$$

bzw. bei Nutzung der in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen für die Festigkeitsparameter mit ($X = R_{\parallel}^{t,c}$, $Y = R_{\perp}^{t,c}$, $T = R_{\perp\parallel}$) auf

$$\frac{\sigma_1^2}{(R_{\parallel}^{t,c})^2} + \frac{\sigma_2^2}{(R_{\perp}^{t,c})^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{(R_{\parallel}^{t,c})^2} + \frac{\tau_{12}^2}{(R_{\perp\parallel})^2} = 1, \quad (6.15)$$

woraus bei bekannten Festigkeitsparametern in Faserrichtung $R_{\parallel}^{t,c}$, quer zur Faserrichtung $R_{\perp}^{t,c}$ und der Schubfestigkeit $R_{\perp\parallel}$ die Bruchgefahr für einen gegebenen Spannungszustand bestimmt werden kann. Je nachdem, ob es sich bei σ_1 und σ_2 um Zug oder Druckspannungen

gen handelt, werden in (6.14) bzw. (6.15) die Druck- (X_c, Y_c bzw. $R_{\parallel}^c, R_{\perp}^c$) bzw. Zugfestigkeiten (X_t, Y_t bzw. $R_{\parallel}^t, R_{\perp}^t$) eingesetzt.

Ebenfalls 1965 veröffentlichten Gol'denblat und Kopnov [67] einen Tensor-Polynomansatz für eine allgemeine, dreidimensionale Bruchbedingung, aus der sich eine Vielzahl der gebräuchlichen Pauschalbruchkriterien herleiten lassen:

$$(F_{ij}\sigma_{ij})^{\alpha} + (F_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl})^{\beta} + (F_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn})^{\gamma} + \dots = 1. \quad (6.16)$$

Beispielsweise erhält man für $\alpha = \beta = 1$ und Abbruch des Polynomansatzes nach dem quadratischen Glied ein Bruchkriterium, welches bereits 1963 von Zahkarov [182] für imprägnierte Textil- und Papierlamine genutzt und 1971 von Tsai und Wu in [169] für Faser-Kunststoff-Verbunde vorgeschlagen wurde (hier in Voigt'scher Notation):

$$(F_i\sigma_i) + (F_{ij}\sigma_i\sigma_j) = 1. \quad (6.17)$$

Die Koordinaten des Festigkeitstensors F_i und die Hauptdiagonalglieder von F_{ij} können aus uniaxialen Zug-/Druck- bzw. Schubtests berechnet werden. Zur Bestimmung der Nebendiagonalglieder sind aufwendigere, mehrachsige Versuche notwendig [169]. Für einen ebenen Spannungszustand besitzt die „Tsai-Wu“-Bruchbedingung die Form

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\tau_{12}^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1 \quad (6.18)$$

mit

$$F_1 = \frac{1}{R_{\parallel}^t} - \frac{1}{R_{\parallel}^c}, \quad F_2 = \frac{1}{R_{\perp}^t} - \frac{1}{R_{\perp}^c}, \quad F_{11} = \frac{1}{R_{\parallel}^t R_{\parallel}^c}, \quad F_{22} = \frac{1}{R_{\perp}^t R_{\perp}^c}, \quad F_{66} = \frac{1}{R_{\perp\perp}^2},$$

$$F_{12} = \frac{1}{2\sigma_{\text{biaxial}}^2} \left[1 - \sigma_{\text{biaxial}} \left(\frac{1}{R_{\parallel}^t} - \frac{1}{R_{\parallel}^c} + \frac{1}{R_{\perp}^t} - \frac{1}{R_{\perp}^c} \right) - \sigma_{\text{biaxial}}^2 \left(\frac{1}{R_{\parallel}^t R_{\parallel}^c} + \frac{1}{R_{\perp}^t R_{\perp}^c} \right) \right]. \quad (6.19)$$

Zur Bestimmung des Parameters F_{12} sind biaxiale Festigkeitsversuche durchzuführen, wobei σ_{biaxial} die Bruchspannung beschreibt. Für eine geschlossene Bruchkurve muss F_{12} Werte gemäß

$$F_{12} = F_{12}^* \sqrt{F_{11} F_{22}} \quad \text{mit} \quad -1 \leq F_{12}^* \leq 1 \quad (6.20)$$

annehmen. Da in vielen Fällen Daten für derartige Versuche nicht vorliegen, wird in der Praxis oftmals $F_{12}^* = 0$ oder $F_{12}^* = -1/2$ gesetzt [111]. Wie in Abb. 6.7 zu erkennen ist, reagiert das Tsai-Wu-Bruchkriterium recht empfindlich auf Schwankungen des Parameters F_{12}^* . Somit ist die Annahme eines Wertes für F_{12}^* ohne Absicherung durch entsprechende biaxiale Versuche zumindest fragwürdig.

Ein weiteres, oft verwendetes Pauschalbruchkriterium wurde 1967 von Hoffman vorgestellt [87]. Hoffman schlägt vor, das Hill'sche Bruchkriterium für orthotrope Materialien (6.12) durch lineare Terme $C_1\sigma_1$, $C_2\sigma_2$ und $C_3\sigma_3$ additiv zu erweitern, was letztendlich für einen ebenen Spannungszustand auf folgende Bruchbedingung führt:

$$\left(\frac{1}{R_{\parallel}^t} - \frac{1}{R_{\parallel}^c} \right) \sigma_1 + \left(\frac{1}{R_{\perp}^t} - \frac{1}{R_{\perp}^c} \right) \sigma_2 + \frac{\sigma_1^2}{R_{\parallel}^t R_{\parallel}^c} + \frac{\sigma_2^2}{R_{\perp}^t R_{\perp}^c} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{R_{\parallel}^t R_{\parallel}^c} + \frac{\tau_{12}^2}{R_{\perp\perp}^2} = 1. \quad (6.21)$$

6.2.4.1.2 Zwischenfaserbruchbedingungen

Da nach Mohrs Hypothese Zwischenfaserbruch von auf der Zwischenfaserbruchebene wirkenden Spannungen verursacht wird, ist auch das Bruchkriterium für den Zwischenfaserbruch in sogenannten wirkebenenbasierten Spannungen formuliert. Hierzu müssen die allgemeinen Spannungskordinaten (Abb. 6.8, links) in die Spannungskordinaten der Wirkebene (Abb. 6.8, rechts) transformiert werden.

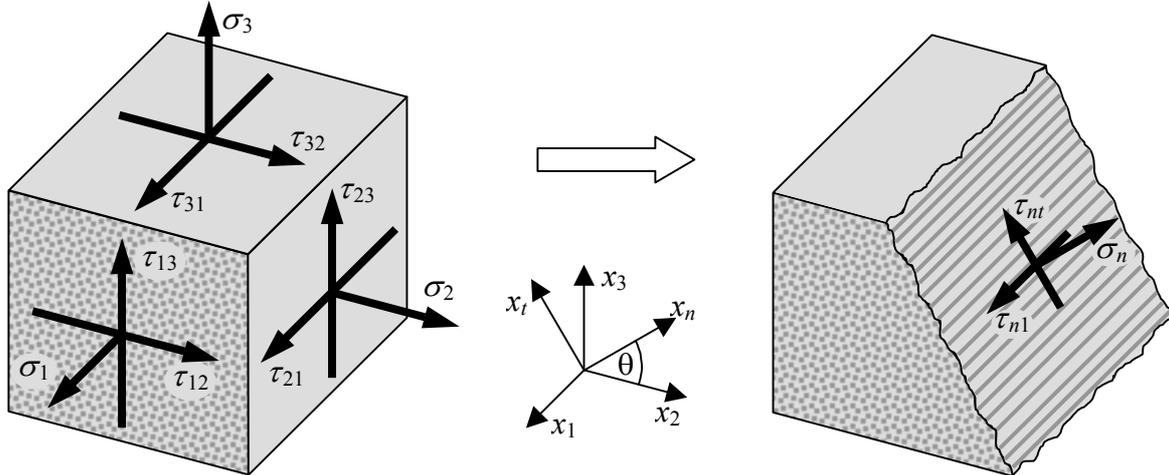


Abb. 6.8 Transformation der Spannungskordinaten in wirkebenenbasierte Spannungen

Die Wirkebene wird durch ihren Neigungswinkel θ beschrieben. Die Transformation der Spannungskordinaten erfolgt nach den Transformationsregeln für einen Tensor 2. Stufe gemäß:

$$\begin{aligned} \sigma_n(\theta) &= \sigma_2 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta + 2\tau_{23} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_{n1}(\theta) &= \tau_{31} \sin \theta + \tau_{21} \cos \theta \\ \tau_{m1}(\theta) &= -\sigma_2 \sin \theta \cos \theta + \sigma_3 \sin \theta \cos \theta + \tau_{23}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \tag{6.23}$$

(siehe Anhang B.3). Nun schlägt Puck, beispielsweise für den Fall, dass auf der Wirk- bzw. Bruchebene eine Drucknormalspannung $\sigma_n < 0$ herrscht, ursprünglich folgende quadratische Bruchbedingung vor (für den Fall des Bruches geht die Wirkebene θ in die Bruchebene θ_{fp} über):

$$\left(\frac{\tau_{m1}(\theta_{fp})}{R_{\perp\perp}^A - p_{\perp\perp}^c \cdot \sigma_n(\theta_{fp})} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}(\theta_{fp})}{R_{\perp\parallel} - p_{\perp\parallel}^c \cdot \sigma_n(\theta_{fp})} \right)^2 = 1 \text{ für } \sigma_n < 0. \tag{6.24}$$

Neben den Festigkeitsparametern $R_{\perp\perp}^A$ und $R_{\perp\parallel}$ werden auch die Anstiege der Bruchkurve im $\sigma_n - \tau_{m1}$ - bzw. $\sigma_n - \tau_{n1}$ -Spannungsraum an der Stelle $\sigma_n = 0$ benötigt:

$$-p_{\perp\perp}^c = \left[\frac{\partial \tau_{m1}}{\partial \sigma_n} \right]_{\sigma_n=0}, \quad -p_{\perp\parallel}^c = \left[\frac{\partial \tau_{n1}}{\partial \sigma_n} \right]_{\sigma_n=0}. \tag{6.25}$$

Da Gleichung (6.24) jedoch nicht homogen vom Grad 1 ist, fällt eine Formulierung der Anstrengung f_E schwer. Motiviert durch diese Tatsache gelangt man durch nachfolgende Überlegung zu einer etwas anderen Darstellung der Bruchbedingungen. Geometrisch betrachtet,

werden für Schnitte $\sigma_n = const.$ durch den Bruchkörper (Abb. 6.9, oben) durch Gleichung (6.24) Ellipsen beschrieben (Abb. 6.9, unten links). Eine mathematische Definition des Bruchkörpers (für den Puck den Begriff Master-Bruchkörper einführt, der aber im Folgenden hier weiter als Bruchkörper bezeichnet wird) ist aber auch durch eine Beschreibung der Schnitte für $\tau_{n\psi} = const.$ (mit $\tau_{n\psi}(\theta) = \sqrt{\tau_{nt}^2(\theta) + \tau_{n1}^2(\theta)}$, Abb. 6.9 unten rechts) möglich, und wie sich zeigt, für die Formulierung der Anstrengung günstiger, da diese Kurven durch einfache elliptische (für den Bereich $\sigma_n > 0$) bzw. parabelförmige (für den Bereich $\sigma_n < 0$) Funktionen beschrieben werden können.

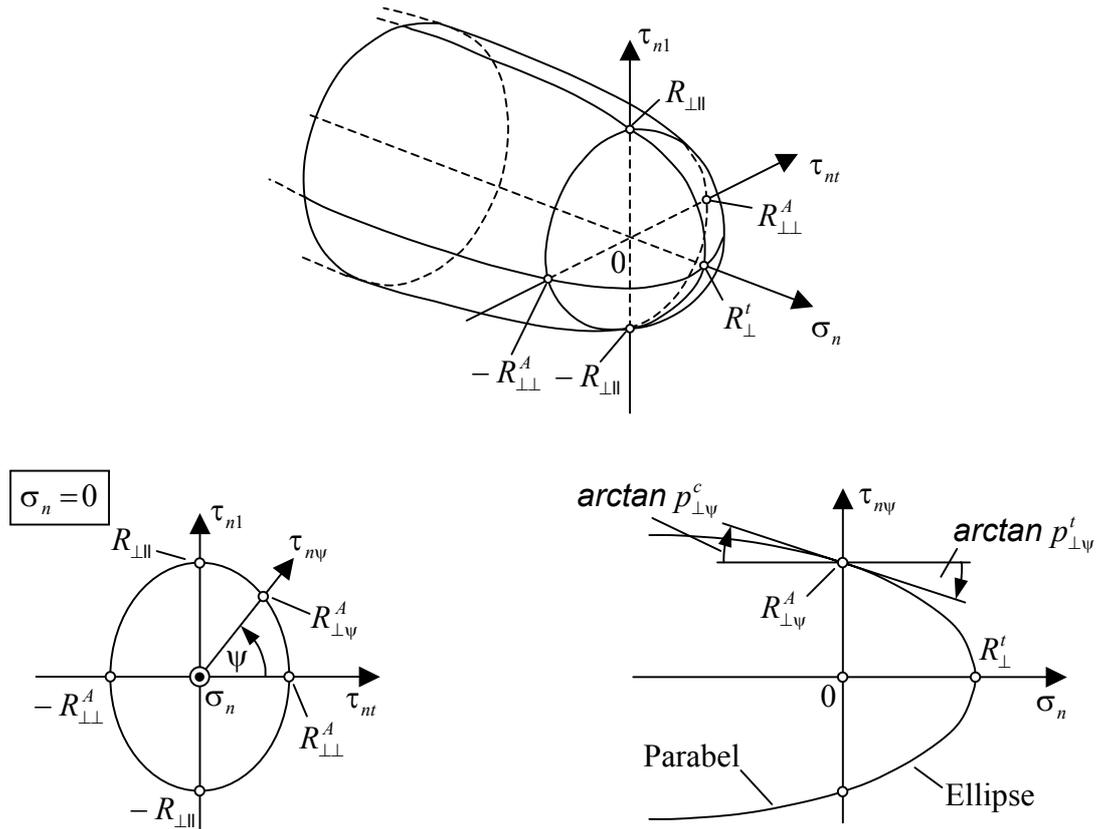


Abb. 6.9 Bruchkörper im $\sigma_n - \tau_{nt} - \tau_{n1}$ -Spannungsraum (oben) und Schnitte durch den Bruchkörper an der Stelle $\sigma_n = 0$ (unten links) und $\tau_{n\psi} = const.$ (unten rechts, nach [98])

Für den Druckbereich lässt sich Gleichung (6.24) nach [98] durch folgende Bruchbedingung adäquat ersetzen:

$$\left(\frac{\tau_{n\psi}}{R_{\perp\psi}^A} \right)^2 + 2 \cdot \frac{p_{\perp\psi}^c}{R_{\perp\psi}^A} \cdot \sigma_n = 1 \text{ für } \sigma_n < 0. \tag{6.26}$$

Die in (6.26) vorkommenden Parameter sind nun abhängig vom Winkel ψ , der die Schnittfläche durch den Bruchkörper angibt und wiederum abhängig vom zu untersuchenden Spannungszustand ist.

Für den Zugbereich kann der Bruchkörper nach [98] durch die elliptische Bruchbedingung

$$\left(\frac{\tau_{n\psi}}{R_{\perp\psi}^A}\right)^2 + 2 \cdot \frac{p_{\perp\psi}^t}{R_{\perp\psi}^A} \cdot \sigma_n + \left(1 - 2 \cdot \frac{p_{\perp\psi}^t \cdot R_{\perp\psi}^t}{R_{\perp\psi}^A}\right) \cdot \frac{\sigma_n^2}{R_{\perp\psi}^t{}^2} = 1 \quad \text{für } \sigma_n \geq 0 \quad (6.27)$$

beschrieben werden.

Der Festigkeitsparameter $R_{\perp\psi}^A$ ist eigentlich nur für die Winkel $\psi = 90^\circ$ und $\psi = 0^\circ$ bekannt ($R_{\perp 90^\circ}^A = R_{\perp\parallel}$, $R_{\perp 0^\circ}^A = R_{\perp\perp}$). Für beliebige Winkel ψ wird angenommen, dass die Festigkeitswerte $R_{\perp\psi}^A$ auf einer Ellipse liegen (siehe auch Abb. 6.9, unten links), die an der Stelle $\sigma_n = 0$ der Gleichung

$$\left(\frac{\tau_{n\psi}}{R_{\perp\psi}^A}\right)^2 = \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n\parallel}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 = 1 \quad (6.28)$$

genügt. Mit den Beziehungen

$$\tau_{nt} = \tau_{n\psi} \cdot \cos \psi, \quad \tau_{n\parallel} = \tau_{n\psi} \cdot \sin \psi \quad (6.29)$$

und dem Herauskürzen von $\tau_{n\psi}$ erhält man aus (6.28)

$$\left(\frac{1}{R_{\perp\psi}^A}\right)^2 = \left(\frac{\cos \psi}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\sin \psi}{R_{\perp\parallel}}\right)^2. \quad (6.30)$$

Da (6.29) nicht nur an der Stelle $\sigma_n = 0$, sondern für beliebige Schnitte $\sigma_n = \text{const.}$ gilt, erstreckt sich der Gültigkeitsbereich von (6.28) auf den gesamten Bruchkörper.

Um schließlich die Bruchbedingungen als Anstrengung zu formulieren, wird in (6.26) und (6.27) jede Spannungscoordinate durch die Anstrengung f_E geteilt und die Gleichung unter Verwendung von (6.28) nach f_E aufgelöst. Auf diese Weise erhält man letztendlich für die Anstrengungen:

$$f_E(\theta) = \begin{cases} \sqrt{\left[\left(\frac{1}{R_{\perp\psi}^t} - \frac{p_{\perp\psi}^t}{R_{\perp\psi}^A}\right) \cdot \sigma_n(\theta)\right]^2 + \left(\frac{\tau_{nt}(\theta)}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n\parallel}(\theta)}{R_{\perp\parallel}}\right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^t}{R_{\perp\psi}^A} \cdot \sigma_n(\theta) & \text{für } \sigma_n \geq 0 \\ \sqrt{\left(\frac{\tau_{nt}(\theta)}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n\parallel}(\theta)}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 + \left(\frac{p_{\perp\psi}^c}{R_{\perp\psi}^A} \cdot \sigma_n(\theta)\right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^c}{R_{\perp\psi}^A} \cdot \sigma_n(\theta) & \text{für } \sigma_n < 0 \end{cases} \quad (6.31)$$

$$\sqrt{\left(\frac{\tau_{nt}(\theta)}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n\parallel}(\theta)}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 + \left(\frac{p_{\perp\psi}^c}{R_{\perp\psi}^A} \cdot \sigma_n(\theta)\right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^c}{R_{\perp\psi}^A} \cdot \sigma_n(\theta) \quad \text{für } \sigma_n < 0 \quad (6.32)$$

Die Anstiegparameter $p_{\perp\psi}^t$ und $p_{\perp\psi}^c$ bzw. deren Verhältnis zu $R_{\perp\psi}^A$ wird wie folgt interpoliert:

$$\frac{p_{\perp\psi}^{t,c}}{R_{\perp\psi}^A} = \frac{p_{\perp\perp}^{t,c}}{R_{\perp\perp}^A} \cdot \cos^2 \psi + \frac{p_{\perp\parallel}^{t,c}}{R_{\perp\parallel}} \cdot \sin^2 \psi \quad (6.33)$$

mit

$$\cos^2 \psi = \frac{\tau_{nt}^2}{\tau_{nt}^2 + \tau_{n\parallel}^2} \quad \text{und} \quad \sin^2 \psi = 1 - \cos^2 \psi = \frac{\tau_{n\parallel}^2}{\tau_{nt}^2 + \tau_{n\parallel}^2} \quad (6.34)$$

sowie

$$R_{\perp\perp}^A = \frac{R_{\perp}^c}{2 \cdot (1 + p_{\perp\perp}^c)} \quad (6.35)$$

Gleichung (6.35) kann aus geometrischen Betrachtungen des Mohr'schen Spannungskreises für einachsigen Druck und der zugehörigen Bruchkurve gewonnen werden. Näheres hierzu findet man in [98].

Die Anstiegsparameter des Bruchkörpers $p_{\perp\perp}^{t,c}$ und $p_{\perp\perp}^{t,c}$ müssen anhand der Bruchkurve, die durch eine ausreichende Anzahl an Bruchversuchen ermittelt wurde, bestimmt werden. Darüber hinaus kann $p_{\perp\perp}^c$ auch direkt aus dem Bruchwinkel eines einachsigen Querdruckversuches errechnet werden, siehe hierzu z.B. [98], [159]. In Tabelle 6.2 sind typische Werte der Anstiegsparameter für glas- und kohlefaserverstärktes Epoxidharz mit einem Faservolumenanteil von 60% zusammengefasst.

Tabelle 6.2 Typische Anstiegsparameter des Puck'schen Bruchkriteriums für ausgewählte Faser-Kunststoff-Verbunde (nach [98])

$\varphi_F = 60\%$	$p_{\perp\perp}^t$	$p_{\perp\perp}^c$	$p_{\perp\perp}^t$	$p_{\perp\perp}^c$
GFK (Epoxidharz)	0,3	0,25	0,2 – 0,25	0,2 – 0,25
CFK (Epoxidharz)	0,35	0,3	0,25 – 0,3	0,25 – 0,3

Zur Bestimmung der Zwischenfaserbruchanstrengung und damit der Bruchgefahr wird weiterhin der Neigungswinkel der Wirkebene bzw. potentielle Bruchwinkel θ zur Berechnung der wirkebenenbasierten Spannungen in Gleichung (6.23) benötigt. Dieser Winkel ist leider nicht a priori bekannt und kann auch nicht analytisch berechnet werden. Vielmehr ist es notwendig, für möglichst viele Schnittwinkel und damit potentielle Bruchflächen (z.B. Variation von θ im Bereich $-90^\circ \leq \theta < +90^\circ$ in 1° -Schritten), die Spannungstransformation und anschließend die Berechnung der Zwischenfaserbruchanstrengung durchzuführen. Der Winkel, für den die Zwischenfaserbruchanstrengung den größten Wert annimmt, ist dann der potentielle Bruchwinkel. Die zugehörige Zwischenfaserbruchanstrengung gibt die Bruchgefahr an.

Eine Zusammenfassung der wichtigsten Gleichungen für das klassische Puck'sche Bruchkriterium kann dem Anhang D.2 entnommen werden.

6.2.4.1.3 Vereinfachungen für den ebenen Spannungszustand

Unter der Voraussetzung, dass die Spannungen in Laminatdickenrichtung vernachlässigbar klein sind, ergeben sich für die Zwischenfaserbruchbedingungen des Puck'schen Bruchkriteriums einige Vereinfachungen. Mit der Annahme $\tau_{23} = \tau_{31} = \sigma_3 = 0$ vereinfachen sich die Gleichungen (6.23) zu

$$\begin{aligned} \sigma_n(\theta) &= \sigma_2 \cos^2 \theta, \\ \tau_{n1}(\theta) &= \tau_{21} \cos \theta, \\ \tau_{nt}(\theta) &= -\sigma_2 \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Großer Vorteil bei Voraussetzung eines ebenen Spannungszustandes ist, dass der potentielle Bruchwinkel θ analytisch bestimmt werden kann, und die aufwendige numerische Suche entfällt. Für die Zwischenfaserbruchanstrengungen eines ebenen Spannungszustandes gelten die folgenden Gleichungen:

$$f_E \Big|_{\theta_{fp}=0^\circ} = \frac{1}{R_{\perp\parallel}} \left[\sqrt{\left(\frac{R_{\perp\parallel}}{R'_{\perp}} - p'_{\perp\parallel} \right)^2 \sigma_2^2 + \tau_{21}^2} + p'_{\perp\parallel} \sigma_2 \right] \text{ für } \sigma_2 \geq 0 \text{ (Modus A),} \quad (6.37)$$

$$f_E \Big|_{\theta_{fp}=0^\circ} = \frac{1}{R_{\perp\parallel}} \left(\sqrt{\tau_{21}^2 + (p_{\perp\parallel}^c \sigma_2)^2} + p_{\perp\parallel}^c \sigma_2 \right) \quad (6.38)$$

für $\sigma_2 < 0$ und $\left| \frac{\sigma_2}{\tau_{21}} \right| \leq \left| \frac{R_{\perp\parallel}^A}{\tau_{21,c}} \right|$ mit $\tau_{21,c} = R_{\perp\parallel} \sqrt{1 + 2p_{\perp\parallel}^c}$ (Modus B),

$$f_E = \left[\left(\frac{-\sigma_2}{R_{\perp}^c} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{21}}{2(1+p_{\perp\parallel}^c)R_{\perp\parallel}} \right)^2 \right] \frac{R_{\perp}^c}{-\sigma_2} \quad (6.39)$$

für $\sigma_2 < 0$ und $\left| \frac{\sigma_2}{\tau_{21}} \right| \geq \left| \frac{R_{\perp\parallel}^A}{\tau_{21,c}} \right|$ mit $\tau_{21,c} = R_{\perp\parallel} \sqrt{1 + 2p_{\perp\parallel}^c}$ (Modus C).

Der Bruchwinkel kann durch die Gleichung

$$\cos \theta_{fp} = \sqrt{\frac{1}{2(1+p_{\perp\parallel}^c)} \left[\left(\frac{R_{\perp\parallel}^A \cdot \tau_{21}}{R_{\perp\parallel} \cdot \sigma_2} \right)^2 + 1 \right]} \quad (6.40)$$

direkt bestimmt werden. Die Herleitung der Gleichungen (6.37) bis (6.40) ist im Anhang D.1 ausführlich geschildert. Wie im Anhang D.1 erläutert, ist die Grundlage der analytischen Bruchwinkelbestimmung und somit der Herleitung von Gleichung (6.39) die Einführung der in Gleichung (D.8) genannten Parameterkopplung. Durch diese zusätzliche Gleichung ist der Parameter $p_{\perp\parallel}^c$ nicht mehr frei wählbar. Für eine praktische Anwendung der Gleichung (6.39) müssen daher nun noch Bestimmungsgleichungen für $p_{\perp\parallel}^c$ und $R_{\perp\parallel}^A$ gefunden werden. Zu eben diesen gelangt man durch Auflösen der Parameterkopplungsgleichung (D.8) nach $p_{\perp\parallel}^c$:

$$p_{\perp\parallel}^c = \frac{R_{\perp\parallel}^A \cdot p_{\perp\parallel}^c}{R_{\perp\parallel}} \quad (6.41)$$

und anschließendem Einsetzen in (6.35). Dies führt auf eine quadratische Gleichung bezüglich $R_{\perp\parallel}^A$, wobei die negative der beiden Lösungen verworfen werden kann und

$$R_{\perp\parallel}^A = \frac{R_{\perp\parallel}}{2p_{\perp\parallel}^c} \left(\sqrt{1 + \frac{2R_{\perp}^c \cdot p_{\perp\parallel}^c}{R_{\perp\parallel}}} - 1 \right) \quad (6.42)$$

verbleit. Setzt man nun Gleichung (6.42) in (6.41) ein, so ist auch $p_{\perp\parallel}^c$ bestimmbar:

$$p_{\perp\perp}^c = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{2R_{\perp}^c \cdot p_{\perp\parallel}^c}{R_{\perp\parallel}}} - 1 \right). \quad (6.43)$$

Der Einfluss einer Parameterkopplung entsprechend Gleichung (D.8) auf die Bruchkurve ist äußerst gering, wie bei Betrachtung von Abb. 6.10 deutlich wird. Die durchgezogene Linie stellt die σ_2 - τ_{21} -Bruchkurve bei freier Wahl des Anstiegsparameters $p_{\perp\perp}^c$ dar, die gestrichelte Linie beschreibt dieselbe Bruchkurve bei Voraussetzung der Parameterkopplung. Die Materialparameter sowie Anstiegsparameter für die Kurven wurden wie in Abschnitt 6.2.5 gewählt bzw. berechnet.

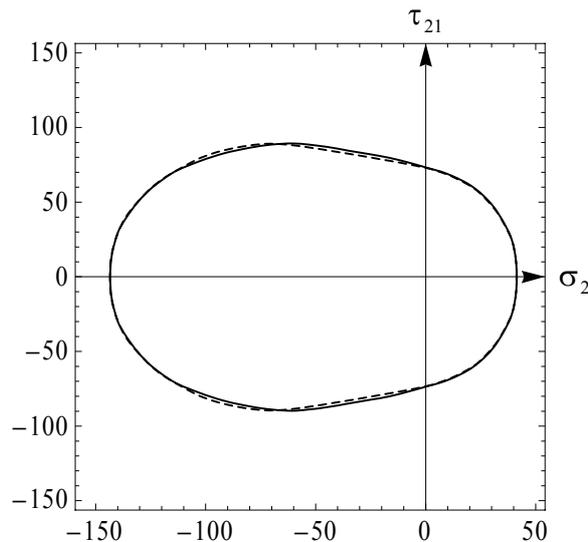


Abb. 6.10 Bruchkurven im σ_2 - τ_{21} -Spannungsraum für den ebenen Spannungszustand ohne (durchgezogene Linie) und mit Parameterkopplung (gestrichelte Linie)

6.2.4.1.4 Erweiterungen zu den Puck'schen Zwischenfaserbruchbedingungen

Entsprechend der Mohr'schen Hypothese, dass für den Zwischenfaserbruch nur die Spannungen auf der Wirkebene relevant sind, sollte eine gleichzeitige Belastung des Werkstoffes in Faserlängsrichtung eigentlich keinen Einfluss auf das Zwischenfaserbruchgeschehen haben. Dies ist auch korrekt, solange die Spannung in Faserrichtung hinreichend klein ist. Erreicht die faserparallele Spannung jedoch Werte knapp unterhalb der Festigkeitsgrenze, so kommt es aufgrund von statistischen Streuungen auch schon vor dem kompletten Faserversagen zum Reißen einzelner Fasern (bzw. zum Knicken unter Druckbelastung). Dies führt zu lokal begrenzten Mikroschädigungen in der Matrix (Ablösen der Matrix von der Faser, Mikrorisse in der Matrix), die auch eine Reduktion der Zwischenfaserbruchfestigkeiten bedingen. Deshalb ist es notwendig, die Wirkebenenbruchwiderstände R_{\perp}^t , $R_{\perp\perp}^A$ und $R_{\perp\parallel}$ mit einem Abschwächungsfaktor $\eta_{w1} < 1$ (w = weakening, 1 = Abschwächung aufgrund σ_1) zu multiplizieren [143]. Nach [98] bietet sich folgende Formulierung als Bestimmungsgleichung für den Abschwächungsfaktor an:

$$\eta_{w1} = \frac{c \cdot (a \sqrt{c^2(a^2 - s^2) + 1} + s)}{(ca)^2 + 1} \quad \text{mit } c = \frac{f_{E_0}}{f_{E_{FB}}} \quad \text{und } a = \frac{1-s}{\sqrt{1-m^2}}. \quad (6.44)$$

Hierbei sind s und m Parameter, die jeweils zwischen 0 und 1 variieren und an Versuchsergebnisse angepasst werden können, f_{E_0} die Zwischenfaserbruchanstrengung, die sich ohne den Einfluss der faserparallelen Spannung σ_1 ergibt und $f_{E_{FB}}$ die Faserbruchanstrengung, berechnet nach den Gleichungen (6.22). Um die Bedeutung der Parameter s und m zu verdeutlichen, sei auf Abb. 6.11 verwiesen. Hier ist die Bruchkurve für einen biaxialen, ebenen Spannungszustand entsprechend des Puck'schen Bruchkriteriums in Abhängigkeit dieser Parameter dargestellt.

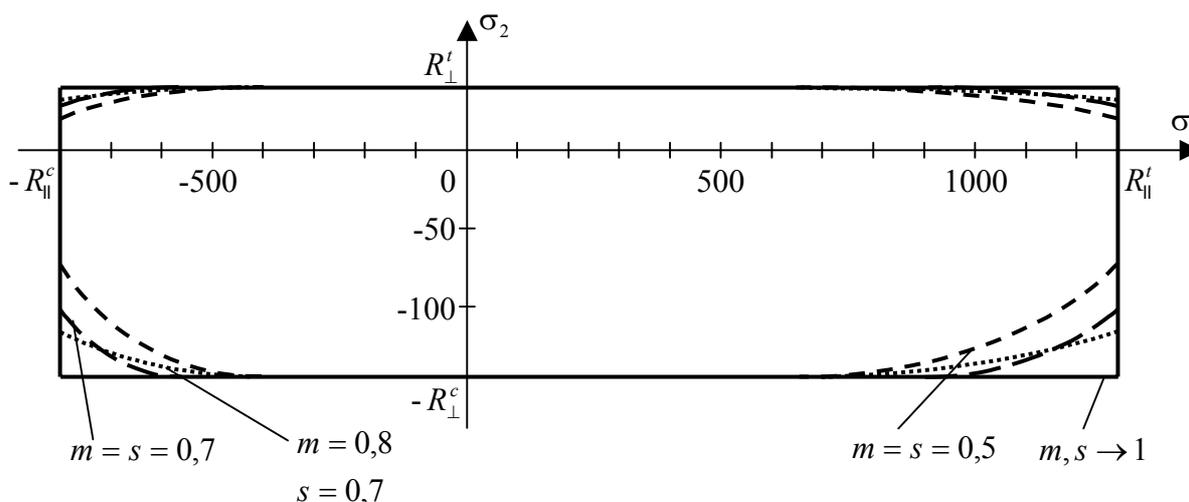


Abb. 6.11 Bruchkurve des Puck'schen Bruchkriteriums im σ_1 - σ_2 -Spannungsraum für verschiedene Parameter s und m (Material: E-Glas-verstärktes Epoxidharz)

Die Parameter s und m können für den Druck- und Zugbereich auch verschiedene Werte annehmen. Bei Abwesenheit von Versuchsdaten wird in [98] vorgeschlagen, $m = s = 0,5$ zu wählen. Wie weiterhin zu erkennen ist, ist die Bruchkurve des Puck'schen Kriteriums ohne den Abschwächungskoeffizienten η_{w1} bzw. für $m, s \rightarrow 1$ identisch mit dem Kriterium der maximalen Spannungen (siehe Abschnitt 6.2.1.1).

Für den ebenen Spannungszustand lassen sich die Bruchkörper der bisher aufgeführten Bruchkriterien auch beispielhaft anhand eines E-Glas-verstärkten Epoxidharzes (Festigkeitsparameter in N/mm^2 : $R_{II}^t = 1280$, $R_{II}^c = 800$, $R_{\perp}^t = 40$, $R_{\perp}^c = 145$, $R_{\parallel} = 73$) visualisieren. Abb. 6.12 zeigt zunächst den Bruchkörper des Puck'schen Bruchkriteriums. Fügt man die Bruchkörper des Tsai-Hill- und des Tsai-Wu-Bruchkriteriums für dasselbe Material in einer transparenten Darstellung hinzu, so lassen sich deutlich die Unterschiede der Kriterien erkennen (Abb. 6.13). Es wird offensichtlich, dass das Tsai-Hill-Kriterium für die Mehrzahl der Spannungszustände eher konservative Vorhersagen bezüglich der Bruchspannungen macht (siehe auch Abb. 6.21). Das Tsai-Wu-Kriterium verspricht besonders im Bereich des Zuges/Druckes in Faserrichtung bei gleichzeitigem Querdruck hohe Festigkeiten, die über den Werten der Zug/Druck-Basisfestigkeit in Faserrichtung liegen und somit zumindest für den

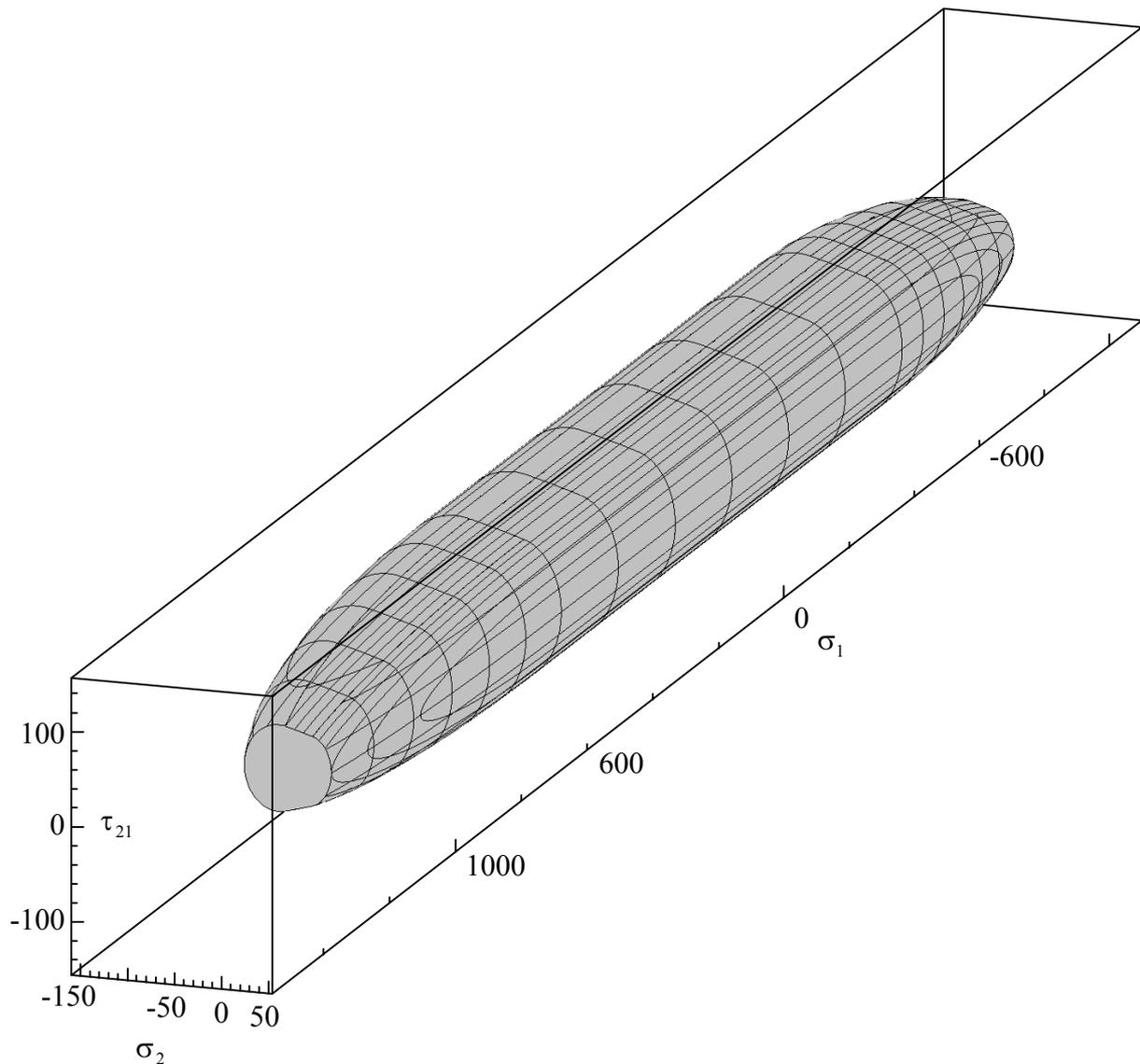


Abb. 6.12 Bruchkörper des Puck'schen Bruchkriteriums für den ebenen Spannungszustand im σ_1 - σ_2 - τ_{21} -Spannungsraum (Material: E-Glas-verstärktes Epoxidharz, Abschwächungsparameter $m = s = 0,5$, Anstiegsparameter des Zwischenfaserbruchkörpers $p'_{\parallel} = 0,3$ und $p^c_{\perp} = 0,25$)

Bereich, in dem die Druckspannung in Faserrichtung wesentlich höher ist als die zugehörige Basisfestigkeit, fragwürdig erscheinen.

Neben den faserparallelen Spannungen haben auch weitere Spannungskoordinaten, die nicht in der Wirkebene des Bruches liegen, entgegen der ursprünglichen Hypothese von Mohr Einfluss auf die Festigkeit. Dies kann man sich durch folgendes Gedankenexperiment verdeutlichen: Geht man von einer reinen σ_2 - τ_{31} -Belastung (mit $\sigma_2 > 0$) aus, so erfolgt der Bruch nach der Mohr'schen Hypothese entweder auf einer Bruchebene mit $\theta_{fp} = 0^\circ$ oder $\theta_{fp} = 90^\circ$, je nachdem ob die Bruchfestigkeit R'_\perp für den Querschub oder R_{\parallel} für den Schub eher erreicht wird (siehe auch Abb. 6.14c). Auf den Wirkebenen mit $\theta \neq 90^\circ$ und $\theta \neq 0^\circ$ herrschen nach Gleichung (6.23) aber auch die Spannungen $\sigma_n = \sigma_2 \cos^2 \theta$, $\tau_{n1} = \tau_{31} \sin \theta$ und $\tau_{nt} = -\sigma_2 \sin \theta \cos \theta$. Berechnet man für diese Wirkebenen die Anstrengungen, so stellt man

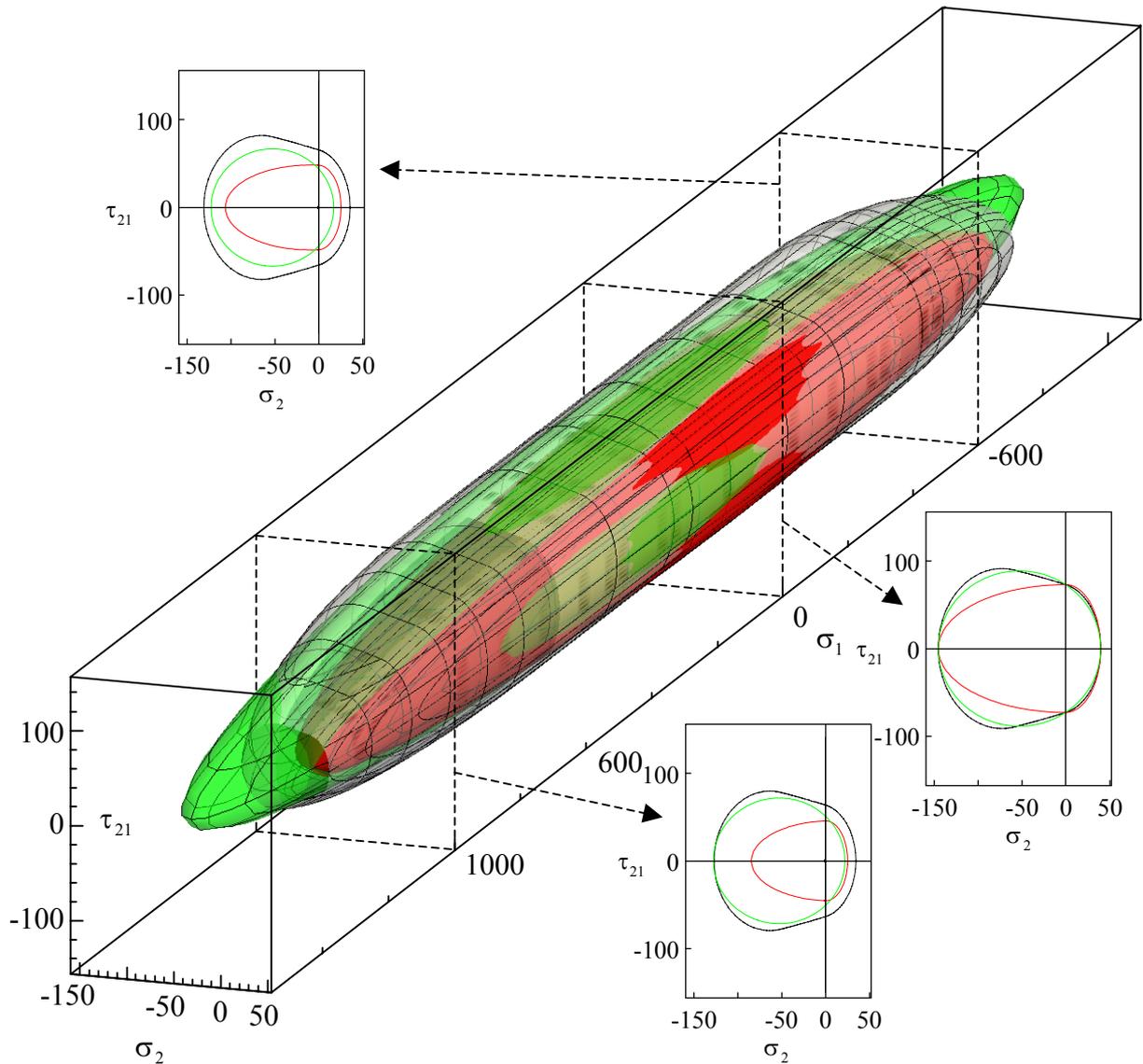


Abb. 6.13 Bruchkörper des Puck'schen Bruchkriteriums (grau) sowie des Tsai-Hill- (rot) und Tsai-Wu-Bruchkriteriums (grün, mit $F_{12}^* = 0$) für den ebenen Spannungszustand im σ_1 - σ_2 - τ_{21} -Spannungsraum (Material: E-Glas-verstärktes Epoxidharz)

fest, dass selbige nur geringfügig unterhalb der Anstrengung auf der Bruchebene liegen können (Darstellung der Anstrengungen für verschiedene Wirkebenen in [98]).

Aus mikromechanischen Betrachtungen weiß man, dass ein Zwischenfaserbruch sich durch ein gehäuftes Auftreten von Mikroschädigungen der Matrix ankündigt. Bereits bei Erreichen einer Anstrengung von $f_E = 0,5$ treten erste Risse auf, die die Matrixfestigkeit abmindern. Somit ist davon auszugehen, dass sich nicht nur in der eigentlichen Bruchebene, sondern auch in Wirkebenen für $\theta \neq \theta_{fp}$ Matrixschädigungen einstellen, wodurch die Festigkeiten R'_\perp bzw. R'_{\parallel} reduziert werden. Ähnliche Gedankenexperimente mit demselben Resultat lassen sich auch für eine σ_2 - τ_{21} -Belastung und eine σ_2 - σ_3 -Belastung anstellen. Darüber hinaus enthalten reale Faser-Matrix-Verbunde immer produktionsbedingte Fehlstellen, wie z.B. kleine Lufteinschlüsse. Dies kann dazu führen, dass der rechnerisch ermittelte Bruchwinkel vom realen Bruchwinkel abweicht, wenn die Anstrengung für einen anderen Bruchwinkel, wie

oben beschrieben, nur geringfügig kleiner ist und sich zudem eine oder mehrere Fehlstellen in der Bruchebene befinden.

Um diese beiden Effekte von Mikroschädigung und Probabilistik zu berücksichtigen, wird von Puck empfohlen, einen Korrekturfaktor $\eta_{m+p} < 1$ (m = Mikroschädigung bzw. micro damage, p = Probabilistik bzw. probabilistics) einzuführen, durch den die nach der „klassischen“ Vorgehensweise berechnete Anstrengung zu dividieren ist:

$$f_{E_{m+p}} = \frac{f_E(\theta_{fp})}{\eta_{m+p}}. \quad (6.45)$$

Im Sinne einer Aufintegration aller Mikroschädigungen und Fehlstellen für alle Wirkebenen wird in [98] zunächst vorgeschlagen, folgende Summe zu bilden:

$$S \approx \sum_{-90^\circ}^{+89^\circ} (f'_E(\theta) - f'_{E_{thr}}) \cdot \Delta\theta. \quad (6.46)$$

Hierin ist $f'_E(\theta)$ die gemäß

$$f'_E(\theta) = \frac{f_E(\theta)}{f_{E_{max}}} \quad (6.47)$$

normierte Anstrengung (wobei nur Anstrengungen $f'_E(\theta) > f'_{E_{thr}}$ berücksichtigt werden), $f'_{E_{thr}}$ ein Schwellenwert der normierten Anstrengung, unterhalb dessen mikromechanische Effekte und mögliche Fehlstellen nicht berücksichtigt werden (Empfehlung nach [98]: $f'_{E_{thr}} = 0,5$) und $\Delta\theta$ die Schrittweite für die Berechnung der Anstrengungen auf den Wirkebenen (z.B. $\Delta\theta = 1^\circ$). Für die Berechnung des Korrekturfaktors selber wird dann ebenfalls in [98] folgende Formel angegeben:

$$\eta_{m+p} = 1 - \Delta_{max} \frac{S - S_{ref}}{S_{max} - S_{ref}}. \quad (6.48)$$

Hierbei ist Δ_{max} ein Kalibrierungsfaktor für den Korrekturfaktor und nimmt für gewöhnlich Werte zwischen 0,15 und 0,25 an. Die Konstanten $S_{max} = 90^\circ$ und $S_{ref} = 30^\circ$ sorgen für eine entsprechende Empfindlichkeit von η_{m+p} gegenüber S bei verschiedenen Spannungszuständen (Einzelheiten siehe [98]).

Um den Einfluss der m+p-Korrektur deutlich zu machen, sei auf Abb. 6.14 verwiesen, für deren Erstellung wie bereits zuvor die Festigkeitsparameter des E-Glas-verstärkten Epoxidharzes verwendet wurden. Wie zu erkennen ist, haben die beschriebenen Effekte (bzw. der berechnete Korrekturfaktor η_{m+p}) besonders im Bereich einer hohen Querspannung σ_2 bei gleichzeitig hoher Schubspannung τ_{31} (Abb. 6.14c) einen großen Einfluss auf die Festigkeit (fett gezeichnete Kurven). Gleiches gilt für den σ_2 - σ_3 -Zugbereich (Abb. 6.14a). Die m+p-Korrektur muss demzufolge also nicht zwingend bei der Auslegung jedes Bauteils angewandt werden. Jedoch ist beispielsweise für Kräfteinleitungsbereiche, in denen räumliche Spannungszustände auftreten, eine m+p-Korrektur geboten [173].

Bei den durch Versuche bestimmten Basisfestigkeiten sind bereits die m+p-Effekte enthalten. Diese müssen vor einer Anwendung der m+p-Korrektur wieder herausgerechnet werden, da sonst eine doppelte Korrektur erfolgen würde.

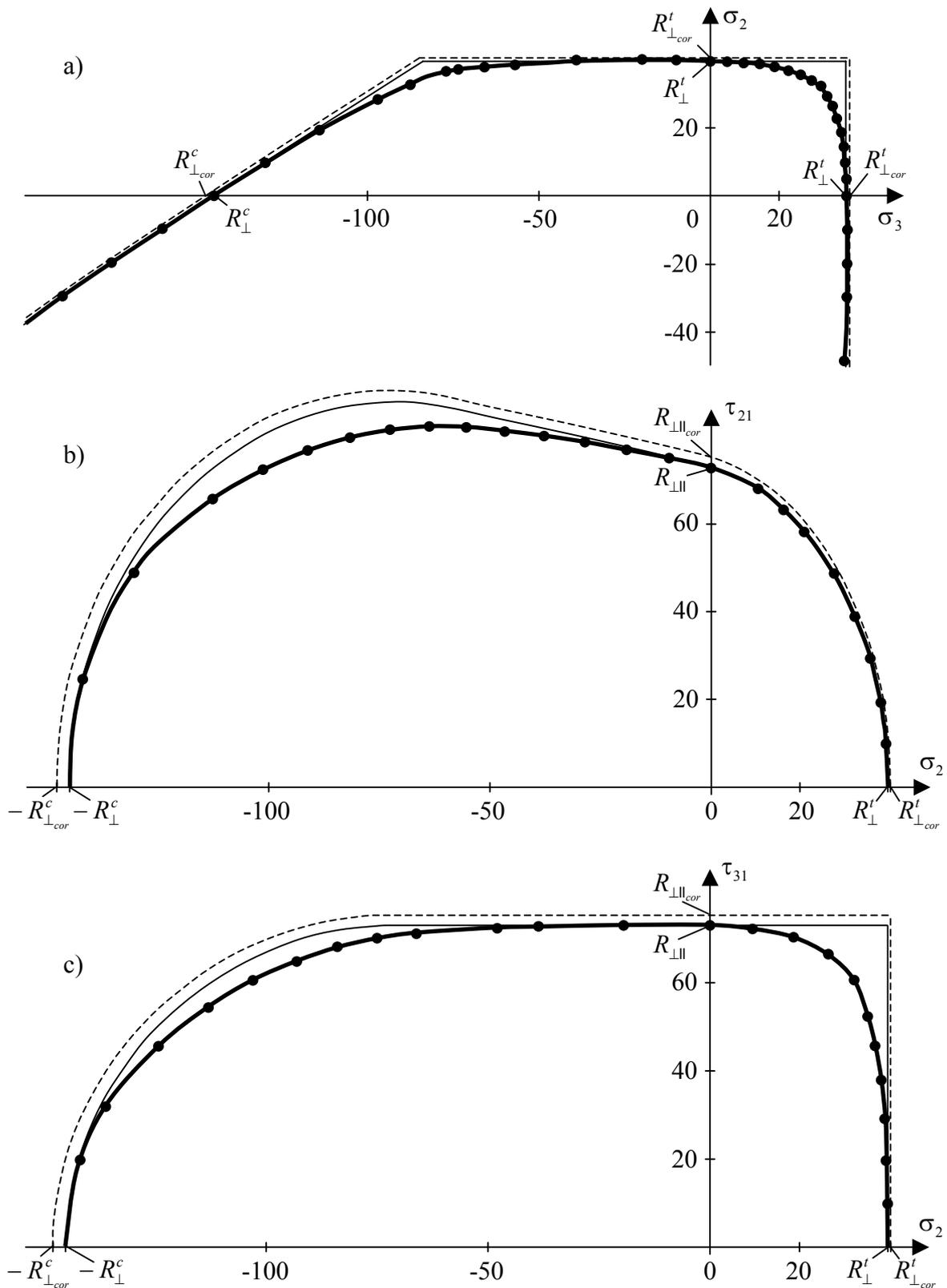


Abb. 6.14 Bruchkurven des Puck'schen Bruchkriteriums mit und ohne m+p-Korrektur

- mit nach Gl. (6.49) korrigierten Basisfestigkeiten
- ohne korrigierte Basisfestigkeiten (Puck „klassisch“)
- mit m+p-Korrektur

Um die korrigierten Basisfestigkeiten zu erhalten ist es daher notwendig, die experimentell ermittelten Basisfestigkeiten durch den jeweils gültigen Korrekturfaktor zu teilen:

$$R_{\perp_{cor}}^t = \frac{R_{\perp}^t}{\eta_{m+p}}, \quad R_{\perp_{cor}}^c = \frac{R_{\perp}^c}{\eta_{m+p}}, \quad R_{\perp\parallel_{cor}} = \frac{R_{\perp\parallel}}{\eta_{m+p}}, \quad R_{\perp\perp_{cor}}^A = \frac{R_{\perp\perp}^A}{\eta_{m+p}}. \quad (6.49)$$

Mit Hilfe dieser korrigierten Basisfestigkeiten lassen sich die Bruchkurven ohne m+p-Korrektur angeben (gestrichelte Kurven in Abb. 6.14). Die durchgezogenen, dünnen Linien zeigen die Bruchkurven, berechnet ohne m+p-Korrektur, nach der „klassischen“ Puck'schen Theorie. Fett dargestellt sind die Bruchkurven mit m+p-Korrektur, für die ein Kalibrierungsfaktor $\Delta_{max} = 0,2$ gewählt wurde.

6.2.4.2 Das LaRC04-Bruchkriterium

Auch beim LaRC04-Bruchkriterium [139] für Faser-Kunststoff-Verbunde handelt es sich um ein wirkebenenbasiertes Bruchkriterium. Die Herleitung der Bruchbedingungen erfolgt hier allerdings aus bruchmechanischen Überlegungen und besitzt gegenüber dem Puck'schen Kriterium Erweiterungen hinsichtlich des Druckversagens in Faserrichtung sowie des sogenannten In-situ-Effektes (siehe z.B. [135]). Es gilt weiterhin das in Abb. 4.1 verwendete Koordinatensystem, wobei die 3-Richtung senkrecht auf der Schichtebene steht.

6.2.4.2.1 Faserbruchbedingung bei Zugbelastung

Die Bruchbedingung für Zugversagen in Faserrichtung ist identisch zu Puck und lautet:

$$\frac{\sigma_1}{R_{\parallel}^t} = 1 \quad \text{für } \sigma_1 > 0. \quad (6.50)$$

6.2.4.2.2 Bruchbedingung für Zugversagen quer zur Faserrichtung (Matrix-Zugversagen)

Die Herleitung einer Bruchbedingung der Matrix aufgrund von Zug erfolgt über die Analogie von Eigenverzerrungen und Inhomogenitäten. Hierzu wird zunächst ein Eigenverzerrungsproblem betrachtet. Dabei werden einem unendlich großen Körper durch einen physikalischen Prozess (z.B. plastische Deformationen oder Phasentransformationen) in einem bestimmten Bereich, welcher im Übrigen als „Einschluss“ bezeichnet wird und über die gleichen elastischen Eigenschaften wie die gesamte Umgebung verfügt, inelastische Dehnungen (sogenannte Eigen- oder Transformationsverzerrungen) aufgezwungen. Zunächst besteht die Aufgabe in der Bestimmung der Spannungs- und Verzerrungsfelder aufgrund der Transformationsverzerrungen. Hierzu wird davon ausgegangen, dass sich der Gesamtverzerrungstensor additiv aus einem elastischen Anteil und dem Transformationsanteil zusammensetzt (zulässig bei Voraussetzung kleiner Deformationen):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^t. \quad (6.51)$$

Die Eigendehnungen sind ursächlich nicht mit Spannungen verknüpft, weshalb eventuelle Spannungen im Material vom elastischen Verzerrungsanteil stammen:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{el} = \mathbf{E} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^t). \quad (6.52)$$

Für beliebige Einschlussgeometrien und Eigendehnungsfelder $\boldsymbol{\varepsilon}^t$ ist es nicht möglich, eine geschlossene Lösung für das Spannungs-, Gesamtverzerrungs- bzw. Gesamtverschiebungsfeld anzugeben. Dies gelingt nach Eshelby [46] jedoch für einen ellipsoidförmigen Einschluss, der einer konstanten Eigendehnung $\boldsymbol{\varepsilon}^t = \text{const.}$ unterliegt. Für diesen Spezialfall eines ellipsoidförmigen Einschlusses der Form

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1 \quad (6.53)$$

erhält man als Lösung, dass das Gesamtverzerrungsfeld linear über den vierstufigen Eshelby-Tensor, der nur von den elastischen Materialeigenschaften und der Einschlussgeometrie abhängt, mit den Eigenverzerrungen verknüpft ist:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^t. \quad (6.54)$$

Betrachtet wird nun eine weitere Art eines Materialdefektes, eine Inhomogenität. Diese ist gekennzeichnet durch ortsabhängige Materialeigenschaften. Im Folgenden werden die elastischen Materialeigenschaften der Inhomogenität durch den Tensor \mathbf{E}^* und die Materialeigenschaften der Umgebung durch den Tensor \mathbf{E} beschrieben. Die Spannungen und Dehnungen der gesamten Struktur setzen sich additiv aus den Spannungen $\boldsymbol{\sigma}^\infty$ und Dehnungen $\boldsymbol{\varepsilon}^\infty$ zusammen, die in der Struktur aufgrund einer äußeren Belastung auftreten würden, wenn keine Inhomogenität vorhanden wäre, und den Spannungen $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ und Dehnungen $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$, die von der Inhomogenität verursacht werden:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^\infty + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^\infty + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (6.55)$$

Die Gesamtspannungen in der Inhomogenität ergeben sich demnach gemäß

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^\infty + \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}^* \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^\infty + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}). \quad (6.56)$$

Die Idee der Eigenverzerrungsanalogie ist es nun, das Materialverhalten des eigentlich heterogenen Materials durch das Materialverhalten eines homogenen Materials mit äquivalenten Eigendehnungen $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ auszudrücken (siehe hierzu auch [71]):

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^\infty + \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^\infty + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}^*). \quad (6.57)$$

Aus dem Vergleich von (6.56) und (6.57) wird sofort ersichtlich, dass hierfür

$$\mathbf{E} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^\infty + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}^*) = \mathbf{E}^* \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^\infty + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (6.58)$$

gelten muss. Die äquivalente Eigendehnung $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ soll nur innerhalb der ellipsoidförmigen Region von null verschieden sein, wodurch das Eshelby-Resultat (6.54) für die Bestimmung von $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ genutzt werden kann:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^*. \quad (6.59)$$

Setzt man (6.59) in (6.58) ein, so erhält man eine Gleichung zur Bestimmung der äquivalenten Eigendehnung ε^* infolge einer im Unendlichen aufgetragenen konstanten Verzerrung ε^∞ :

$$(\mathbf{E}^* - \mathbf{E}) \cdot \varepsilon^\infty = (-\mathbf{E} + (\mathbf{E} - \mathbf{E}^*) \cdot \mathbf{S}) \cdot \varepsilon^* . \quad (6.60)$$

Handelt es sich bei der betrachteten Inhomogenität um einen Hohlraum, so ist $\mathbf{E}^* = \mathbf{0}$ und man erhält für die äquivalente Eigendehnung

$$\varepsilon^* = \underbrace{(\mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{S})^{-1}}_{\mathbf{Q}^{-1}} \cdot \underbrace{\mathbf{E} \cdot \varepsilon^\infty}_{\boldsymbol{\sigma}^\infty} , \quad (6.61)$$

womit als Endergebnis der Analogiebetrachtung für die Gesamtverzerrungen an der Hohlraumwand

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^\infty + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon}^\infty + \mathbf{S} \cdot \varepsilon^* = \boldsymbol{\varepsilon}^\infty + \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}^\infty \quad (6.62)$$

folgt. Somit ist schließlich auch eine Bestimmung der Spannungen an der Hohlraumwand möglich:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} . \quad (6.63)$$

Nach [107] lässt sich die Energie, die bei der Entstehung eines Hohlraumes frei wird, mit

$$E_{int} = \frac{1}{2} \int_A u_i^w n_j \sigma_{ij}^\infty dA \quad (6.64)$$

angeben. Dabei ist u_i^w die Verschiebung der Hohlraumwand, n_j ein Einheitsnormalenvektor auf der Hohlraumwand, welcher in Richtung des noch vorhandenen Materials zeigt, und A die Hohlraumoberfläche. Mit Hilfe des Gauß'schen Satzes (siehe z.B. [2]) kann man (6.64) auch in ein Volumenintegral umformen:

$$E_{int} = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij}^\infty u_i^w)_{,j} dV = \frac{1}{2} \int_V (\underbrace{\sigma_{ij,j}^\infty u_i^w}_{=0, da\ GGW} + \sigma_{ij}^\infty u_{i,j}^w) dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^\infty \varepsilon_{ij}^* dV , \quad (6.65)$$

woraus man schließlich mit (6.61)

$$E_{int} = \frac{1}{2} V \boldsymbol{\sigma}^\infty \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}^\infty \quad (6.66)$$

erhält.

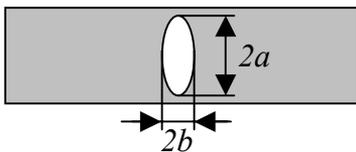


Abb. 6.15 Abmaße des Hohlraumes
($c \rightarrow \infty$)

Es wird weiterhin angenommen, dass es sich bei dem erwähnten Hohlraum um einen unendlich langen, elliptischen Zylinder mit den Abmaßen $2a \cdot 2b \cdot c$ und $c \rightarrow \infty$ handelt (Abb. 6.15). Führt man für das Verhältnis der Ellipsenachsen den Parameter $\lambda = b/a$ ein, so erhält man für die auf die Zylinderlänge bezogene freigesetzte Energie

$$E_{int} = \frac{1}{2} \pi a^2 \lambda \boldsymbol{\sigma}^\infty \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}^\infty . \quad (6.67)$$

Für $\lambda \rightarrow 0$ gelingt der Übergang zum Riss. Da jedoch für den Grenzübergang $\lambda \rightarrow 0$ der Tensor \mathbf{Q} singularär würde, führt man das Produkt $\mathbf{A} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \mathbf{Q}^{-1}$ ein, welches endliche Werte annimmt [107]. Gleichung (6.67) kann somit zu

$$E_{int} = \frac{1}{2} \pi a^2 \boldsymbol{\sigma}^\infty \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma}^\infty \quad (6.68)$$

umgeschrieben werden. Die einzigen von null verschiedenen Koordinaten von \mathbf{A} kann man [107] entnehmen und erhält nach [139] und [44] für (6.68) und ein nichtlineares Schubverhalten:

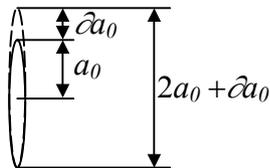
$$\begin{aligned} E_{int} &= \frac{1}{2} \pi a^2 \left(\Lambda_{22}^o \sigma_2^2 + \Lambda_{23}^o \tau_{23}^2 + 2 \int_0^{\tau_{12}} \tau_{12} \Lambda_{12}^o d\tau_{12} \right) \\ &= \frac{1}{2} \pi a^2 \left(\Lambda_{22}^o \sigma_2^2 + \Lambda_{23}^o \tau_{23}^2 + 2 \int_0^{\gamma_{12}} \tau_{12} d\gamma_{12} \right) \\ &= \frac{1}{2} \pi a^2 \left(\Lambda_{22}^o \sigma_2^2 + \Lambda_{23}^o \tau_{23}^2 + \chi(\gamma_{12}) \right) \end{aligned} \quad (6.69)$$

mit

$$\chi(\gamma_{12}) = 2 \int_0^{\gamma_{12}} \tau_{12} d\gamma_{12} \quad \text{und} \quad \Lambda_{22}^o = \Lambda_{23}^o = 2 \left(\frac{1}{E_2} - \frac{\nu_{21}^2}{E_1} \right). \quad (6.70)$$

Bezieht man die durch die Hohlräumstehung freigesetzte Energie E_{int} auf die aufgrund des Rissfortschrittes veränderte Rissoberfläche ∂A , erhält man die Energiefreisetzungsrate.

Im Folgenden erfolgt die Bestimmung des Beitrages der einzelnen Spannungskordinaten zur Energiefreisetzungsrate und damit zur Rissentstehung. Dies wird beispielhaft für die Schubspannungskordinate τ_{12} durchgeführt und funktioniert auf dieselbe Art für die anderen Koordinaten σ_2 und τ_{23} . Hierzu wird zunächst davon ausgegangen, dass nur eine ebene Schubspannung wirkt und $\sigma_2 = \tau_{23} = 0$ gilt. Nimmt man an, dass die Rissausdehnung in Längsrichtung (longitudinale Richtung = L , entspricht der Faserrichtung) a_L beträgt, dann ergibt sich die Änderung der Rissoberfläche bei Risswachstum in der Querrichtung (transversale Richtung = T) zu



$$A = 2a_0 \cdot a_L \cdot 2$$

$$A' = 2(2a_0 + \partial a_0) a_L$$

$$\partial A = A' - A = 2a_L \cdot \partial a_0.$$

Damit beträgt die Energiefreisetzungsrate für Rissfortpflanzung in Querrichtung, wobei in Gleichung (6.69) $a = a_0$ zu setzen ist, bei Bezug der Oberflächenänderung ∂A auf die Risslänge in Längsrichtung

$$G_c^T = \frac{a_L \partial E_{int}}{\partial A} = \frac{1}{2} \frac{\partial E_{int}}{\partial a_0} = \frac{\pi a_0}{2} \chi(\epsilon R_{\perp \parallel}). \quad (6.71)$$

Da es sich bei ${}^\varepsilon R_{\perp\parallel}$ um die Schubverzerrung γ_{12} beim Versagen handelt, wird G_c^T als kritische Energiefreisetzungsrate bezeichnet. Bei Rissfortpflanzung in Längsrichtung wird von einer Rissverlängerung um eine Einheitslänge ausgegangen, da ja für die Herleitung von (6.71) die Rissoberfläche schon auf die Risslänge in Längsrichtung bezogen wurde. Die Energiefreisetzungsrate berechnet sich demnach (siehe auch [44]) nach

$$G_c^L = \frac{E_{int}}{\Delta A} = \frac{E_{int}}{2a_0 \cdot 1} = \frac{\pi a_0}{4} \chi({}^\varepsilon R_{\perp\parallel}). \quad (6.72)$$

Weiterhin wird in die Formulierung einer Bruchbedingung für das Zugversagen der Matrix auch der „In-situ-Effekt“ mit einbezogen. Dieser Effekt ist durch eine erhöhte Querzug- und Schubfestigkeit einer Schicht im Vergleich zur unidirektionalen Einzelschicht gekennzeichnet, wenn diese Schicht zwischen weiteren Schichten mit anderer Faserorientierung eingebettet ist. Der Effekt hängt außerdem auch von der Anzahl der Schichten im Laminat, deren Orientierung und der Dicke der betrachteten inneren Schicht ab (siehe Abb. 6.16 und z.B. [135], [44], [30]). Wenngleich der In-situ-Effekt u.a. in den angegebenen Veröffentlichungen erwähnt bzw. beobachtet wurde, ist er dennoch nicht unumstritten. Die höhere erfasste Festigkeit könnte nämlich auch aus einer schlechteren Detektierbarkeit der Rissentstehung bei dünneren Schichten resultieren, da sich hier die Risse weniger weit öffnen, was eine Beobachtbarkeit erschwert und somit zu einer irrtümlich höheren Festigkeitsannahme führen könnte.

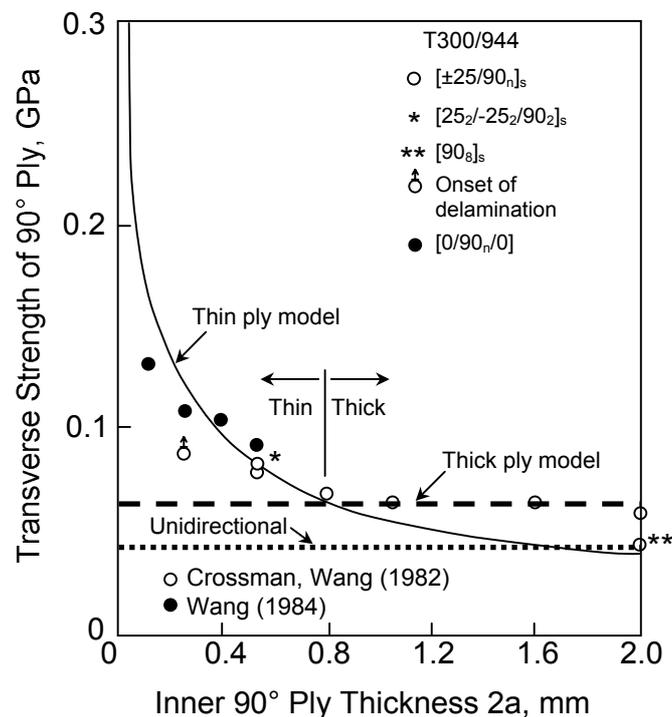


Abb. 6.16 „In-situ-Effekt“: Zunahme der Querzugfestigkeit einer 90°-Schicht, umgeben von Schichten anderer Faserorientierung, bei abnehmender Schichtdicke (aus [139])

Eine Belastung des Risses durch eine Zugspannung $\sigma_2 > 0$ entspricht einer Rissöffnungsart nach Modus I (Definition der Rissöffnungsarten nach [71]). Die Belastungen durch τ_{12} (Mo-

dus II) und τ_{23} (Modus III) werden in einem gemeinsamen Schubmodus zusammengefasst und die entsprechenden Energiefreisetzungsraten addiert ($G_{SH} = G_{II} + G_{III}$):

$$G_{SH}^T = \frac{\pi a_0}{2} (\Lambda_{23}^o \tau_{23}^2 + \chi(\gamma_{12})), \quad G_{SH}^L = \frac{\pi a_0}{4} (\Lambda_{23}^o \tau_{23}^2 + \chi(\gamma_{12})). \quad (6.73)$$

Nach [139] gibt es keinen Beweis für einen Unterschied in den kritischen Energiefreisetzungsraten für die Modi II und III, zumal die Messung der kritischen Energiefreisetzungsraten für den Modus III äußerst schwierig und nicht standardisiert ist. Daher ist die zusammengefasste Betrachtung in einem Schubmodus gerechtfertigt und für die Berechnung der kritischen Energiefreisetzungsraten kann die Bruchschubverzerrung ${}^\varepsilon R_{\perp\parallel}$ bzw. die In-situ-Bruchverzerrung ${}^\varepsilon R_{\perp\parallel is}$ genutzt werden. Somit ergeben sich mit Hilfe von (6.69)-(6.72) die kritischen Energiefreisetzungsraten für longitudinales Risswachstum

$$G_{Ic}^L = \frac{\pi a_0}{4} \Lambda_{22}^o R_{\perp\parallel is}^t{}^2, \quad G_{SHc}^L = \frac{\pi a_0}{4} \chi({}^\varepsilon R_{\perp\parallel is}) \quad (6.74)$$

und transversales Risswachstum

$$G_{Ic}^T = \frac{\pi a_0}{2} \Lambda_{22}^o R_{\perp\parallel is}^t{}^2, \quad G_{SHc}^T = \frac{\pi a_0}{2} \chi({}^\varepsilon R_{\perp\parallel is}) \quad (6.75)$$

für die verschiedenen Rissöffnungsarten mit der In-situ-Querzugfestigkeit $R_{\perp\parallel is}^t$. Das Bruchkriterium für die Querzugbelastung ist nun mit Hilfe der kritischen Energiefreisetzungsraten formuliert und lautet

$$(1-g) \sqrt{\frac{G_I^{T,L}}{G_{Ic}^{T,L}}} + g \frac{G_I^{T,L}}{G_{Ic}^{T,L}} + \frac{G_{SH}^{T,L}}{G_{SHc}^{T,L}} = 1 \quad (6.76)$$

mit der Materialkonstanten

$$g = \frac{\Lambda_{22}^o R_{\perp\parallel is}^t{}^2}{\chi({}^\varepsilon R_{\perp\parallel is})}. \quad (6.77)$$

Setzt man die bereits ermittelten Energiefreisetzungsraten und kritischen Energiefreisetzungsraten (6.71)-(6.75) in (6.76) ein, erhält man eine Formulierung des Bruchkriteriums bezüglich der Spannungen:

$$(1-g) \frac{\sigma_2}{R_{\perp\parallel is}^t} + g \left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp\parallel is}^t} \right)^2 + \frac{\Lambda_{23}^o \tau_{23}^2 + \chi(\gamma_{12})}{\chi({}^\varepsilon R_{\perp\parallel is})} = 1. \quad (6.78)$$

Durch Vernachlässigung bestimmter Terme bzw. bei entsprechender Parameterwahl führt (6.78) auch auf andere Bruchkriterien. Beispielsweise erhält man für $g=1$, lineares Schubverhalten und $\tau_{23}=0$ ein älteres Kriterium von Puck [142], welches auch von Hashin und Rotem [81] empfohlen wird. Zur Bestimmung der In-situ-Festigkeiten finden sich im Anhang E.1 Informationen.

Weiterhin ist zu beachten, dass bei Anwendung von (6.78) auf unidirektionale Einzelschichtlaminare ein Riss in transversaler Richtung ungehindert wachsen kann, da er nicht durch eine

benachbarte Schicht einer anderen Faserorientierung gestoppt wird. Außerdem befinden sich die ursprünglichen, rissauslösenden Defekte vor allem an der Oberfläche, was die Energiefreisetzungsraten im Vergleich zu einem Riss im Inneren erhöht. Daher werden die Energiefreisetzungsraten bei unidirektionalen Laminaten gemäß

$$\begin{aligned} G_{Ic}^T &= 1,12^2 \pi a_0 \Lambda_{22}^o R_{\perp}^t{}^2, \\ G_{SHc}^T &= \pi a_0 \chi(\varepsilon R_{\perp||}) \end{aligned} \quad (6.79)$$

durch entsprechende Vorfaktoren korrigiert (näheres siehe [139]).

6.2.4.2.3 Bruchbedingung für Druckversagen quer zur Faserrichtung (Matrix-Druckversagen)

Das LaRC04-Kriterium nutzt für die Vorhersage des Matrix-Druckversagens das Mohr-Coulomb-Kriterium, welches in modifizierter Form auch beim Puck'schen Bruchkriterium Verwendung findet. Ein reiner Schubbruch tritt nicht auf, da dieser durch Reibung verhindert wird, welche durch die Normalspannungskomponente auf der Bruchfläche induziert wird.

Wie jedes wirkebenenbasierte Bruchkriterium verlangt auch das LaRC04-Bruchkriterium eine Transformation der Spannungskoordinaten in wirkebenenbasierte Spannungskoordinaten entsprechend den Gleichungen (6.23). Nimmt man nach der Spannungstransformation zunächst $\tau_{n1} = 0$ an (d.h. $\tau_{31} = \tau_{21} = 0$), so gilt nach dem Mohr-Coulomb-Kriterium

$$|\tau_{nt}| + \eta_{nt} \sigma_n = R_{\perp\perp}^A. \quad (6.80)$$

Der stets positive Reibungskoeffizient η_{nt} sorgt also dafür, dass bei einer Druckbelastung auf der Wirkebene ($\sigma_n < 0$) die Schubfestigkeit erhöht wird. Bruch tritt dann ein, wenn die durch (6.80) beschriebene Gerade den zugehörigen Mohr'schen Spannungskreis berührt (siehe Abb. 6.17).

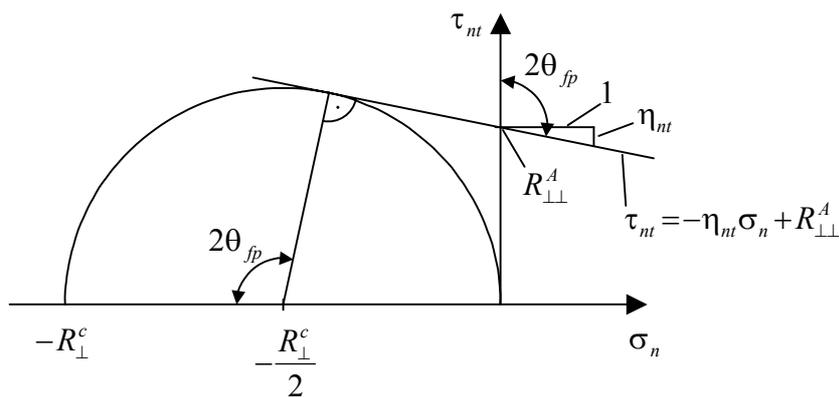


Abb. 6.17 Mohr'scher Spannungskreis für einen bruchauslösenden Druckspannungszustand

Nach Abb. 6.17 ergibt sich der Reibungskoeffizient η_{nt} folgendermaßen:

$$\eta_{nt} = \tan\left(2\theta_{fp} - \frac{\pi}{2}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta_{fp}\right) = -\cot(2\theta_{fp}) \Rightarrow -\frac{1}{\eta_{nt}} = \tan(2\theta_{fp}). \quad (6.81)$$

Der Bruchwinkel θ_{fp} wird durch einachsige Querdruckversuche ermittelt und liegt für gewöhnlich bei etwa 53° .

Aus Gleichung (6.80) kann man direkt ein Bruchkriterium ableiten. Bruch tritt genau dann ein, wenn

$$\frac{|\tau_m|}{R_{\perp\perp}^A - \eta_m \sigma_n} = 1 \tag{6.82}$$

erfüllt ist. Für den allgemeinen Fall $\tau_{n1} \neq 0$ bedient sich das LaRC04-Kriterium derselben Formulierung wie sie auch ursprünglich bei Puck Anwendung findet (vgl. Gleichung (6.24)):

$$\left(\frac{\tau_m}{R_{\perp\perp}^A - \eta_m \sigma_n} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel is} - \eta_{n1} \sigma_n} \right)^2 = 1. \tag{6.83}$$

Im Unterschied zu Puck wird hier jedoch wieder die In-situ-Festigkeit $R_{\perp\parallel is}$ genutzt, welche natürlich bei einschichtigen Laminaten durch $R_{\perp\parallel}$ zu ersetzen ist. Bei Abwesenheit experimenteller Daten wird ebenfalls die durch Puck vorgeschlagene Parameterkopplung

$$\frac{\eta_m}{R_{\perp\perp}^A} = \frac{\eta_{n1}}{R_{\perp\parallel}} \tag{6.84}$$

zur Bestimmung von η_{n1} empfohlen (vgl. Gl. (D.8)). Setzt man darüber hinaus die Transformationsbeziehungen (6.23) in (6.82) für einen reinen Querdruckspannungszustand ein (nur $\sigma_2 \neq 0$), so erhält man mit

$$R_{\perp\perp}^A = R_{\perp}^c \cos(\alpha_0) \left(\sin(\alpha_0) + \frac{\cos(\alpha_0)}{\tan(2\alpha_0)} \right) \tag{6.85}$$

auch eine Bestimmungsgleichung für $R_{\perp\perp}^A$.

Mit Hilfe von (6.80) gelingt also eine Interpretation der Anstiegsparameter $p_{\perp\perp}^c$ und $p_{\perp\parallel}^c$ in der ursprünglichen Formulierung von Puck (6.24) als „Reibungskoeffizienten“, die in sich alle mikromechanisch auftretenden und in einem praktikablen Bruchkriterium nicht berücksichtbaren Effekte vereinen. Auch hier ist der potentiellen Bruchwinkel derjenige, der die Bruchbedingung (6.83) maximiert und durch eine aufwendige numerische Suche gefunden werden muss.

Es sei jedoch ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Anstiegsparameter $p_{\perp\perp}^c$ und $p_{\perp\parallel}^c$ in den Gleichungen der endgültigen Formulierung des Puck’schen Kriteriums (Gleichungen (6.25) - (6.35)) sowie in den weiteren Betrachtungen zum ebenen Spannungszustand **nicht** mit den Anstiegsparametern des hier genutzten Mohr-Coulomb-Kriteriums (bzw. der ursprünglichen Puck-Formulierung) η_m und η_{n1} übereinstimmen.

6.2.4.2.4 Faserbruchbedingung bei Druckbelastung

Für die meisten Composite-Materialien mit hohem Faservolumenanteil beobachtet man für das Druckversagen in Faserrichtung die Ausbildung des Versagensbereiches als Lokalisierung in Form eines sogenannten „Kinking-Bandes“ (siehe z.B. [4], [106], [176]). Diese Versagens-

form ist vermutlich eine Mischung aus dem Mikrobeulen (bzw. -knicken) einzelner Fasern und einem Schubversagen der gesamten Probe. Zu dieser Vermutung gelangt man, da bei einem reinen Mikrobeulen die Lage des „Versagensbandes“ normal zur Belastungsrichtung ($\beta = 0^\circ$ bezogen auf Abb. 6.18 links) und bei einem Schubversagen unter einem Winkel von $\beta = 45^\circ$ zu erwarten wäre. In der Realität liegt der Winkel dieses Versagensbandes aber zwischen diesen beiden Extremfällen und nimmt Werte von $\beta \approx 30^\circ$ an.

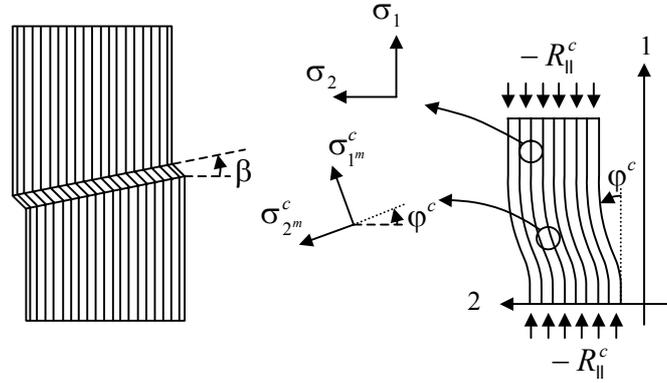


Abb. 6.18 Kinking-Band beim Druckversagen in Faserrichtung (links) und Definition des fehlausgerichteten Koordinatensystems (rechts, nach [139])

Ausgehend von einer durch Fertigungsungenauigkeiten verursachten initialen Abweichung der Faserrichtung von der 1-Richtung werden die Spannungen, um zunächst eine Vorhersage zum Kinking für den zweidimensionalen Fall zu machen, gemäß

$$\begin{aligned}\sigma_{1m} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\varphi) + \tau_{12} \sin(2\varphi) \\ \sigma_{2m} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\varphi) - \tau_{12} \sin(2\varphi) \\ \tau_{1m2m} &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\varphi) + \tau_{12} \cos(2\varphi)\end{aligned}\quad (6.86)$$

in ein sogenanntes fehlgerichtetes Koordinatensystem (m für „misaligned“), definiert durch eine Rotation des ursprünglichen Koordinatensystems um den Winkel φ , dessen Richtung genauso definiert ist wie die des Fehlstellungswinkels φ^c beim Versagen (siehe Abb. 6.18, rechts), transformiert. Für den Fall des Versagens unter reinem Druck in Faserrichtung ($\sigma_1 = -R_{\parallel}^c$, $\sigma_2 = \tau_{12} = 0$, $\varphi = \varphi^c$) werden dann die Gleichungen (6.86) unter Zuhilfenahme der Additionstheoreme zu

$$\begin{aligned}\sigma_{1m}^c &= -R_{\parallel}^c \cos^2 \varphi^c \\ \sigma_{2m}^c &= -R_{\parallel}^c \sin^2 \varphi^c \\ \tau_{1m2m}^c &= R_{\parallel}^c \sin \varphi^c \cos \varphi^c.\end{aligned}\quad (6.87)$$

Nachfolgend werden nun zwei verschiedene Szenarien zum Kinking betrachtet. Zunächst geht man davon aus, dass Kinking durch ein Druckversagen der Matrix ausgelöst wird. Hierzu kann man die bereits hergeleitete Gleichung (6.83) nutzen. Da erst einmal von einem ebenen Problem ausgegangen wird ($\tau_{nt} = 0$), vereinfacht sich (6.83) zu

$$\left(\frac{\tau_{21} \cos \theta_{fp}}{R_{\perp\parallel} - \eta_{n1} \sigma_2 \cos^2 \theta_{fp}} \right)^2 = 1. \quad (6.88)$$

Im fehlausgerichteten Koordinatensystem erhält man als Bruchbedingung durch Nutzung von (6.87)

$$\left(\frac{R_{\parallel}^c \sin \varphi^c \cos \varphi^c \cos \theta_{fp}}{R_{\perp\parallel} + \eta_{n1} R_{\parallel}^c \sin^2 \varphi^c \cos^2 \theta_{fp}} \right)^2 = 1 \quad (6.89)$$

und da für das ebene Problem $\theta_{fp} = 0^\circ$ gilt schließlich

$$R_{\parallel}^c (\sin \varphi^c \cos \varphi^c - \eta_{n1} \sin^2 \varphi^c) = R_{\perp\parallel}. \quad (6.90)$$

Der Winkel φ^c , welcher die Summe aus der ursprünglichen, fertigungsbedingten und der aus der Belastung resultierenden Fehlstellung beschreibt, kann durch Auflösen von (6.90) nach φ^c bestimmt werden (siehe auch Anhang E.2):

$$\varphi^c = \arctan \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4 \left(\frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\parallel}^c} + \eta_{n1} \right) \frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\parallel}^c}}}{2 \left(\frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\parallel}^c} + \eta_{n1} \right)} \right). \quad (6.91)$$

Für die weiteren Betrachtungen ist es notwendig, auch den ursprünglichen Fehlstellungswinkel φ^0 zu kennen, der allein aus den Fertigungsungenauigkeiten resultiert und als ein Materialparameter angesehen werden kann. Die Bestimmung dieses Winkels gelingt mittels des Materialgesetzes für die Schubdeformation, welches einer zunächst nicht bekannten linearen oder nichtlinearen Funktion gemäß

$$\tau_{1m2m} = f(\gamma_{1m2m}) \quad (6.92)$$

gehört. Setzt man in (6.92) die Spannungs- und Verzerrungswerte für den Moment des Versagens unter reinem Druck unter Zuhilfenahme von (6.87) ein, so erhält man für die Schubverzerrung beim Versagen:

$$\gamma_{1m2m}^c = f^{-1} \left(\frac{R_{\parallel}^c}{2} \sin(2\varphi^c) \right). \quad (6.93)$$

Für den Fall eines linearen Schubgesetzes vereinfacht sich (6.93) beispielsweise zu

$$\gamma_{1m2m}^c = \frac{R_{\parallel}^c \sin(2\varphi^c)}{2G_{12}}, \quad (6.94)$$

woraus dann der ursprüngliche Fehlstellungswinkel berechnet werden kann:

$$\varphi^0 = \varphi^c - \gamma_{1m2m}^c. \quad (6.95)$$

Das zweite hier betrachtete Versagensszenario, Kinking aufgrund eines elastisch instabilen Matrixverhaltens, tritt nur bei nichtlinearem Schubverhalten aufgrund des endfestigenden Charakters des Materialgesetzes auf. Für einen beliebigen ebenen Spannungszustand erhält man mit Hilfe der Transformationsbeziehungen (6.86) eingesetzt in das Materialgesetz (6.92)

$$f(\gamma_{1m2m}) = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\varphi + |\tau_{12}| \cos 2\varphi. \quad (6.96)$$

Hierbei fällt auf, dass entgegen den Transformationsbeziehungen der Betrag der Schubspannung τ_{12} genutzt wird. Dies hat folgenden Grund: Man kann davon ausgehen, dass initiale Fehlstellungen der Fasern sowohl in die eine als auch andere Richtung auftreten, φ^0 also positive und negative Werte annehmen kann. Dies bedeutet, dass je nach Vorzeichen der angreifenden Schubspannung τ_{12} der Fehlstellungswinkel in manchen Bereichen vergrößert und in manchen Bereichen verringert wird. Da aber natürlich immer der ungünstigere Fall (Vergrößerung des Fehlstellungswinkels durch die Schubspannung) betrachtet werden muss, empfiehlt es sich beispielsweise, nur positive Fehlstellungswinkel zu betrachten, welche ja durch eine positive Schubspannung weiter vergrößert werden. Eben dieses kann gerade durch die Nutzung des Betrages der Schubspannung erreicht werden. Es gibt also immer irgendwo in der Ebene Fehlstellungswinkel, die durch die angreifende Schubspannung betragsmäßig vergrößert werden, und nur diese werden betrachtet. Somit ergibt sich der Winkel φ dann entsprechend dem Vorzeichen der Schubspannung aus

$$\varphi = \frac{\tau_{12}}{|\tau_{12}|} \cdot (\varphi^0 + \gamma_{1m2m}). \quad (6.97)$$

Wird Gleichung (6.96) für kleine Winkel bei gleichzeitiger Verwendung eines linearen Schubgesetzes linearisiert, so erhält man als Bestimmungsgleichung für γ_{1m2m} :

$$\gamma_{1m2m} = \frac{\varphi^0 G_{12} + |\tau_{12}|}{G_{12} + \sigma_1 - \sigma_2} - \varphi^0. \quad (6.98)$$

Für ein nichtlineares Schubgesetz ist die Lösung von (6.96) für beliebig große Winkel φ äußerst aufwendig und im Allgemeinen nur numerisch möglich.

Für die Verallgemeinerung des Kinking-Modells auf einen räumlichen Spannungszustand muss zunächst die Ebene im dreidimensionalen Faser-Kunststoff-Verbund bestimmt werden, in der das Kinking stattfinden wird. Diese Ebene ist definiert durch den Winkel ψ (Abb. 6.19), welcher im zuvor beschriebenen ebenen Kinking-Modell stets den Wert null annimmt.

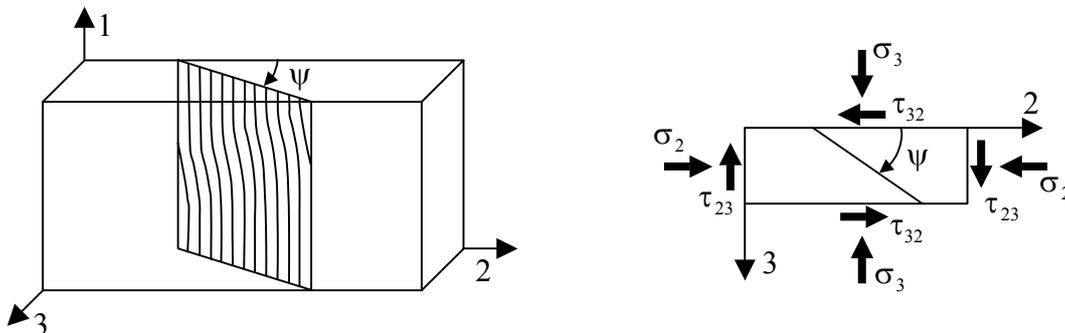


Abb. 6.19 Definition der Kinking-Ebene durch den Winkel ψ (nach [139])

Für die Bestimmung der Kinking-Ebene werden, bezugnehmend auf Abb. 6.20, die folgenden Annahmen getroffen:

1. Ein negatives $\sigma_{3\psi}$ (Druckspannung senkrecht zur Kinking-Ebene und quer zur Faserrichtung) wirkt der Rissbildung in anderen potentiellen Kinking-Ebenen entgegen. Daraus folgt, dass $\sigma_{3\psi}$ in der Kinking-Ebene einen Minimalwert annehmen sollte.
2. Ein positives $\sigma_{2\psi}$ (Zugspannung in der Kinking-Ebene quer zur Faserrichtung) wirkt in der Kinking-Ebene rissöffnend, womit man schlussfolgert, dass $\sigma_{2\psi}$ in der Kinking-Ebene einen Maximalwert annimmt.
3. Aus experimentellen Beobachtungen weiß man, dass Kinking-Bänder immer in einer Ebene liegen und Fasern nicht durch das eventuelle Vorhandensein einer Schubspannung $\tau_{2\psi3\psi}$ aus dieser Ebene herausragen, weswegen man $\tau_{2\psi3\psi} = 0$ in der Kinking-Ebene annehmen kann.

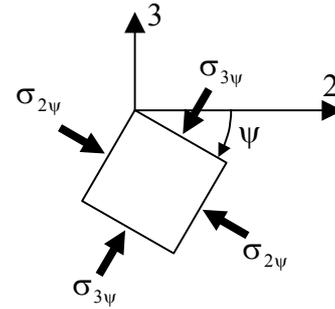


Abb. 6.20 Spannungen im um den Winkel ψ gedrehten Koordinatensystem (nach [139])

Aus jeder der Annahmen 1-3 lässt sich der Winkel ψ , der die Kinking-Ebene definiert, zu

$$\tan(2\psi) = \frac{2\tau_{23}}{\sigma_2 - \sigma_3} \tag{6.99}$$

ermitteln, was im Anhang E.3 gezeigt wird.

Transformiert man die nach Gleichung (E.19) berechneten Spannungen in der Kinking-Ebene gemäß

$$\begin{aligned} \sigma_{1m} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_{2\psi}}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_{2\psi}}{2} \cos 2\varphi + \tau_{12\psi} \sin 2\varphi \\ \sigma_{2m} &= \sigma_1 + \sigma_{2\psi} - \sigma_{1m} \\ \tau_{1m2m} &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_{2\psi}}{2} \sin 2\varphi + \tau_{12\psi} \cos 2\varphi \\ \tau_{2m3\psi} &= \tau_{2\psi3\psi} \cos \varphi - \tau_{3\psi1} \sin \varphi \\ \tau_{3\psi1m} &= \tau_{3\psi1} \cos \varphi + \tau_{2\psi3\psi} \sin \varphi \end{aligned} \tag{6.100}$$

in das fehlausgerichtete Koordinatensystem, welches bereits für das ebene Kinking-Modell verwendet wurde (Abb. 6.18), so erhält man die Erweiterung des Kinking-Modells auf einen räumlichen Spannungszustand. Im fehlausgerichteten Koordinatensystem in der Kinking-Ebene können nun die bereits hergeleiteten Bruchbedingungen für Matrixversagen (6.78) und (6.83) angewendet werden. Hierbei ist noch zu unterscheiden, ob quer zur Faserrichtung Druck ($\sigma_{2m} < 0$) oder Zug ($\sigma_{2m} > 0$) herrscht. Für $\sigma_{2m} < 0$ wird davon ausgegangen, dass Kinking nur bei einem Zwischenfaserbruchwinkel von $\theta_{fp} = 0^\circ$ auftritt. Dann erhält man aus (6.83) als Bruchbedingung

$$\left(\frac{\tau_{1m2m}}{R_{\perp||is} - \eta_{n1} \sigma_{2m}} \right)^2 = 1. \tag{6.101}$$

Für andere Zwischenfaserbruchwinkel findet kein Kinking, sondern „normales“ Matrixdruckversagen statt, für welches man aus (6.83) die Bruchbedingung

$$\left(\frac{\tau_{nt}^m}{R_{\perp\perp}^A - \eta_{nt} \sigma_n^m} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}^m}{R_{\perp\parallel is} - \eta_{n1} \sigma_n^m} \right)^2 = 1 \quad (6.102)$$

erhält, wobei sich die wirkebenenbezogenen Spannungen σ_n^m , τ_{nt}^m und τ_{n1}^m im fehlausgerichteten Koordinatensystem entsprechend Gleichung (6.23) zu

$$\begin{aligned} \sigma_n^m(\theta) &= \sigma_{2m} \cos^2 \theta + \sigma_{3\psi 3\psi} \sin^2 \theta + 2\tau_{2m 3\psi} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_{n1}^m(\theta) &= \tau_{3\psi 1m} \sin \theta + \tau_{2m 1m} \cos \theta \\ \tau_{nt}^m(\theta) &= -\sigma_2 \sin \theta \cos \theta + \sigma_3 \sin \theta \cos \theta + \tau_{23} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (6.103)$$

ergeben.

Herrscht quer zur Faserrichtung Zug, so wird beim LaRC04-Kriterium dann von einem Auftreten von Kinking ausgegangen, wenn es unter einer Druckspannung in Faserrichtung mit $\sigma_1 \leq -R_{\parallel}^c/2$ zu einem Zugversagen der Matrix kommt, für welches das bereits in Abschnitt 6.2.4.2.2 hergeleitete Bruchkriterium

$$(1-g) \frac{\sigma_{2m}}{R_{\perp\parallel is}^t} + g \left(\frac{\sigma_{2m}}{R_{\perp\parallel is}^t} \right)^2 + \frac{\Lambda_{23}^o \tau_{2m 3\psi}^2 + \chi(\gamma_{1m 2m})}{\chi(\varepsilon R_{\perp\parallel is})} = 1 \quad (6.104)$$

gilt.

Im Anhang E.4 findet man nochmals eine Zusammenstellung der wichtigen Gleichungen für das LaRC04-Bruchkriterium.

6.2.5 Vergleich der Bruchkurven ausgewählter Bruchkriterien

Um einen schnellen Überblick über die wesentlichen Unterschiede verschiedener Bruchkriterien zu bekommen, empfiehlt sich die Betrachtung der jeweiligen Bruchkurven desselben Materials für verschiedene Spannungskombinationen. Auf diese Weise lassen sich ebene Schnitte durch die 6-dimensionalen Bruchkörper darstellen. Aus den sechs unabhängigen Koordinaten des Spannungstensors ergeben sich die 15 folgenden möglichen Schnittebenen:

$$\begin{array}{ccccc} \sigma_1 - \tau_{12} & \sigma_2 - \tau_{12} & \sigma_3 - \tau_{12} & \tau_{12} - \tau_{13} & \tau_{13} - \tau_{23} \\ \sigma_1 - \tau_{13} & \sigma_2 - \tau_{13} & \sigma_3 - \tau_{13} & \tau_{12} - \tau_{23} & \\ \sigma_1 - \sigma_2 & \sigma_2 - \tau_{23} & \sigma_3 - \tau_{23} & & \\ \sigma_1 - \tau_{23} & \sigma_2 - \sigma_3 & & & \\ \sigma_1 - \sigma_3 & & & & \end{array}$$

Verglichen werden in diesem Abschnitt die Bruchkurven des Tsai-Hill-, des LaRC04- und des Puck'schen Bruchkriteriums für glasfaserverstärktes Epoxidharz. Die Materialparameter einer unidirektionalen Einzelschicht dieses Materials sind Tabelle 6.3 zu entnehmen.

Tabelle 6.3 Materialparameter einer unidirektionalen Einzelschicht aus E-Glas-verstärktem Epoxidharz nach [85] und [105]

Faser: E-Glas, Matrix: Epoxidharz MY750 (60% Faservolumenanteil)		
Basisfestigkeiten in $[N/mm^2]$:	$R_{\parallel}^c = 800$ $R_{\parallel}^t = 1280$	$R_{\perp}^c = 145$ $R_{\perp}^t = 40$ $R_{\perp\parallel} = 73$
Elastizitätskenngrößen in $[N/mm^2]$ bzw. [-]:	$E_1 = 45600$ $E_2 = 16200$ $G_{12} = 5830$	$\nu_{12} = 0,278$ $\nu_{23} = 0,4$
Kritische Energiefreisetzungsraten in $[kJ/m^2]$:	$G_{Ic} = 0,24$	$G_{IIc} = 1,5$

Weiterhin wird für das LaRC04-Bruchkriterium ein Zwischenfaserbruchwinkel von 53° für reinen Querdruck und eine Schichtdicke von $0,2\text{ mm}$ angenommen. Beim Bruchkriterium nach Puck werden, den Empfehlungen in [98] bzw. Tabelle 6.2 folgend, die Anstiegsparameter mit $p_{\perp\parallel}^t = 0,3$, $p_{\perp\parallel}^c = 0,25$ und $p_{\perp\perp}^t = 0,25$ festgelegt. Der Parameter $p_{\perp\perp}^c$ kann bei bekanntem Zwischenfaserbruchwinkel für reinen Querdruck nach der Gleichung

$$p_{\perp\perp}^c = \frac{1}{2 \cdot \cos^2 \theta_{fp}} - 1 \tag{6.105}$$

bestimmt werden (Herleitung siehe [98]). Nimmt man wegen der Konsistenz und Vergleichbarkeit der Ergebnisse für das Puck-Bruchkriterium ebenfalls einen Zwischenfaserbruchwinkel für reinen Querdruck von $\theta_{fp} = 53^\circ$ an, so ergibt sich daraus ein Anstiegsparameter von $p_{\perp\perp}^c \approx 0,38$. Das Puck-Kriterium wurde mit allen Erweiterungen hinsichtlich der m+p-Effekte sowie des Einflusses der faserparallelen Zugspannungen auf die Zwischenfaserbruchfestigkeit implementiert (Abschnitt 6.2.4.1.4). Die für diese Erweiterungen notwendigen Parameter sind entsprechend den Empfehlungen in [98] mit $m = s = 0,5$ und $\Delta_{max} = 0,2$ sowie $f'_{E_{thr}} = 0,5$ gewählt. Durch eine Korrektur des Anstiegsparameters $p_{\perp\parallel}^c$ kann bei Berücksichtigung der m+p-Effekte eine Anpassung der $\sigma_2 - \tau_{12}$ -Bruchkurve an Versuchsergebnisse erfolgen. Diese Korrektur kann bei entsprechend vorhandener experimenteller Datenbasis iterativ oder, wie hier geschehen, nach [98] mit Hilfe der Extrapolationsformel

$$p_{\perp\parallel,cor}^c = p_{\perp\parallel}^c \cdot \left(1 + 0,6 \cdot \frac{\Delta_{max}}{p_{\perp\parallel}^c} \right) \tag{6.106}$$

vorgenommen werden, womit man für den Anstiegsparameter $p_{\perp\parallel}^c$ nach Korrektur schließlich $p_{\perp\parallel}^c = p_{\perp\parallel,cor}^c = 0,37$ erhält.

Die Bestimmung der für das räumliche Tsai-Hill-Kriterium in Gl. (6.12) bzw. (6.13) benötigten Querschubfestigkeit R , welche einer Belastung durch die Schubspannung τ_{23} entgegenwirkt, stellt sich etwas komplizierter dar. Wie man aus Experimenten weiß, erfolgt der Bruch bei einer solchen Belastung unter einem Zwischenfaserbruchwinkel von 45° . Somit kann die bruchauslösende Spannung nicht die Schubspannung τ_{23} sein, da hierfür ein Zwischenfaser-

bruchwinkel von 0° zu erwarten wäre. Vielmehr lässt sich durch die Spannungstransformationen (6.23) zeigen, dass bei einer τ_{23} -Belastung die auf der Bruchebene wirkende Normalspannung σ_n unter einem Winkel von 45° ein Maximum erreicht. Daraus lässt sich schlussfolgern, dass die Zugfestigkeit quer zur Faserrichtung geringer sein muss als die Festigkeit gegen Querschub. Wollte man also R experimentell direkt bestimmen, so würde man stets die Querkzugfestigkeit und nicht die Querschubfestigkeit messen. Die wirkliche Querschubfestigkeit ist nur indirekt bestimmbar und damit vom verwendeten Bruchmodell abhängig (siehe z.B. Gl. (6.35) zur Bestimmung von $R_{\perp\perp}^A$). Man gelangt also schließlich zu der Schlussfolgerung, dass für die Querschubfestigkeit R im räumlichen Tsai-Hill-Kriterium die Querkzugfestigkeit R_{\perp}^A einzusetzen ist.

Einige der oben aufgeführten Spannungskombinationen bedeuten physikalisch für transversal isotrope Materialien dieselbe Belastung (beispielsweise $\sigma_1 - \sigma_3$ und $\sigma_1 - \sigma_2$). Es werden aber trotzdem die Bruchkurven für diese identischen Belastungen berechnet, da sich auf diese Weise auch eventuelle Defizite eines Bruchkriteriums erkennen lassen, sollten die Bruchkurven nicht identisch sein.

Anhand der Abb. 6.21 bis Abb. 6.23 fällt zunächst auf, dass das LaRC04-Bruchkriterium für die Fälle, in denen eine Spannungsordinate in 3-Richtung (Laminatdickenrichtung) wirkt, unrealistisch hohe Vorhersagen für die Bruchfestigkeit macht. Der Extremfall trifft für den Fall der $\sigma_3 - \tau_{13}$ - Bruchkurve auf, in dem das LaRC04-Kriterium für beliebig hohe Spannungskombinationen überhaupt keine Schädigung voraussagt. Für ebene Spannungszustände liefert dieses Bruchkriterium jedoch Bruchkurven, die trotz einer völlig anderen Herangehensweise gut mit den Ergebnissen des Puck'schen Kriteriums übereinstimmen (siehe z.B. Bereich $\sigma_1 < 0$ im $\sigma_1 - \sigma_2$ -Diagramm).

Das Tsai-Hill-Bruchkriterium macht für die meisten Spannungskombinationen im Vergleich eher konservative Vorhersagen zum Bruchgeschehen, was jedoch nicht auf die $\sigma_2 - \sigma_3$ -Bruchkurve und hier insbesondere auf den Zugbereich zutrifft. Für einen idealen Werkstoff, welcher keine Fehlstellen in Form von Lufteinschlüssen oder Vorschädigungen enthält, mag diese Vorhersage auch zutreffend sein, nicht jedoch für reale Faser-Kunststoff-Verbunde. Bei Belastung eines transversal isotropen Werkstoffes unter zweiachsigem Zug bzw. Druck, wobei normal zur isotropen Ebene keine Belastung aufgebracht ist und die zueinander orthogonalen Belastungen in den zwei anderen Richtungen gleich groß sind ($\sigma_2 = \sigma_3 \neq 0$), tritt nach dem Hill'schen Fließkriterium das Fließen bzw. die Schädigung erst bei Erreichen der Zug- bzw. Druckfestigkeit für die unbelastete Richtung auf (im Falle eines Faser-Kunststoff-Verbundes also bei Erreichen der Faserfestigkeit). Aufgrund des unterschiedlichen Materialverhaltens von Faser und Matrix sind die Dehnungen in der unbelasteten Richtung (Faserrichtung) nicht homogen, was zu lokalen Spannungen führt, die bei einem homogenen Material nicht auftreten würden. Ist der Werkstoff außerdem durch die bereits erwähnten Lufteinschlüsse „vorgeschädigt“, tritt der Bruch (im Zugbereich $\sigma_2 = \sigma_3 > 0$), wie auch Versuche bestätigen [33], wesentlich früher ein als durch das Hill-Kriterium vorhergesagt.

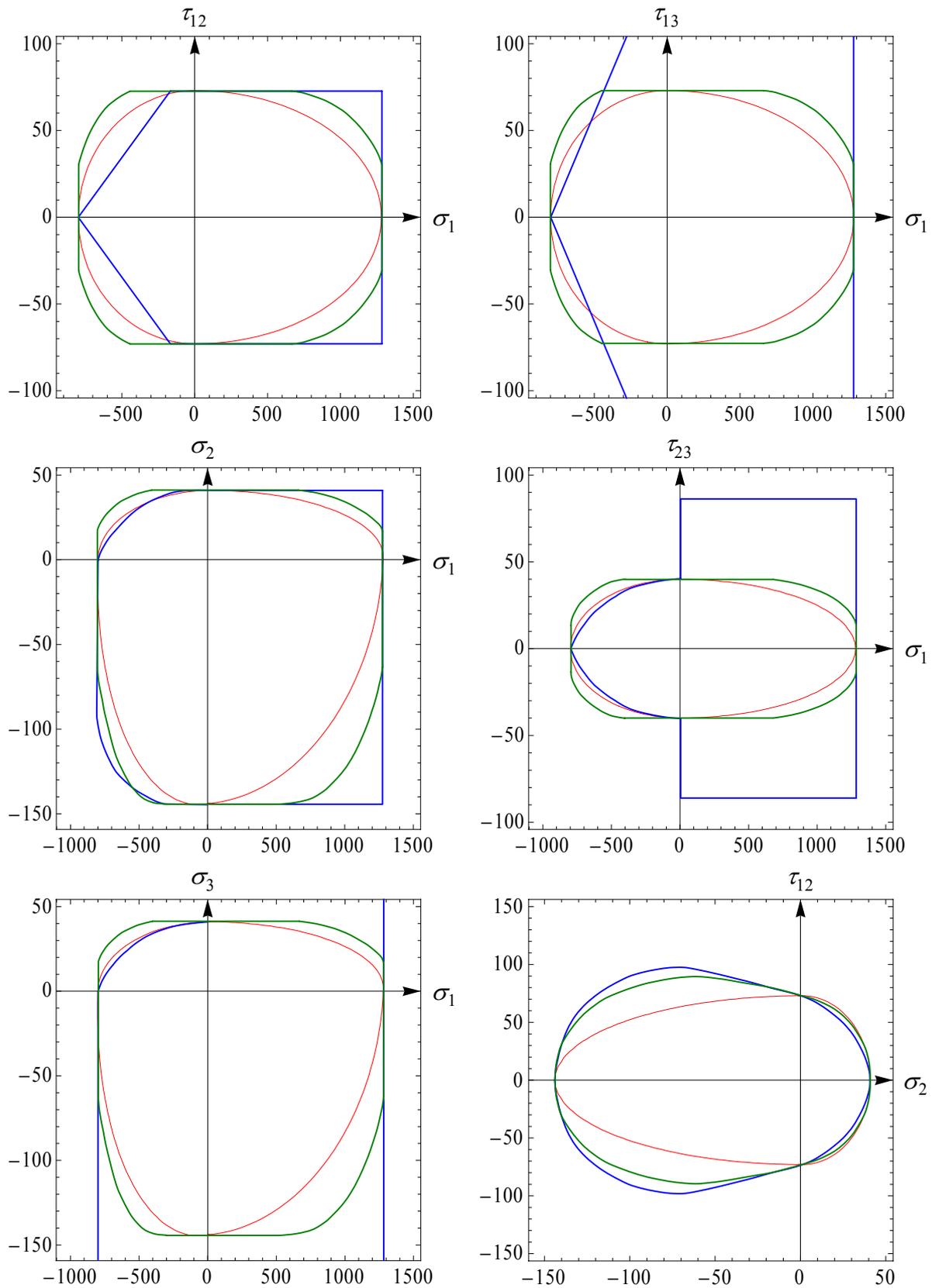


Abb. 6.21 Bruchkurven für das Tsai-Hill- (rot), LaRC04- (blau) und Puck-Bruchkriterium (grün)

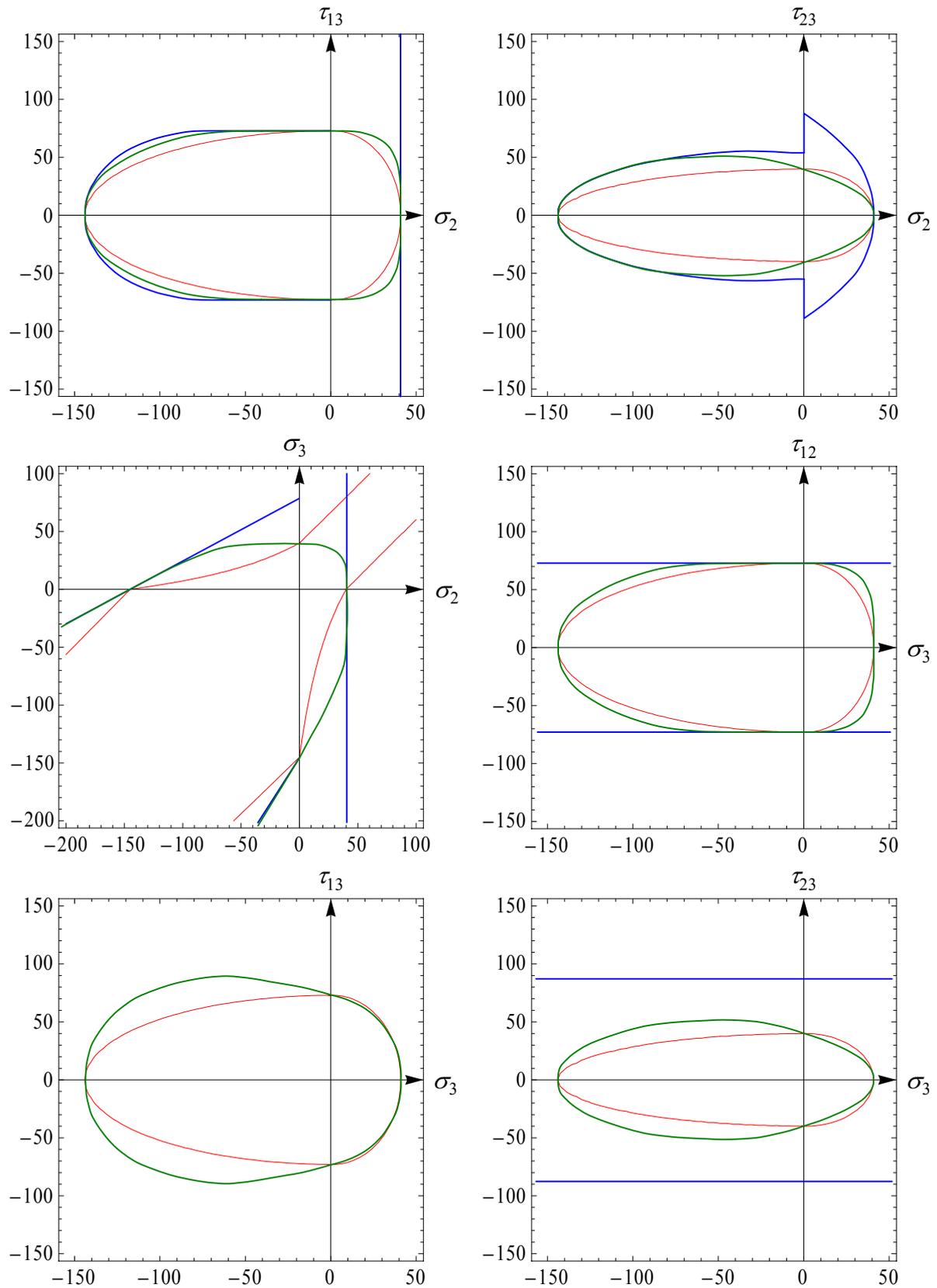


Abb. 6.22 Bruchkurven für das Tsai-Hill- (rot), LaRC04- (blau) und Puck-Bruchkriterium (grün)

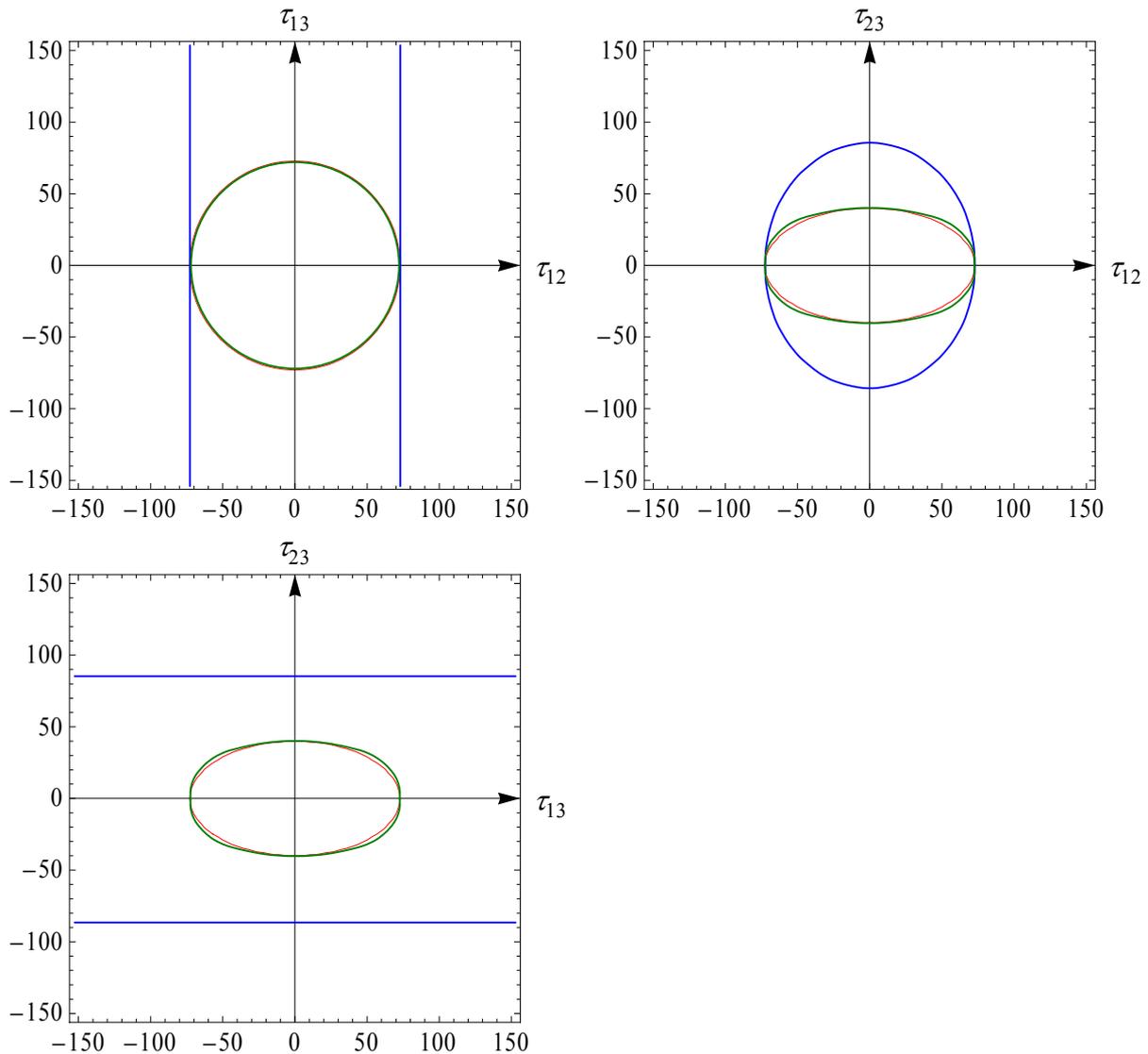


Abb. 6.23 Bruchkurven für das Tsai-Hill- (rot), LaRC04- (blau) und Puck-Bruchkriterium (grün)

Das Puck'sche Bruchkriterium liefert für alle Spannungskombinationen plausible Bruchkurven. In der World-Wide Failure Exercise (WWFE, siehe [85]), in der eine Bewertung einer Vielzahl von Bruchkriterien vorgenommen wurde, indem jeweils Versuche und die Vorhersagen der Theorien miteinander verglichen wurden, erzielte das Puck'sche Bruchkriterium sehr gute Ergebnisse. In der WWFE kam das LaRC04-Kriterium noch nicht zum Einsatz, da es zum Zeitpunkt dieses internationalen Vergleichs noch nicht veröffentlicht war. Das dem Tsai-Hill-Kriterium ähnliche Tsai-Wu-Kriterium erzielte ebenfalls gute Ergebnisse, allerdings wurden in der WWFE nur ebene Spannungszustände untersucht.

6.3 Degradationsmodelle

Die in Abschnitt 6.2 erläuterten Bruchkriterien beschreiben den Beginn einer Schädigung des Materials. Dies muss jedoch noch nicht ein Versagen der kompletten Einzelschicht oder gar

des gesamten Verbundes bedeuten (insbesondere, wenn „nur“ Zwischenfaserbruch vorliegt). Ausgehend von einer ersten Materialschädigung existieren zur Beschreibung des Schädigungsverlaufs und der damit verbundenen Reduktion verschiedener Steifigkeitsparameter bis hin zum kompletten Versagen sogenannte Degradationsmodelle. Einen Überblick über derartige Modelle gibt mit einer sehr großen Anzahl an Literaturhinweisen [56]. In [85] sind ebenfalls verschiedene Modelle kurz beschrieben. Auch die Autoren des LaRC04- und des Puck'schen Bruchkriteriums entwickelten eigene Degradationsmodelle ([113] bzw. [142], [98], [159]). Ein interessantes Modell, auf welches auch in [56] verwiesen wird, findet sich in [119].

In dieser Arbeit wird der Schädigungsverlauf der Faser-Kunststoff-Verbunde jedoch nicht betrachtet. Vielmehr wird in den nachfolgenden Auslegungen von realen Strukturen versucht, eine Schädigung komplett zu vermeiden. Die Fehlerindizes des jeweils verwendeten Bruchkriteriums sollten daher stets Werte kleiner als eins annehmen.

7 Praktischer Vergleich von optimalitätskriterienbasierten und sensitivitätsbasierten Strukturoptimierungsverfahren

In diesem Abschnitt sollen die Unterschiede der in Kapitel 3 beschriebenen zwei Gruppen von Strukturoptimierungsverfahren, den optimalitätskriterienbasierten und den sensitivitätsbasierten Verfahren, anhand einiger praktischer Anwendungsbeispiele aufgezeigt werden. Dabei wird zu den Strukturoptimierungsdisziplinen Gestalt-, Sicken- und Topologieoptimierung jeweils ein akademisches Problem und ein reales Optimierungsproblem behandelt. Grund für die Aufteilung in einfachere akademische und reale Beispiele ist, dass sich bei den einfacheren Problemen bestimmte Effekte und Eigenschaften der Verfahren wesentlich besser identifizieren lassen. Für die Berechnungen der Lösungen wird kommerzielle Software zweier Hersteller eingesetzt, die auf dem Gebiet der sensitivitäts- bzw. optimalitätskriterienbasierten Algorithmen als führend angesehen werden können. Für das einfache Topologieoptimierungsbeispiel findet ein eigener optimalitätskriterienbasierter Algorithmus Anwendung, welcher im folgenden Abschnitt zunächst erläutert werden soll. Alle Topologieoptimierungsalgorithmen basieren dabei auf dem SIMP-Ansatz. Die Topologieoptimierung eines realen Bauteils erfolgt aufgrund der eingeschränkten Möglichkeiten des optimalitätskriterienbasierten Ansatzes nur mit Hilfe eines sensitivitätsbasierten Verfahrens.

7.1 Praktischer Vergleich der Topologieoptimierungsverfahren

7.1.1 Vorstellung eines einfachen optimalitätskriterienbasierten Topologieoptimierungsalgorithmus

Wie bereits in Abschnitt 3.3.2 erwähnt, beschränken sich die optimalitätskriterienbasierten Topologieoptimierungsverfahren auf die Maximierung der Steifigkeit einer Struktur bei vorgegebenem Volumen bzw. des Verhältnisses zwischen Endvolumen und Gesamtvolumen des Designraums. Um dieses Ziel zu erreichen, wird bei dem hier vorgestellten Algorithmus, welcher sich der SIMP-Methode aus Abschnitt 3.3.1.1.1 bedient, die von Mises-Spannung in einem finiten Element ausgewertet und dem Element ein dementsprechender Dichtewert zugewiesen. Sollten mehrere Integrationspunkte vorhanden sein, so wird über diese gemittelt. Der Dichtewert darf dabei einen der elf Werte 0.0001, 0.1, 0.2, ..., 0.9 oder 1.0 annehmen. Nach jedem Iterationsschritt erfolgt eine Neubestimmung der Dichteverteilung, wobei mit zunehmender Anzahl an Iterationen die Elementanzahl mit Zwischendichten immer weiter sinkt, bis schließlich nur noch Elemente mit den Dichten 0.0001 und 1.0 vorhanden sind. Korrekterweise muss gesagt werden, dass es auch nach der letzten Iteration noch einige wenige Elemente mit Zwischendichten gibt. Dies ist notwendig, um die Volumengleichheitsnebenbedingung erfüllen zu können. Die Anzahl der Iterationen wird vom Nutzer vorher festgelegt und exakt eingehalten. Der genaue Ablauf lässt sich am einfachsten anhand eines in Abb. 7.1 dargestellten „Behältersystems“ erklären. Insgesamt gibt es 11 Behälter, denen die Dichten von 0.0001

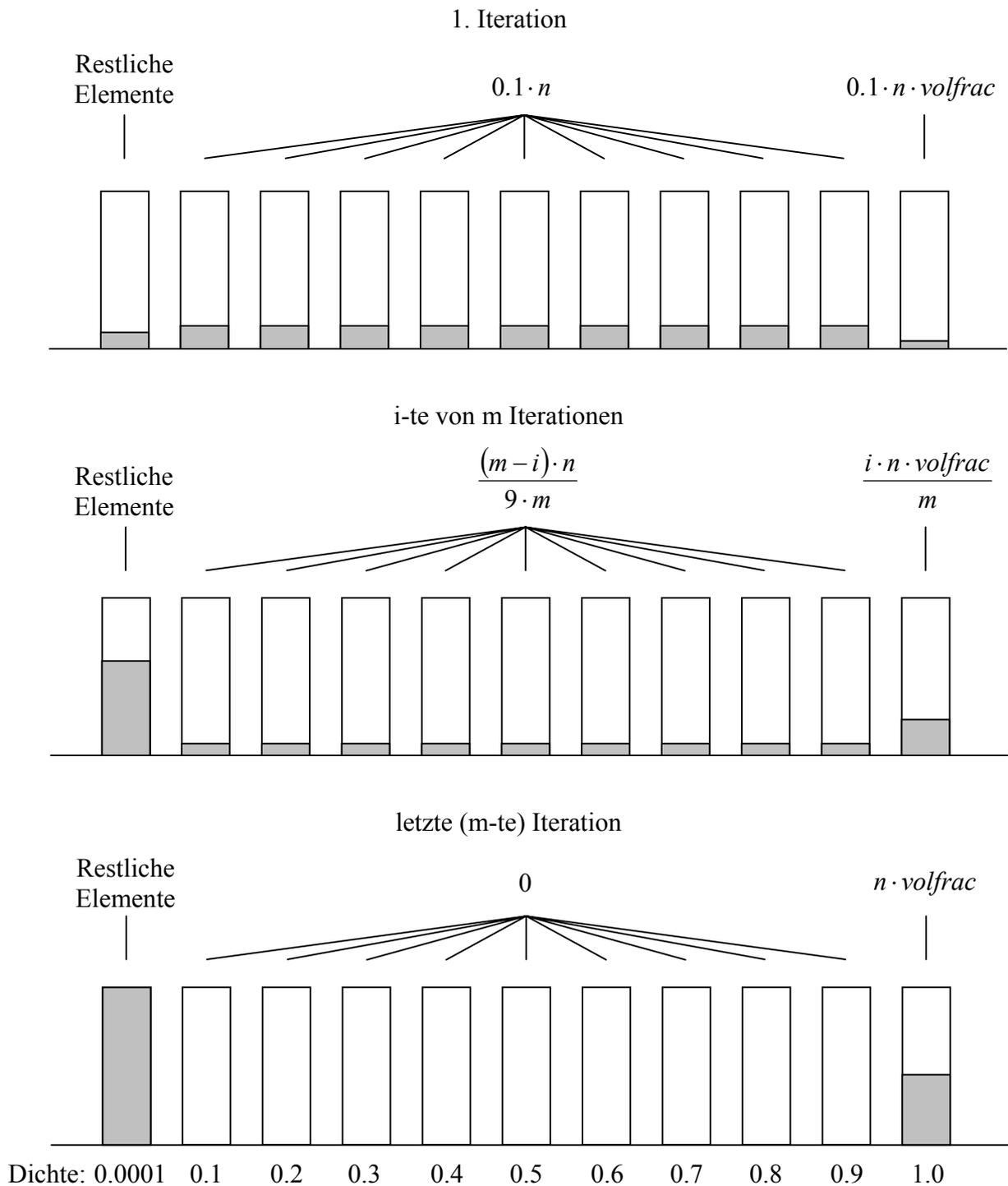


Abb. 7.1 Veränderung der Dichteverteilung während des Optimierungsprozesses (beispielhaft für Zielvolumen gleich 30% des Designraumvolumens)

bis 1.0 zugewiesen sind. Jedes Element des Designraumes wird nach jeder Iteration in einen der Behälter „einsortiert“ und erhält somit einen neuen Dichtewert. Die „Einsortierung“ richtet sich nach dem Spannungsniveau in einem Element. Elemente mit hohen Spannungen kommen in einen Behälter mit einer hohen Dichte, Elemente mit einer niedrigen Spannung in einen Behälter mit niedrigerer Dichte.

Beginnend mit den Elementen mit der höchsten von Mises-Spannung werden zunächst im 1. Iterationsschritt $0,1 \cdot n \cdot \text{volfrac}$ Elemente in den Behälter der Dichte 1.0 einsortiert, wobei n die Anzahl der Elemente im Designraum und volfrac das dimensionslose Verhältnis von Zielvolumen zu Designraumvolumen angibt. Nachfolgend werden die Behälter der Dichten 0.1...0.9 jeweils mit $0,1 \cdot n$ Elementen gefüllt. Haben dabei zwei Elemente exakt die gleiche von Mises-Spannung, so kommen diese auch in denselben Behälter, auch wenn die Elementanzahl für den jeweiligen Behälter möglicherweise schon erreicht ist. Dieses Vorgehen sichert das Entstehen symmetrischer Strukturen bei symmetrischen Problemstellungen. Die übrigen Elemente kommen in den Behälter der Dichte 0.0001. Ebenso wird in den folgenden Iterationsschritten i verfahren, wobei der Anteil der Elemente im Behälter mit der Dichte $\rho = 1.0$ entsprechend $(i/m) \cdot n \cdot \text{volfrac}$ wächst. Die Volumengleichheitsnebenbedingung wird dadurch erst im letzten Iterationsschritt $i=m$ erfüllt.

Der beschriebene Algorithmus wurde mittels der Script-Sprache Python implementiert und in Verbindung mit dem kommerziellen FE-Löser Abaqus eingesetzt. Er ist in der vorliegenden Form sicher noch nicht vollständig ausgereift und besitzt noch einige Schwächen. Beispielsweise wird stillschweigend vorausgesetzt, dass alle finiten Elemente dasselbe Volumen aufweisen. Ist dies nicht der Fall, so kann es zu leichten Abweichungen des Volumens des optimierten Modells vom vorgegebenen Zielvolumen kommen. Prinzipiell lassen sich jedoch bekanntlich für nahezu jeden Algorithmus Problemstellungen konstruieren, in denen er versagt. Das hier vorgestellte Verfahren liefert jedoch für eine Reihe von Testproblemen sehr gute Ergebnisse.

Da der Nutzer die Anzahl an Iterationen vorzugeben hat, stellt sich die Frage nach einem geeigneten Wert hierfür. Zur Beantwortung dieser Problemstellung wird für verschiedene Testprobleme eine Topologieoptimierung mit einer maximalen Iterationsanzahl von 1 bis 15 durchgeführt.

Beim ersten Testproblem handelt es sich um die in Abschnitt 7.1.2 beschriebene Aufgabenstellung einer Brückenstruktur. Die Topologieoptimierungen werden mit unterschiedlichen Zielvolumina ($\text{volfrac} = 0,3$ und $\text{volfrac} = 0,41$) sowie verschiedenen Elementtypen (quadra-

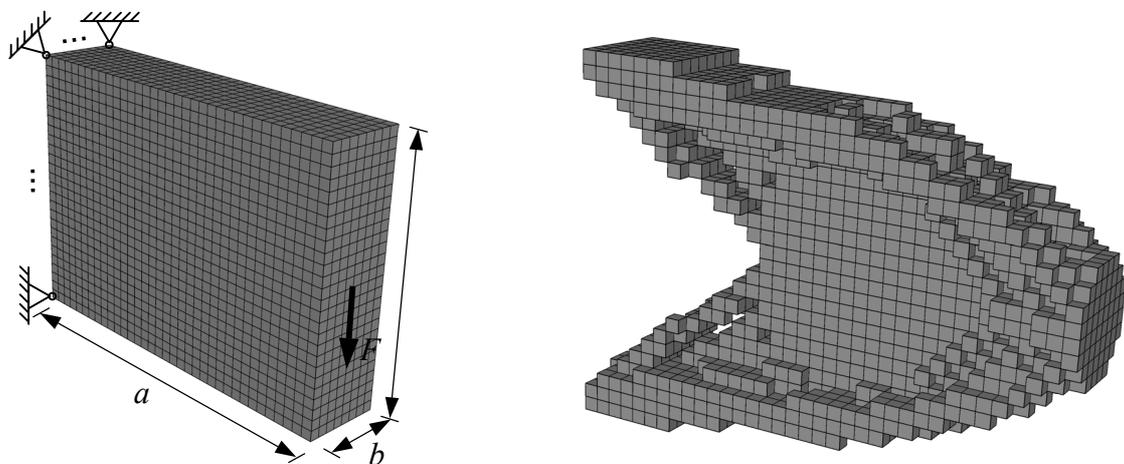


Abb. 7.2 Kragbalken mit $a=70\text{ mm}$, $b=15\text{ mm}$, $c=50\text{ mm}$, $F=1000\text{ N}$ (links) und Topologieoptimierungsergebnis für $\text{volfrac} = 0,3$ (rechts)

tisches Schalenelement mit reduzierter Integration und sechs Freiheitsgraden pro Knoten (S8R), lineares Scheibenelement mit vollständiger Integration (CPS4)) durchgeführt. Das zweite Testproblem ist der in Abb. 7.2 gezeigte Kragbalken mit den Materialparametern $\nu = 0,3$ und $E = 210000 \text{ N/mm}^2$, für den die Topologieoptimierungen mit linearen Volumenelementen reduzierter Integration (C3D8R) durchgeführt werden. Das Verhältnis von Zielvolumen zu Designraumvolumen, welches bei diesem Beispiel dem Gesamtvolumen entspricht, beträgt 0,3. Nähere Informationen zu den verwendeten finiten Elementtypen lassen sich [37] entnehmen.

Zur Bewertung der Ergebnisse wird die Gesamtverzerrungsenergie des optimierten Modells, welche äquivalent zur gesamten Arbeit der äußeren Lasten ist, als Maß für die erzielte Steifigkeit genutzt. In Abb. 7.3

sind die Ergebnisse der vier definierten Testprobleme für eine verschiedene Anzahl m an durchgeführten Iterationen dargestellt. Die Verzerrungsenergie als Gütekriterium für das erreichte Ergebnis ist dabei jeweils auf die Verzerrungsenergie der optimierten Struktur bei Verwendung nur einer Iteration normiert. Es wird deutlich, dass zumindest für die hier definierten Testproblemstellungen eine Mindest-

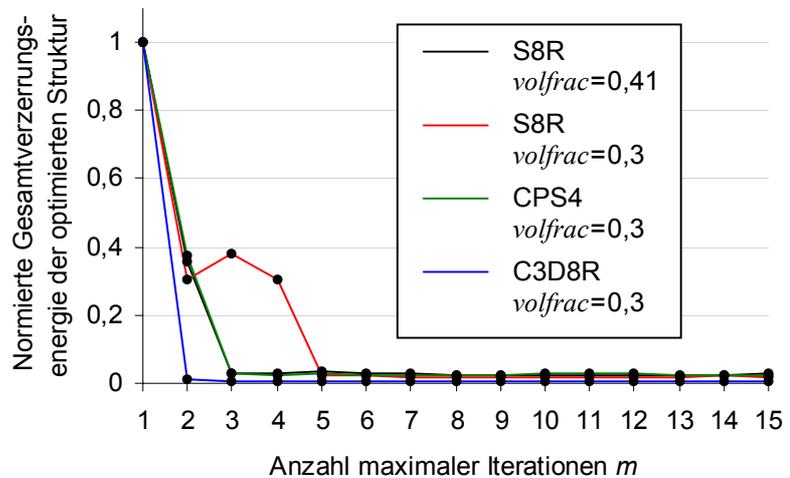


Abb. 7.3 Ergebnisse der Untersuchungen zu geeigneter Iterationsanzahl

anzahl von 6 Iterationen ausreicht. Wird die Iterationsanzahl weiter erhöht, ändert sich das Topologieoptimierungsergebnis in Bezug auf die Verzerrungsenergie und damit die erreichte Steifigkeit der optimierten Struktur nur noch unwesentlich.

7.1.2 Anwendung der sensitivitäts- und optimalitätskriterienbasierten Topologieoptimierung auf ein einfaches Beispiel

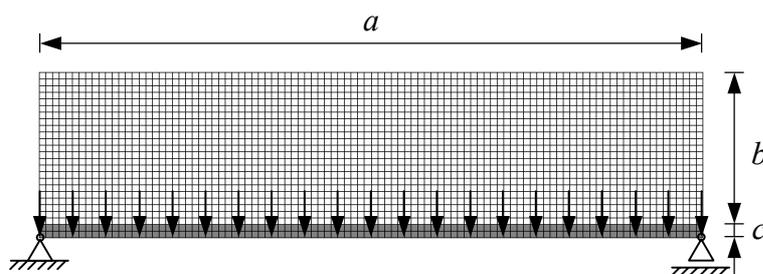


Abb. 7.4 Design- und Non-Design-Bereich (grau) des „Brückenproblems“

Um sensitivitäts- und optimalitätskriterienbasierte Topologieoptimierungsverfahren sinnvoll vergleichen zu können, ist es notwendig, sich eine Problemstellung zu überlegen, die von beiden Algorithmientypen lösbar ist. Hierfür wird zunächst folgendes einfaches Beispiel

gewählt: Gesucht ist nach der steifsten Struktur (minimale Verzerrungsenergie), die eine gegebene Entfernung zwischen zwei zueinander waagrecht angeordneten Auflagerpunkten (markiert durch die Dreiecke in Abb. 7.4, $a=10000\text{ mm}$, $b=2300\text{ mm}$, $c=200\text{ mm}$, Dicke $t=1\text{ mm}$) überspannt und deren Volumen dabei einen gewissen, vorgegebenen Wert nicht überschreitet. Dabei soll sich im unteren Bereich der Struktur ein Non-Design-Bereich der Höhe c befinden, der vom Optimierer nicht verändert werden darf. Belastet wird die Struktur durch eine gleichverteilte Flächen- bzw. Linienlast (10 N/mm), Volumenlasten aufgrund von Gravitation bleiben unberücksichtigt. Im Prinzip wird bei der gegebenen Fragestellung nach einer Brückenstruktur gesucht, die eine Strasse tragen soll. Als Material wird für das Bauwerk isotroper Stahl mit den Elastizitätskenngrößen $E = 210000\text{ N/mm}^2$ und $\nu = 0,3$ verwendet. Das Verhältnis von Zielvolumen zu Designraumvolumen wird mit einem Wert von $\text{volfrac} = 0,41$ vorgegeben.

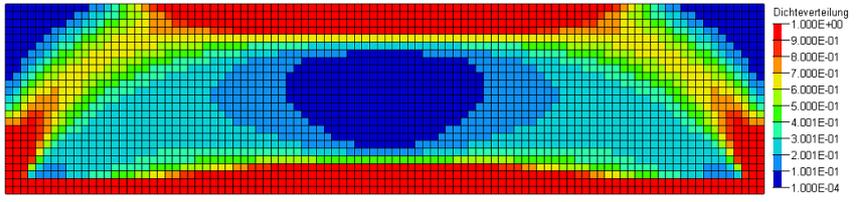
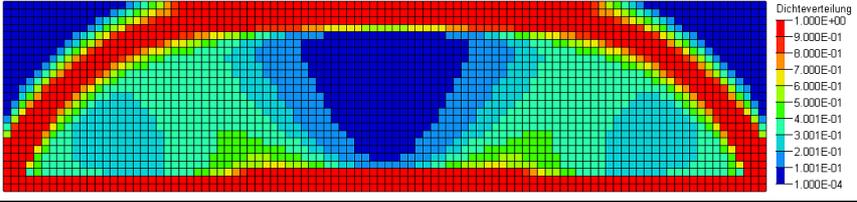
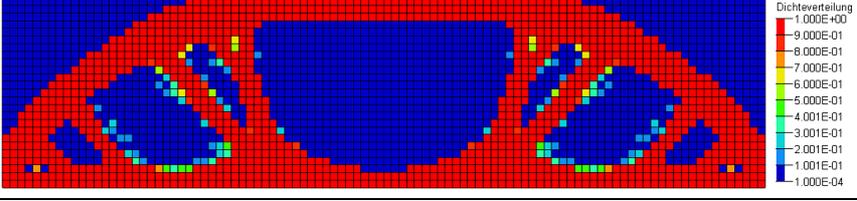
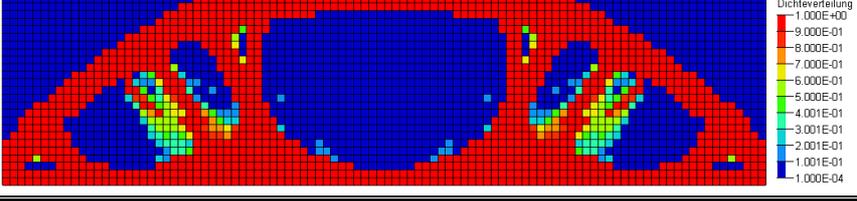
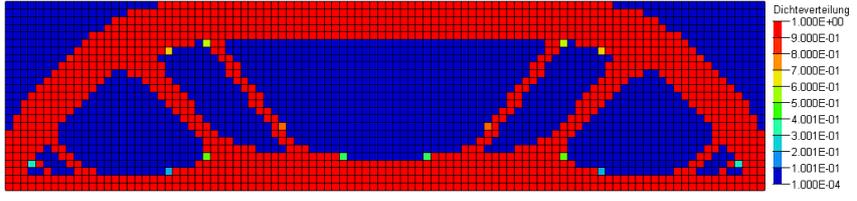
Da in dem selbst entwickelten optimalitätskriterienbasierten Topologieoptimierungsverfahren kein Filtermechanismus implementiert ist, der das Auftreten von Checkerboarding (Abschnitt 3.3.3) verhindert, werden für die Berechnungen mit diesem Algorithmus finite Elemente mit quadratischer Ansatzfunktion verwendet. Derselbe Elementtyp soll aufgrund einer möglichst hohen Vergleichbarkeit der Ergebnisse auch beim sensitivitätsbasierten Verfahren zum Einsatz kommen. Die kommerzielle Software, mit der die sensitivitätsbasierten Optimierungen durchgeführt wurden, bietet dem Nutzer leider keine Scheibenelemente, die für dieses ebene Problem ausreichend wären. Verwendet werden können nur Schalenelemente, wobei nur ein Elementtyp mit quadratischer Ansatzfunktion zur Verfügung steht, der darüber hinaus die reduzierte Integration zur Berechnung der elementbasierten Ausgabegrößen nutzt.

Im oberen Teil der Tabelle 7.1 sind die Ergebnisse der sensitivitätsbasierten Topologieoptimierung bei Verwendung verschiedener Bestrafungsexponenten p zusammengefasst. Das hier verwendete Verfahren basiert auf dem CONLIN-Algorithmus (siehe Abschnitt 3.3.1.3.1) und der SIMP-Methode (Abschnitt 3.3.1.1.1). Neben der rein visuellen Beurteilung des Ergebnisses anhand der Dichteverteilung, erlaubt die Angabe der im optimierten Gesamtmodell gespeicherten Verzerrungsenergie eine quantitative Aussage zum Optimierungsergebnis hinsichtlich der erreichten Steifigkeit.

Da, wie schon in Abschnitt 3.3.1.1.1 erwähnt, das gestellte Optimierungsproblem bei Verwendung eines Bestrafungsexponenten von $p = 1$ konvex ist, überrascht es nicht, dass der Optimierungsalgorithmus für diesen Bestrafungsexponenten das beste Ergebnis bezüglich der Zielfunktion liefert. Wird der Wert des Bestrafungsexponenten erhöht, so erhält man zwar ein diskreteres Ergebnis, welches leichter in eine fertigbare Struktur umsetzbar ist, jedoch besteht nun die Gefahr, dass der Optimierungsprozess in einem lokalen Minimum endet.

Für die optimalitätskriterienbasierte Topologieoptimierung derselben Problemstellung wird das in Abschnitt 7.1.1 vorgestellte, selbst entwickelte Verfahren verwendet. Wie bereits erwähnt ist es ratsam, bei den zu vergleichenden Optimierungsverfahren auch den selben finiten Elementtyp zu verwenden. Da die genauen Elementformulierungen in den verwendeten kommerziellen FE-Systemen jedoch nicht bekannt sind, werden anhand von Beispielrechnungen die zur Verfügung stehenden Elementtypen verglichen und der für den Vergleich am besten passende Elementtyp ausgewählt (siehe Anhang F).

Tabelle 7.1 Topologieoptimierungsergebnisse des „Brückenproblems“

Ergebnisse der sensitivitätsbasierten Topologieoptimierung			
p	Iter.-anzahl	Verzerrungs-Energie [Nmm]	Optimierte Dichteverteilung
1	6	376218	
2	14	444980	
3	19	455681	
4	16	516070	
Ergebnis der optimalitätskriterienbasierten Topologieoptimierung			
-	8	420409	

Bei zunächst rein visueller Betrachtung der optimierten Dichteverteilungen in Tabelle 7.1 fällt auf, dass das optimalitätskriterienbasierte Verfahren ein Ergebnis liefert, in dem, erzwungen durch den Algorithmus, so gut wie keine Zwischendichteelemente erscheinen, was eine absolut klare Interpretation des Ergebnisses ermöglicht. Insbesondere bei Verwendung eines Bestrafungsexponenten von 1, 2 oder 4 fällt dies beim sensitivitätsbasierten Verfahren, und damit die Umsetzung in eine konkrete Tragstruktur, schwer. Allerdings könnte man die sensitivitätsbasierten Ergebnisse für die Bestrafungsexponenten 1 und 2 im Sinne eines Schubfeldträgers mit veränderlicher Blechdicke umsetzen. Nimmt man als weiteres Bewertungskriterium den jeweils erreichten Wert der Gesamtverzerrungsenergie der optimierten Struktur hinzu, so schneidet auch hierbei der optimalitätskriterienbasierte Algorithmus außerordentlich er-

folgreich ab. Lediglich die schwer in eine reale Struktur umsetzbare Dichteverteilung, die sich bei Nutzung eines Bestrafungsexponenten von $p = 1$ ergibt, erzielt ein besseres Ergebnis.

7.1.3 Anwendung der sensitivitätsbasierten Topologieoptimierung auf ein reales Triebwerksbauteil

Wie bereits eingangs dieses Kapitels erwähnt, wird für die Topologieoptimierung eines realen Bauteils nur das sensitivitätsbasierte Topologieoptimierungsverfahren eingesetzt. Bei dem zu optimierenden Bauteil handelt es sich um das sogenannte Zwischengehäuse eines zivilen Zweiwellentriebwerks. In Abb. 7.5 ist das Zwischengehäuse im eingebauten Zustand im Gesamttriebwerk und als Geometriemodell dargestellt.

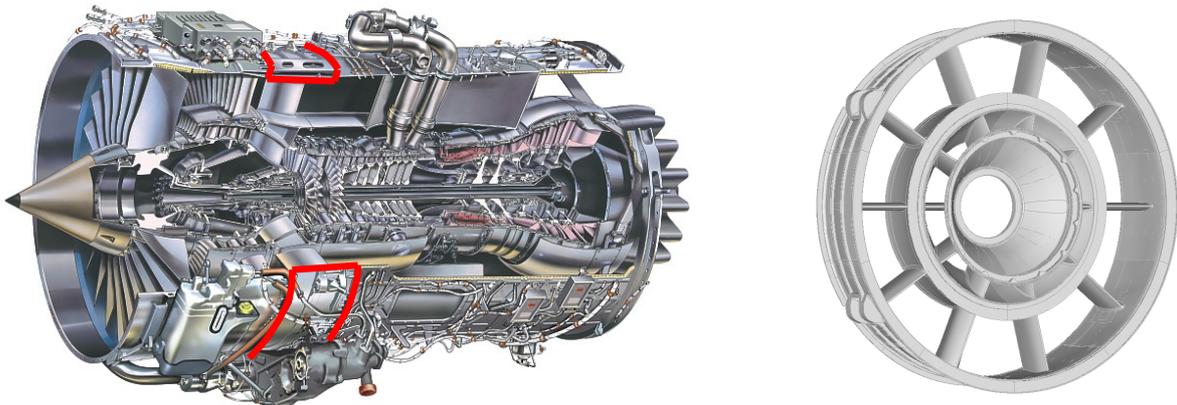


Abb. 7.5 Zwischengehäuse im Gesamttriebwerk (links, rot umrandet, Triebwerksabbildung mit freundlicher Genehmigung von Rolls-Royce Deutschland) und als Geometriemodell (rechts)

Beim Zwischengehäuse (engl. „Intermediate Casing“) handelt es sich um ein zentrales Bauteil des nicht rotierenden, kalten Bereichs eines Triebwerks. Es erfüllt wichtige statische Funktionen und stellt die Verbindung zwischen Nebenstromkanalgehäuse (engl. „Bypass Duct“) und Bläser- (engl. „Fan-“) Gehäuse dar. Auch die Anbindung des Triebwerks an das Flugzeug erfolgt u.a. über das Zwischengehäuse. Weiterhin beherbergt das Zwischengehäuse verschiedene Versorgungsleitungen, die vom Kerntriebwerk nach außen sowie umgekehrt durch hohle Streben (engl. „Struts“) geführt werden. Mit Hilfe der Topologieoptimierung soll hier die Frage beantwortet werden, welche Anzahl der radial verlaufenden hohlen Streben im Zwischengehäuse, denen neben der Beherbergung der Versorgungsleitungen als Hauptaufgabe statische Funktionen inne wohnen und von denen es gegenwärtig zehn gibt, optimal ist.

Damit keine großen konstruktiven Veränderungen an angrenzenden Bauteilen vorgenommen werden müssen, dürfen während der Optimierung keine Anschlüsse, Schraubverbindungen oder Flansche des Zwischengehäuses verändert werden. Abb. 7.6 zeigt den vernetzten Design- und Non-Design-Bereich. Letzterer besteht hauptsächlich aus Schalenelementen, wohingegen der Design-Bereich vollständig mittels Volumenelementen diskretisiert ist.

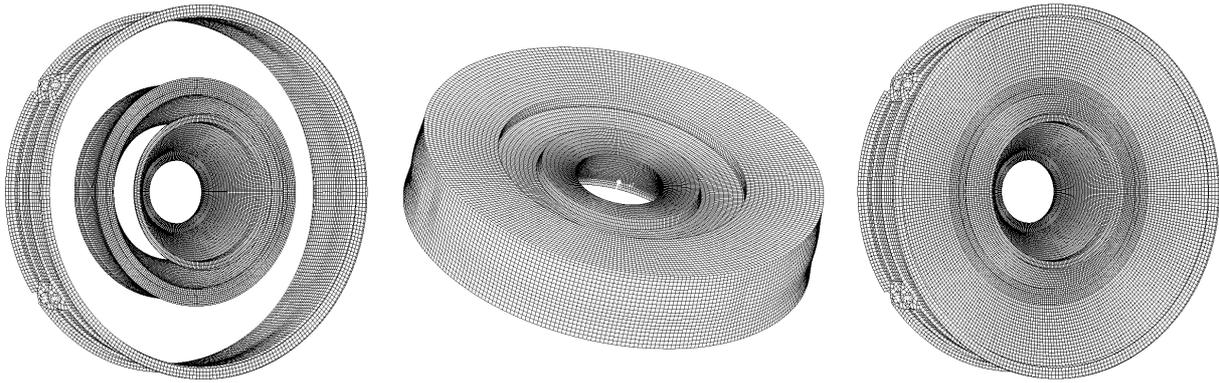


Abb. 7.6 Vernetztes Zwischengehäuse (links: Non-Design-Bereich, mittig: Design-Bereich, rechts: gesamtes FE-Modell)

Um ein strukturiertes Netz aus Rechteck- bzw. Quaderelementen erzeugen zu können, wird in Umfangsrichtung für jeden Radius stets die gleiche Anzahl von Elementen (300) verwendet. Zur Problematik der Vernetzung muss weiterhin gesagt werden, dass das Ergebnis einer Topologieoptimierung nicht unabhängig von der Netzfeinheit ist. Beispielsweise können sehr feine Strukturen nur durch ein entsprechend feines Netz aufgelöst und erzeugt werden. Andererseits steigt mit feiner werdendem Netz natürlich die Rechenzeit an. Dieser Faktor darf gerade bei einer Topologieoptimierung nicht unterschätzt werden. Dauert beispielsweise eine einzelne statische Analyse des Modells wenige Stunden, so kann eine Topologieoptimierung mit demselben Modell aufgrund der Vielzahl an durchzuführenden FE-Rechnungen leicht einige Tage oder Wochen benötigen. Daher orientiert sich die Feinheit des Netzes auch an der zur Verfügung stehenden Zeit und Rechenkapazität. In dem hier vorliegenden Falle besteht das FE-Netz aus etwa 240000 finiten Elementen mit linearer Ansatzfunktion. Dies ist hier ein guter Kompromiss zwischen Netzfeinheit und Rechenkosten. Ein weiterer Grund warum nicht wesentlich weniger Elemente (besonders in Umfangsrichtung) verwendet werden sollten als hier geschehen, liegt in einer weiteren Besonderheit der Topologieoptimierung. Um das Auftreten zu filigraner Strukturen, welche möglicherweise instabil oder schwer zu fertigen sind, am Ende der Optimierung zu verhindern, gibt es einen weiteren Filtermechanismus, die sogenannte „Minimum-Member-Size-Kontrolle“ (siehe z.B. [1]). Hierbei gibt es die Möglichkeit, ein Maß anzugeben, welches die kleinste Abmessung der optimierten Struktur nicht unterschreiten darf. Außerdem wird durch die Minimum-Member-Size-Kontrolle automatisch das Auftreten von Checkerboarding verhindert. Das Kleinstmaß, welches die optimierte Struktur enthalten soll und bei der Minimum-Member-Size-Kontrolle angegeben wird, darf als Einschränkung die mittlere Elementkantenlänge von drei Elementen nicht unterschreiten. Die mittlere Elementkantenlänge wird dabei aus der Quadratwurzel der Fläche eines 2D-Elements bzw. als Kubikwurzel des Volumens eines 3D-Elementes berechnet.

Da es bei dieser Untersuchung um die Bestimmung der optimalen Anzahl von Struts geht und nicht so sehr um die Form derselben, welche ja ohnehin durch aerodynamische Restriktionen vorgegeben ist, kann man davon ausgehen, dass Struts im optimierten Modell eine ähnliche Breite und damit kleinste Abmessung wie die Original-Struts haben. Bei einer wie hier vorgenommenen Vernetzung bedeutet dies, dass die Kantenlänge von drei Elementen des Design-

raums in etwa der Breite eines Struts entspricht. Somit ist das Kriterium für die Minimum-Member-Size-Kontrolle erfüllt (minimalste Abmessung = drei Elementkantenlängen). Eine noch feinere Vernetzung oder auch die Verwendung von Elementen mit Ansatzfunktionen höherer Ordnung ist zwar prinzipiell möglich und resultiert vermutlich auch in einem detaillierterem bzw. genaueren Ergebnis, jedoch sind schon bereits bei diesem Modell die Rechenzeiten beträchtlich.

Die am Zwischengehäuse angreifenden Lasten werden als Schnittgrößen aus dem sogenannten „Whole Engine Model“ (WEM) bestimmt. Dieses FE-Modell stellt eine numerische Beschreibung der mechanischen Eigenschaften des Gesamttriebwerks dar. Mit Hilfe des WEM können die Schnittlasten zwischen dem Zwischengehäuse und benachbarten Bauteilen bestimmt werden. Da das Zwischengehäuse im WEM für gewöhnlich aber ein wesentlich gröberes FE-Netz aufweist als das FE-Modell des Zwischengehäuses für die Topologieoptimierung, müssen die ermittelten Schnittlasten auf das feinere FE-Netz umgerechnet werden. Eine in der Triebwerksauslegung übliche Vorgehensweise hierfür ist, die Schnittlasten für einen Lastfall aus dem WEM über alle Knoten aufzusummieren und dann durch die Anzahl der Knoten im feineren Modell, die mit der entsprechenden Schnittlast beaufschlagt werden sollen, zu teilen. Dieser so errechnete Mittelwert der Knotenlasten wird dann an die Knoten des Modells mit dem feinen Netz angetragen. Dies bedeutet, dass alle Knoten, die z.B. mit dem Fan-Gehäuse in Verbindung stehen, dieselben Schnittlasten erhalten. Durch diese Näherung befindet sich das freigeschnittene Zwischengehäuse im Allgemeinen nicht mehr im Gleichgewicht und könnte unzulässige Starrkörperbewegungen vollführen. Zur Vermeidung derartiger Starrkörperbewegungen ist es in der Triebwerkstechnik bei der Zwischengehäuseauslegung weiterhin üblich, das Zwischengehäuse an der Verbindungsstelle zum Nebenstromkanalgehäuse fest einzuspannen. Im vorliegenden Falle werden 20 relevante Lastfälle ausgewählt und die zugehörigen „Limit Loads“ angetragen. Diese Lasten entsprechen den im normalen Betrieb maximal auftretenden Belastungen und werden üblicherweise für die Bauteilauslegung genutzt. Eine Struktur muss diesen Lasten ohne große Bereiche mit plastischen Deformationen standhalten.

Das vordringlichste Ziel im Bereich der Luftfahrt ist neben der Erfüllung der primären Aufgaben eines Bauteils, dieses aus den allgemein bekannten Gründen (geringerer Treibstoffverbrauch, geringere Materialkosten usw.) möglichst leicht zu bauen. Deshalb ist das Ziel dieser Topologieoptimierung, ein Design hinsichtlich der Anzahl und Anordnung der Struts des Zwischengehäuses zu finden, welches das geringst mögliche Volumen und somit, aufgrund der Fertigung aus einem homogenen Material, die kleinste Masse aufweist.

Gäbe man keine Nebenbedingungen vor, so würde der Topologieoptimierungsprozess bei der Zielfunktion Masse immer mit der Masse null des Designraums enden. Als Nebenbedingung wird daher die Steifigkeit der Struktur vorgegeben. Führt man als Maß für die Struktursteifigkeit die Verschiebungen an verschiedenen Knoten entlang des Umfangs für die 20 Lastfälle ein, so ergäben sich daraus schnell einige hundert oder tausend Verschiebungsnebenbedingungen. Mit einer solchen Vielzahl an Nebenbedingungen kann jedoch kein Optimierungsalgorithmus bei der gleichzeitig hohen Anzahl an Designvariablen effizient umgehen. Daher wird als Steifigkeitsmaß eine globalere Größe, die „Compliance“, genutzt. Die Compliance

entspricht der Arbeit, welche die äußeren Lasten an der Struktur leisten, ist ein Äquivalent zur in der Struktur gespeicherten Verzerrungsenergie und demzufolge für einen linearen Last-Verschiebungs-Zusammenhang als

$$C = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{u} \quad (7.1)$$

definiert. Hierbei beschreibt \mathbf{f} den Vektor der äußeren Lasten und \mathbf{u} den Vektor der Knotenverschiebungen. Für jeden Lastfall wird daher die Compliance des bisherigen Zwischengehäuses berechnet und als obere Grenze definiert, die nicht überschritten werden darf. Es sei darauf hingewiesen, dass die Compliance die Dimension einer Arbeit hat. Oftmals wird in der englischsprachigen Literatur auch die hier nicht gemeinte Nachgiebigkeit (Inverse der Steifigkeit) als Compliance bezeichnet.

Damit das Ergebnis einer Topologieoptimierung letztendlich auch in eine reale, herstellbare Struktur umgesetzt werden kann, ist es oftmals notwendig, sogenannte Fertigungsnebenbedingungen zu definieren. Zu dieser Art von Nebenbedingungen gehört beispielsweise die bereits erwähnte Minimum-Member-Size-Kontrolle. Kommerzielle Topologieoptimierungssoftware bietet darüber hinaus aber eine Reihe weiterer Fertigungsnebenbedingungen an, die z.B. die Schmiedbarkeit des Bauteils sicherstellen sollen oder Symmetrien bzw. bestimmte Musterverteilungen erzwingen. Für die Optimierung des Zwischengehäuses kommt hier die Extrusions-Fertigungsnebenbedingung zum Einsatz, welche erzwingt, dass die Querschnitte einer Struktur entlang einer vorgegebenen, unter Umständen auch gekrümmten Richtung identisch sind.

Der Effekt dieser Nebenbedingung lässt sich eindrucksvoll anhand eines beidseitig, statisch bestimmt gelagerten Balkens zeigen, der durch eine mittig angreifende Einzelkraft belastet ist. In Abb. 7.7 (links) sind drei der vier Lagerungspunkte durch fett gezeichnete Knoten markiert.

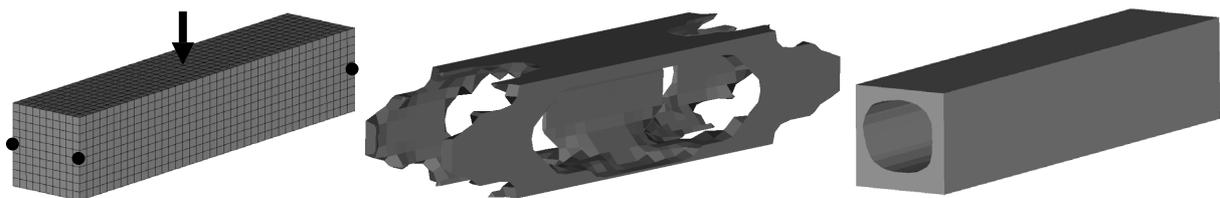


Abb. 7.7 Wirkungsweise der Extrusionsnebenbedingung: Designraum mit Lasten und Randbedingungen (links), Optimierungsergebnis ohne Fertigungsnebenbedingung (mittig) und Optimierungsergebnis mit Extrusionsrichtung entlang der Balkenlängsachse (rechts); jeweils nur Darstellung der geglätteten Dichtebereiche mit $\rho \geq 0,8$

Bei dieser Beispielloptimierung, die mit und ohne Extrusionsnebenbedingung durchgeführt wurde, war das Optimierungsziel, eine Struktur mit möglichst geringer Masse zu erzeugen, deren Verschiebung am Kraftangriffspunkt in Richtung der Kraftwirkung aber einen vorgegebenen Wert nicht überschreitet. Die Extrusionsrichtung wurde als Gerade entlang der Balkenlängsachse definiert. Wie am Optimierungsergebnis in Abb. 7.7 zu erkennen ist, können mit Hilfe dieser Fertigungsnebenbedingung z.B. Strangpressprofile erzeugt werden. Die pro-

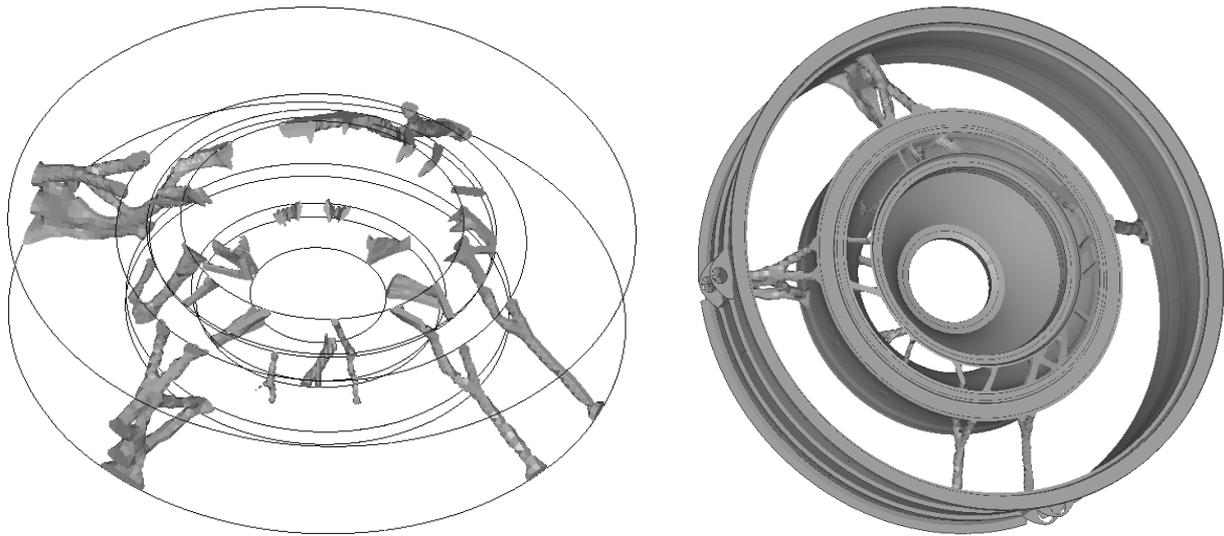


Abb. 7.8 Topologieoptimierungsergebnis des Zwischengehäuses bei Abwesenheit der Extrusions-Fertigungsnebenbedingung mit (rechts) und ohne (links) Non-Design-Bereich (jeweils nur Darstellung der geglätteten Dichtebereiche mit $\rho \geq 0,15$)

grammtechnische Umsetzung erfolgt dabei derart, dass alle Elemente, die in Richtung der Extrusion hintereinander liegen, jeweils in Gruppen zusammengefasst werden, deren Dichtewerte immer identisch sind. Damit wird das Optimierungsproblem in einem bestimmten Bereich quasi auf ein ebenes Problem reduziert (siehe auch [79]).

Für das Zwischengehäuse ist eine Anwendung dieser Fertigungsnebenbedingung in axialer Richtung des Triebwerks sinnvoll, da als Optimierungsergebnis aus aerodynamischen Gründen wieder eine strut-ähnliche Struktur gewünscht ist, die dem Luftstrom ein möglichst ungehindertes Passieren ermöglicht. Wie in Abb. 7.8 zu sehen ist, wird durch den Optimierungsprozess bei Abwesenheit der Extrusions-Nebenbedingung eine Struktur mit vielen Verstreibungen erzeugt, die aerodynamisch äußerst ungünstige Eigenschaften besitzt. Allerdings ist es durchaus denkbar, auch diese Struktur in ein reales Bauteil umzusetzen, sofern die einzelnen Streben durch entsprechende Bleche eingehüllt oder verkleidet werden, um so wieder eine den aerodynamischen Anforderungen genügende Struktur zu schaffen. Hierbei wäre jedoch der Fertigungsaufwand relativ hoch, zumal dann kein Strut dem Anderen gleichen würde. Wird die Extrusionsrichtung entlang der axialen Richtung und somit in Richtung des Luftstroms definiert, konvergiert der Optimierungsprozess nach 68 Iterationen, wobei alle Steifigkeitsnebenbedingungen eingehalten werden. In Abb. 7.9 ist das zugehörige Topologieoptimierungsergebnis dargestellt. Deutlich sind die nun strut-artig ausgebildeten Verbindungsstreben zu erkennen, deren Anzahl offenbar von der des ursprünglichen Zwischengehäuses abweicht, vgl. Abb. 7.5 (rechts). Darüber hinaus ist zu erkennen, dass Material in Umfangsrichtung am inneren Ring des Zwischengehäuses, der eines der Lager für den Rotor trägt, angefügt wird.

Das Ergebnis einer Topologieoptimierung bedarf immer einer Interpretation durch ein geschultes Auge, um schließlich ein nutzbares Bauteil zu erhalten. Abb. 7.10 zeigt die anhand des Optimierungsergebnisses in Abb. 7.9 gewählte Strut-Anordnung, wobei aus aerodynamischen Gründen auf eine Verstärkung des inneren Rings verzichtet wurde.

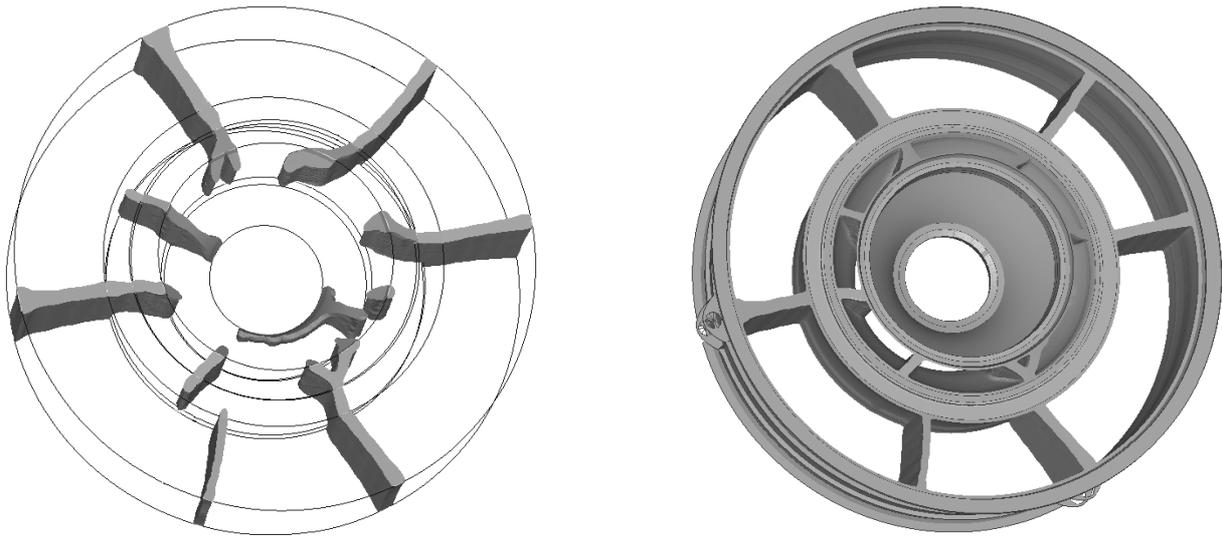


Abb. 7.9 Topologieoptimierungsergebnis des Zwischengehäuses mit Extrusions-Fertigungsnebenbedingung – rechts mit und links ohne Non-Design-Bereich (jeweils nur Darstellung der geglätteten Dichtebereiche mit $\rho \geq 0,15$)

Um dieses Ergebnis hinsichtlich seiner Masse mit dem Referenzzwischengehäuse vergleichen zu können, muss für das optimierte Design zunächst eine Blechdicke der einzelnen, hohlen Struts festgelegt werden. Dies erfolgt in diesem Falle durch eine Parameteroptimierung. Dabei gilt neben der bereits verwendeten Steifigkeitsnebenbedingung auch eine Beulnebenbedingung, welche verhindert, dass zu dünne Blechdicken entstehen, wodurch Instabilitäten auftreten können. Demzufolge wird für jeden Lastfall als zusätzliche Nebenbedingung definiert, dass der kleinste positive Beuleigenwert im parameteroptimierten Design einen Wert von 1,2 nicht unterschreiten darf. Weiterhin wäre es bei einer Parameteroptimierung prinzipiell auch möglich, Spannungsnebenbedingungen einzuführen. Dies ist aber nur sinnvoll, wenn an den entscheidenden Stellen des Modells ein entsprechend feines Netz vorliegt. Da dies aber hier nicht der Fall ist und auch nur die grundsätzliche Übertragbarkeit eines Topologieoptimierungsergebnisses in eine reale Struktur gezeigt werden soll, wird auf Spannungsnebenbedingungen verzichtet. Sollte sich nach erfolgreicher Parameteroptimierung herausstellen, dass die Spannungen in bestimmten Strukturbereichen zu hoch sind, so wäre eine Gestaltoptimierung auch besser zur Reduktion dieser Spannungsspitzen geeignet.

Damit ein Vergleich mit der Referenzstruktur „auf Augenhöhe“ erfolgen kann, werden die Strut-Dicken der Referenzstruktur ebenfalls einer Parameteroptimierung unter denselben Lastfällen und Nebenbedingungen unterzogen. Zielfunktion ist jeweils die Minimierung des Volumens aller Struts und somit der Gesamtstruktur.

Aufgrund der für die Topologieoptimierung geltenden Restriktion, dass die kleinste Strukturabmessung eine Länge von minimal drei mittleren Elementkantenlängen besitzt, weisen die entstandenen Struts in Abb. 7.9 in etwa diese Dickenabmessung auf. Bei feinerer Vernetzung wären höchstwahrscheinlich wesentlich feinere Strukturen entstanden. Da alle Struts somit quasi gezwungenermaßen dieselbe Dicke und folglich eine ähnliche Steifigkeit haben, muss dies für einen sinnvollen Vergleich des topologieoptimierten Modells mit dem Referenzmodell auch sichergestellt sein. Würde man beispielsweise für jeden Strut bei der Parameterop-

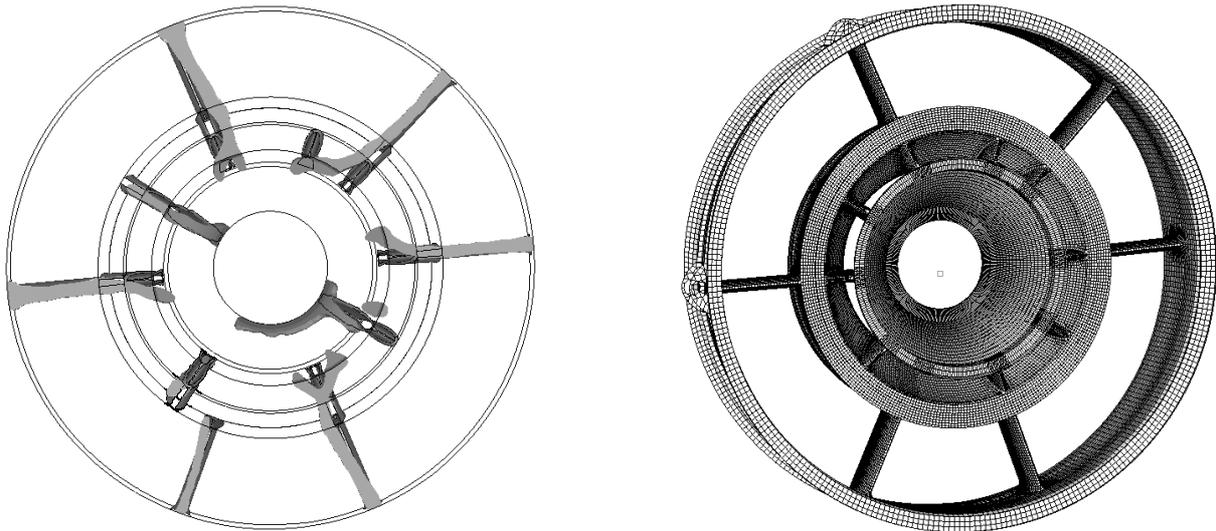


Abb. 7.10 Topologieoptimierungsergebnis des Zwischengehäuses und Umsetzung nach Ergebnisinterpretation

timierung eine eigene Designvariable, welche die Blechdicke des Struts beschreibt, definieren, so hätte der Optimierer wesentlich mehr Möglichkeiten, Material zu verteilen, als er dies während der Topologieoptimierung aufgrund der erwähnten Beschränkung hatte. Es könnten jetzt nämlich auch Struts mit sehr dünnen Blechdicken, also mit wenig Materialeinsatz aber trotzdem hoher Steifigkeit, entstehen. Der zur Verfügung stehende Designraum wäre also ein ganz anderer und würde auf eine Steifigkeitsverteilung führen, welche durch die Topologieoptimierung nicht möglich zu finden gewesen wäre. Aus den beschriebenen Gründen wird daher für alle Strut-Blechdicken eine einzige Designvariable definiert, wodurch sichergestellt ist, dass alle Struts dieselbe Blechdicke aufweisen.

Für das Referenzdesign mit den zehn äußeren Struts ergibt die Parameteroptimierung eine Strut-Blechdicke, die um etwa 37% unter der parameteroptimierten Strut-Blechdicke des neuen Zwischengehäusedesigns in Abb. 7.10 liegt. Da aber im neuen Design weniger Struts benötigt werden, liegt die Gesamtmasse der Struts des neuen Designs um 4,4% unter der Strutmasse des Referenzdesigns. Bezieht man die Massenreduktion auf das gesamte Zwischengehäuse, so kann bei gleicher Steifigkeit (die Beulsicherheit war bei beiden Parameteroptimierungen nicht die Nebenbedingung, welche eine weitere Massenreduktion beschränkte) durch die neue Strut-Anordnung eine Reduktion der Gesamtmasse um 1,8% (entspricht etwa 2,5 kg) gegenüber dem parameteroptimierten Referenzdesign erreicht werden.

7.2 Praktischer Vergleich der Gestaltoptimierungsverfahren

7.2.1 Einfaches Beispiel für eine Gestaltoptimierung

Als einfaches Beispiel für den Vergleich der optimalitätskriterien- und sensitivitätsbasierten Gestaltoptimierung wird ein klassisches Kerbspannungsproblem gewählt (Abb. 7.11). Die Kerbe ist zunächst als 90°-Kreisbogen mit einem vorgegebenen Radius ausgeführt. Ziel der Optimierung soll es sein, durch eine veränderte Kerbgeometrie einen Abbau der Spannungs-

konzentration zu erreichen. Als Material für das Bauteil kommt Stahl mit den Elastizitätskonstanten $E = 210000 \text{ N/mm}^2$ und $\nu = 0,3$ zum Einsatz.

Das in Abb. 7.11 dargestellte blechartige Bauteil (Dickenabmessung sehr klein gegenüber den anderen Abmessungen) ist am linken und unteren Rand so gelagert, dass jeweils nur der Verschiebungsfreiheitsgrad normal zur Bauteilkante fixiert wird, wodurch eventuelle Zwängungen ausgeschlossen sind. Am rechten Rand wirkt eine gleichverteilte Linienlast.

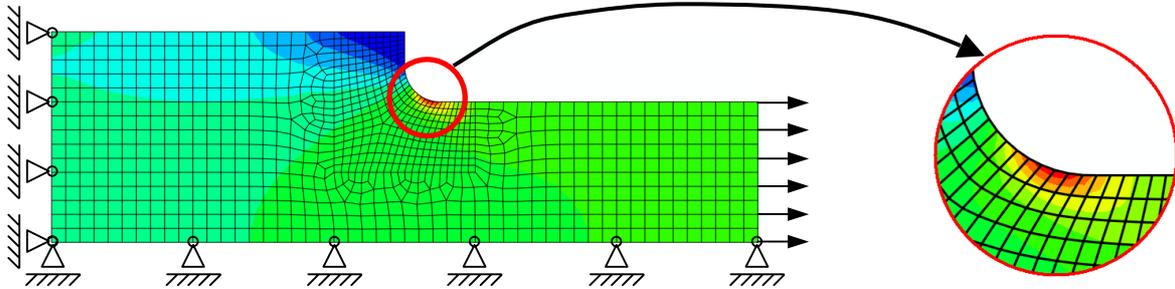


Abb. 7.11 Kerbspannungsproblem für Gestaltoptimierung

Wie schon erwähnt, soll das Ziel der Optimierung der Abbau der Spannungskonzentration im Bereich der Kerbe sein. Ausgewertet wird hierfür die von Mises-Vergleichsspannung als Invariante des Spannungstensors. Eine Verringerung der Spannungen ist prinzipiell natürlich durch ein Hinzufügen von Material möglich, was in diesem Falle schließlich in einem kompletten Verschwinden der Kerbe enden könnte. Um dies zu vermeiden und eine „innovativere“ Lösung zu erhalten, soll das optimierte Bauteil als Nebenbedingung dasselbe Volumen aufweisen wie die Ausgangsstruktur.

7.2.1.1 Optimierung mit sensitivitätsbasierten Verfahren

Die für die sensitivitätsbasierte Gestaltoptimierung verwendete kommerzielle Software bietet sowohl die Optimierung mittels Basisformen (siehe Abschnitt 3.2.1), als auch die parameterfreie Gestaltoptimierung, bei der die Oberflächenknotenkoordinaten des zu optimierenden FE-Netzes direkt als Designvariablen genutzt werden (siehe Abschnitt 3.2.2.1), an. Eine Besonderheit des hier definierten Optimierungsproblems ist, dass es sich eigentlich nicht um ein skalares Optimierungsproblem handelt, da jedes finite Element wenigstens eine Spannungsantwort liefert und somit eigentlich ein Mehrkriterienoptimierungsproblem vorliegt. Für die Reduzierung dieses Vektoroptimierungsproblems wird in der Gestaltoptimierung üblicherweise ein Spezialfall der Distanzmethode mit $r \rightarrow \infty$, die sogenannte „Min-Max-Optimierung“, angewendet (siehe [22]). Hierbei wird vereinfacht beschrieben so vorgegangen, dass in jedem Iterationsschritt der Optimierung nur die Systemantwort betrachtet wird, die den (meist normierten) größten Wert besitzt, also am weitesten von der idealen Lösung (Lösung, die sich bei separater Minimierung einer jeden Zielfunktionen ergäbe) entfernt ist. Im vorliegenden Falle einer Spannungsminimierung wird nach jeder Iteration der Integrationspunkt mit der höchsten Vergleichsspannung ausgewählt und durch eine entsprechende Änderung der Designvariablen versucht, dessen Spannung zu minimieren. Im nächsten Iterationsschritt kann dies dann ein ganz anderer Integrationspunkt sein. Auf diese Weise wird

schließlich automatisch ein Punkt des pareto-optimalen Bereichs des Mehrkriterienoptimierungsproblems als Optimallösung ermittelt.

7.2.1.1.1 Kerboptimierung mittels Basisformen

Eine Gestaltoptimierung mit Hilfe von Basisformen ist natürlich immer stark von der Güte und Anzahl der vordefinierten Basisformen abhängig. Werden zu wenige Formen definiert, so hat der Optimierer möglicherweise nicht genug Freiheiten, um dicht an das globale Optimum heranzukommen. Definiert man zu viele Basisformen, wird möglicherweise die Zahl der lokalen Optima, und damit die Gefahr der Konvergenz in einem solchen erhöht. Nichtsdestotrotz bietet die Gestaltoptimierung durch Basisformen auch eine Reihe von bereits erwähnten Vorteilen und wird hier beispielhaft mit vier vorgegebenen Basisformen (Abb. 7.12), die durch Morphing erzeugt wurden, durchgeführt.

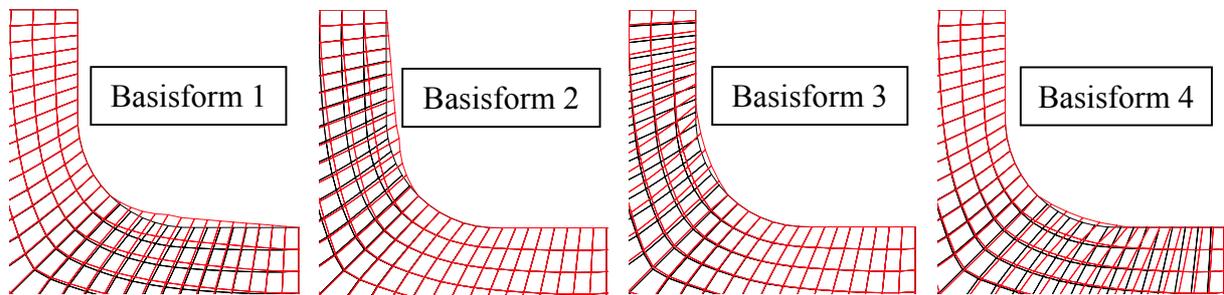


Abb. 7.12 Basisformen für Gestaltoptimierung (schwarz = Ausgangs-FE-Netz, rot = durch Morphing erzeugte Basisform)

Die Wichtungsfaktoren der einzelnen Basisformen, die ja die Designvariablen bei der Optimierung darstellen, werden zwischen $-1,0$ und $+1,0$ kontinuierlich variiert. Dies bedeutet, dass eine Basisform auch genau entgegengesetzt ihrer eigentlichen Definitionsrichtung in das Optimierungsergebnis einfließen kann, falls ihr Wichtungsfaktor negativ wird. In Tabelle 7.2 sind die Ergebnisse der Gestaltoptimierung, die nach vier Iterationsschritten konvergiert, zusammengefasst.

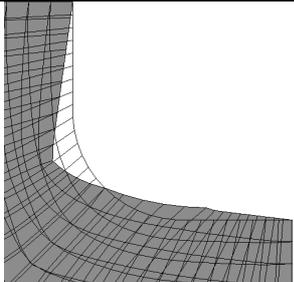
Tabelle 7.2 Optimierte Wichtungsfaktoren der Basisformen und neue Gestalt (grau = neue Gestalt, hell hinterlegt = ursprüngliche Gestalt)

Basisform	Optimierter Wichtungsfaktor	Neue Gestalt
1	0,4195	
2	-1,0	
3	-1,0	
4	1,0	
Verringerung der maximalen von Mises-Spannung um 13%		

Die maximale von Mises-Spannung kann um 13% reduziert werden, wobei das Volumen des Bauteils, wie verlangt, konstant bleibt. Dabei werden für die Basisformen 2, 3 und 4 die vorgegebenen Grenzen für die Superposition voll ausgeschöpft. Durch eine Lockerung dieser

Grenzen wäre es daher möglich, eine weitere Ergebnisverbesserung zu erzielen, wie die Ergebnisse in Tabelle 7.3 zeigen. Hier sind die Grenzen der Wichtungsfaktoren auf $-2,0$ bzw. $+2,0$ erweitert, was zu einer Verringerung der maximalen von Mises-Spannung um $21,3\%$ führt.

Tabelle 7.3 Optimierte Wichtungsfaktoren der Basisformen mit gelockerten Grenzen und neue Gestalt (grau = neue Gestalt, hell hinterlegt = ursprüngliche Gestalt)

Basisform	Optimierter Wichtungsfaktor	Neue Gestalt
1	0,9513	
2	-2,0	
3	-1,384	
4	2,0	
Verringerung der maximalen von Mises-Spannung um $21,3\%$		

7.2.1.1.2 Kerboptimierung mittels Verschiebung der Oberflächenknotenkoordinaten

Als zweites Verfahren zur sensitivitätsbasierten Gestaltoptimierung soll hier die sogenannte „Free-Shape-Optimierung“ genutzt werden, bei der die Koordinaten der Oberflächenknoten des Designbereiches des FE-Netzes als Designvariablen fungieren. In Abb. 7.13 (links) ist der durch die Designknoten markierte Designbereich dargestellt, dessen Kontur durch den Optimierer verändert werden darf. Die Designknoten sind so ausgewählt, dass der veränderliche Bereich der äußeren Kontur identisch zu dem Bereich ist, der durch die Basisformen beschrieben ist.

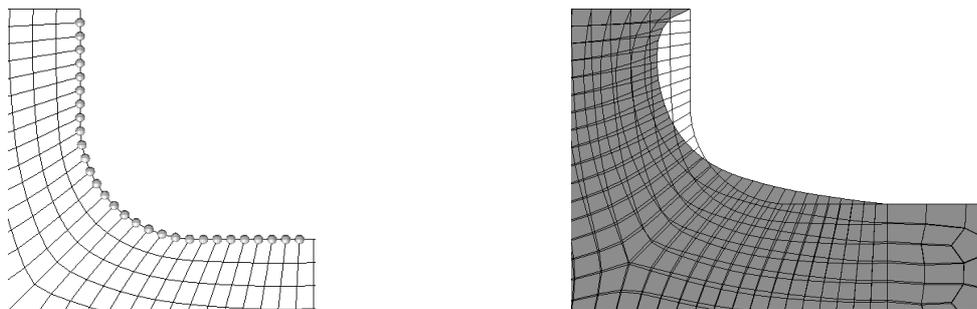


Abb. 7.13 Designknoten (links) und Optimierungsergebnis der Free-Shape-Optimierung (rechts)

Die Optimierung konvergiert nach sieben Iterationen und resultiert in einer Reduktion der maximalen von Mises-Spannung um 24% bei nahezu gleichbleibendem Volumen des Gesamtbauteils (optimiertes Bauteil besitzt ein um $0,2\%$ geringeres Volumen). Abb. 7.13 (rechts) zeigt die optimierte Kerbform.

7.2.1.2 Kerboptimierung mit optimalitätskriterienbasiertem Verfahren

Die optimalitätskriterienbasierte Gestaltoptimierung gehört zu den parameterfreien Gestaltoptimierungsverfahren (siehe Abschnitt 3.2.2.2). Daher muss vom Anwender lediglich der zu optimierende Bereich, also der Bereich, in dem ein Schrumpfen bzw. Wachsen der Struktur zugelassen werden soll, definiert werden. Die Oberflächenknoten der Struktur, durch die dieser Bereich beschrieben ist, sind dieselben, wie bei der sensitivitätsbasierten Free-Shape-Optimierung (Abb. 7.13 links).

Um eine möglichst gute Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu den sensitivitätsbasierten Verfahren herstellen zu können, wird als Elementtyp ein Schalenelement mit linearer Ansatzfunktion und voller Integration ausgewählt (Bezeichnung S4 in Tabelle F.1 im Anhang F). Anhand der Daten in Tabelle F.2 ist zu erkennen, dass diese Elementformulierung am ehesten zum Elementtyp QUAD4 passt, der für den sensitivitätsbasierten Algorithmus angeboten wird.

Zunächst wird als Zielfunktion die Minimierung der maximalen im Modell auftretenden von Mises-Spannung definiert. Der Optimierer versucht, dieses Ziel durch ein Wachsen der Struktur in Bereichen mit hoher Spannung und einem gleichzeitigen Schrumpfen der Struktur in weniger belasteten Regionen des Designbereichs zu erreichen. Abb. 7.14 zeigt den Verlauf dieser Optimierung.

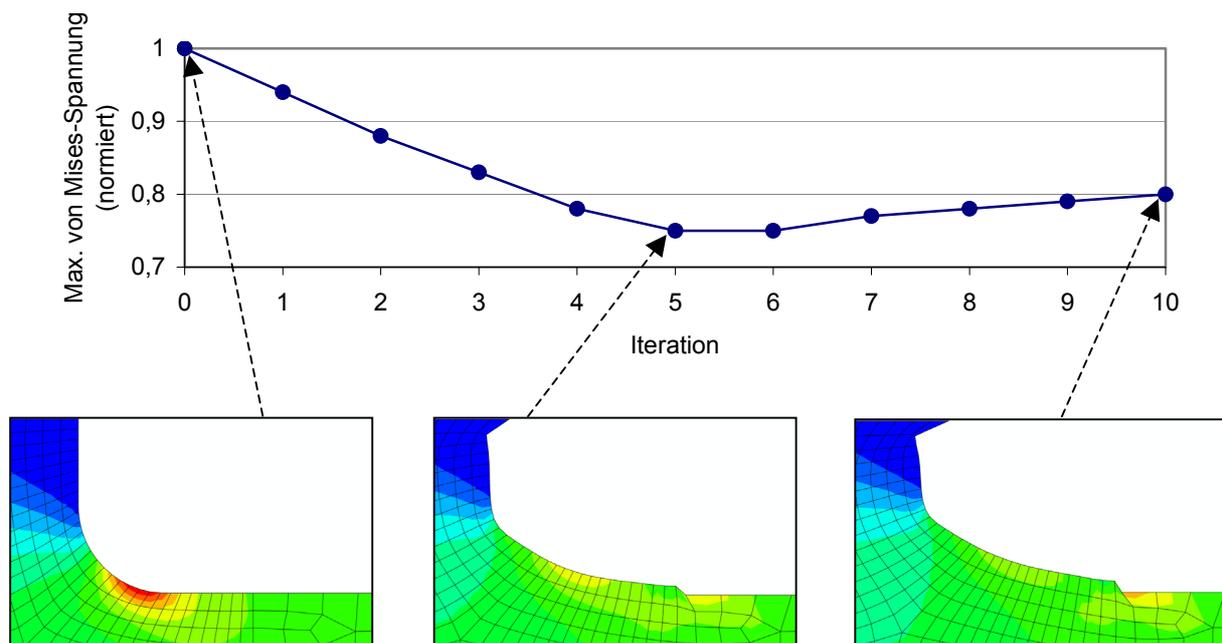


Abb. 7.14 Darstellung der normierten maximalen von Mises-Spannung für jeden Iterationsschritt

Wie erwartet, sinkt die maximale Spannung zunächst. Ab der 5. Iteration jedoch steigt diese wieder an. Grund hierfür ist eine Schwäche dieses Algorithmus in Zusammenhang mit einer etwas ungünstigen Problemdefinition. Durch das Anwachsen der Struktur im hochbelasteten Bereich kommt es sukzessive zur Ausbildung einer neuen „Kerbe“ am rechten Rand des Designbereichs. Hierdurch steigen die Spannungen dort wieder an, worauf der Algorithmus mit einem weiteren Wachsen der Struktur im Bereich der neuen Kerbe reagiert, das Problem so-

mit jedoch noch verschlimmert. Es ist daher nicht zu erwarten, dass die Optimierung bei dieser Problemstellung mit einem zufriedenstellenden Ergebnis konvergiert. Bräche man nach dem fünften Iterationsschritt ab, so wäre das Ergebnis mit einer Reduktion der maximalen von Mises-Spannung um 25% dennoch beachtlich.

Formuliert man die Optimierungsaufgabe etwas um, so kann man auch ohne Abbruch nach einer bestimmten Iteration ein sehr gutes Ergebnis erzielen. Hierfür ist es notwendig, als Zielfunktion nicht die Minimierung der maximalen Spannung, sondern die Minimierung der Differenz der maximalen Spannung zum Spannungswert eines Referenzelements zu definieren. Wählt man das in Abb. 7.15 markierte Element als Referenzelement, konvergiert die Optimierung nach 10 Iterationen ohne das Auftreten einer neuen Kerbe. Die maximale von Mises-Spannung kann im Vergleich zum Ausgangsdesign um 30% reduziert werden. Bei beiden Optimierungen wird die Volumenebenbedingung eingehalten.

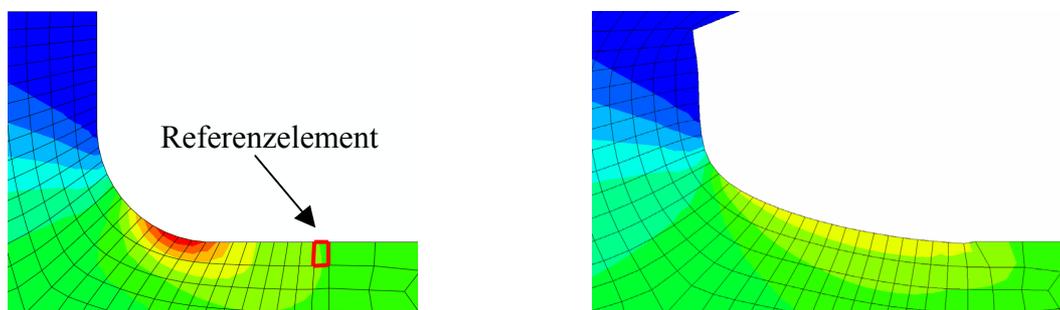


Abb. 7.15 Referenzelement (links) und Optimierungsergebnis bei Minimierung der Differenz der max. von Mises-Spannung zur von Mises-Spannung des Referenzelementes (rechts)

7.2.2 Gestaltoptimierung eines realen Triebwerksbauteils

Als praktisches Beispiel für die Gestaltoptimierung wird der Scheibenbereich einer Hochdruckverdichterstufe eines modernen Triebwerks in Blisk-Bauweise ausgewählt (Blisk = **Bla**-**d**e **I**ntegrated **D**isk). Eine solche schnell rotierende Blisk wird im Wesentlichen durch hohe Zentrifugalkräfte belastet. Für die hier durchgeführte Gestaltoptimierung werden weitere spannungsverursachende Lasten wie z.B. Temperatur- oder Druckgradienten aus Vereinfachungsgründen vernachlässigt. Abb. 7.16 (links) zeigt das komplette Blisk-Modell. Wegen seines zyklisch symmetrischen Aufbaus genügt für die Berechnung die Betrachtung eines Sektormodells (Abb. 7.16, rechts) unter Aufbringung der entsprechenden Randbedingungen. Bei reiner Fliehkraftbelastung treten die höchsten Spannungen der Scheibe im in Abb. 7.16 (rechts) umrandeten Bereich auf (siehe auch Abb. 7.18, links).

Ziel der Gestaltoptimierung ist die Reduktion dieser Spannungen bei gleichbleibendem oder geringerem Volumen des Bauteils. Als Designbereich wird sowohl die Vorder- als auch Rückseite des umrandeten Bereichs der Blisk zugelassen. Als finite Elemente kommen Tetraeder-Elemente mit quadratischer Ansatzfunktion zum Einsatz. Um wieder eine möglichst gute Vergleichbarkeit der beiden verwendeten FE-Programme sicherzustellen, werden ähnliche Untersuchungen wie bereits in Abschnitt 7.1.1 durchgeführt. Allerdings existiert für Volumenelemente keine so große Vielzahl an unterschiedlichen Elementformulierungen, wie dies

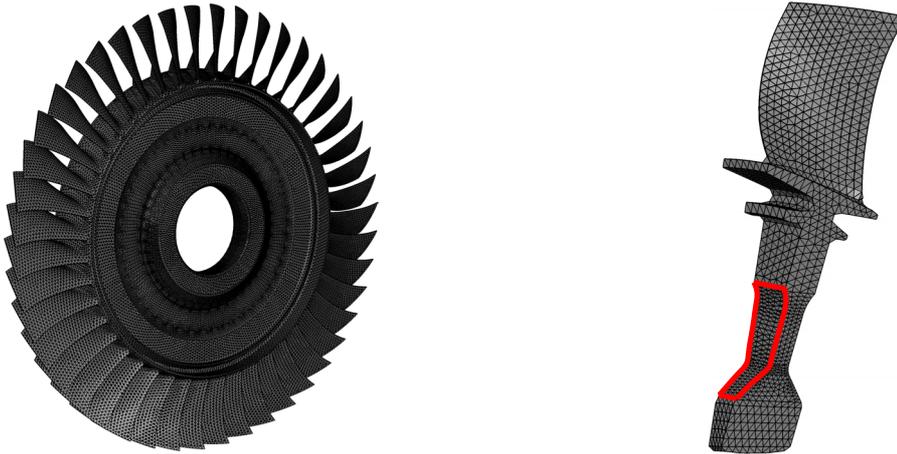


Abb. 7.16 Komplette, vernetzte Blink (links) und Sektormodell mit rot umrandetem Designbereich (rechts)

bei Schalenelementen der Fall ist. Die vergleichenden Untersuchungen der hier verwendeten Tetraederelemente (C3D10 bzw. CTETRA, für Details siehe [37] bzw. [1]) bezüglich Verzerungsenergie, Verschiebung und Spannungen lassen sogar vermuten, dass es sich um identische Formulierungen handelt.

Als zusätzliche Nebenbedingung über die Volumenbeschränkung hinaus erscheinen drei wei-

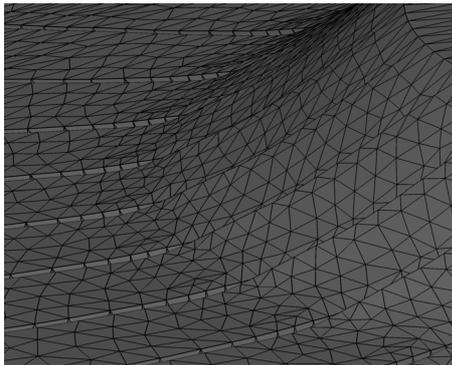


Abb. 7.17 Stufen zwischen Sektoren bei Abwesenheit einer geeigneten Fertigungsnebenbedingung

tere Punkte wichtig, um ein praktikables Design zu erhalten. Zum Einen muss durch eine geeignete Fertigungsnebenbedingung sichergestellt werden, dass es nach dem „Zusammenbau“ des Sektormodells nicht zu Stufen zwischen den einzelnen Sektoren kommt (Abb. 7.17), da Knoten in axialer Richtung zunächst unabhängig voneinander verschoben werden können. Sowohl die optimalitätskriterienbasierte als auch die sensitivitätsbasierte Gestaltoptimierungssoftware bieten derartige Fertigungsnebenbedingungen an. Zum Zweiten ist es bei im Ringraum rotierenden Triebwerksbauteilen wichtig, dass sich durch die Änderung der Gestalt keine gravierende Änderung der Verschiebungen in radialer Richtung ergeben, da es sonst zu Anstreifvorgängen oder zu einer

Vergrößerung des Spaltes zwischen Schaufelspitze und Ringraumbegrenzung kommen könnte, wobei letzteres Wirkungsgradverringerungen zur Folge hätte. Bei Nutzung des sensitivitätsbasierten Algorithmus ist eine Einführung einer solchen Verschiebungsnebenbedingung problemlos möglich. Der optimalitätskriterienbasierte Ansatz lässt so etwas nicht zu. Bei diesem Beispiel zeigen sich nach erfolgreichem Abschluss der Optimierung jedoch keine bedeutenden Veränderungen hinsichtlich der radialen Verschiebung. Als dritter Punkt sollte beachtet werden, dass es durch eine Verringerung der Spannungen in der Scheibe und der damit verbundenen Änderung der Scheibengeometrie nicht zu einer Erhöhung der Spannungen im

Schaufelfuß oder der Schaufel kommt. Auch diese Nebenbedingung kann nur der sensitivitätsbasierte Algorithmus in die Optimierung einfließen lassen.

7.2.2.1 Ergebnis der Gestaltoptimierung mit sensitivitätsbasiertem Algorithmus

Der sensitivitätsbasierte Algorithmus, welcher in Form einer Free-Shape-Optimierung angewendet wird, konvergiert nach 7 Iterationen. Neben den beschriebenen Fertigungsnebenbedingungen ist lediglich die Volumennebenbedingung aktiv. Die maximale von Mises-Spannung in der Scheibe kann um 4,9% reduziert werden, wobei auch die maximale von Mises-Spannung in der Schaufel, welche gleichzeitig die Maximalspannung in der gesamten Blisk darstellt, um 0,7% sinkt. Quasi als Nebeneffekt der Spannungsminimierung sinkt auch das Gesamtvolumen des Bauteils um 4,3%. Die maximale Verschiebung an der Schaufelspitze in radialer Richtung steigt leicht um 5,5% an, was einer Erhöhung der Verschiebung um 0,045 mm entspricht. In Abb. 7.18 ist sowohl die neue Gestalt (mittig), als auch die resultierende von Mises-Spannung dargestellt, welche nun eine wesentlich homogenere Verteilung aufweist.

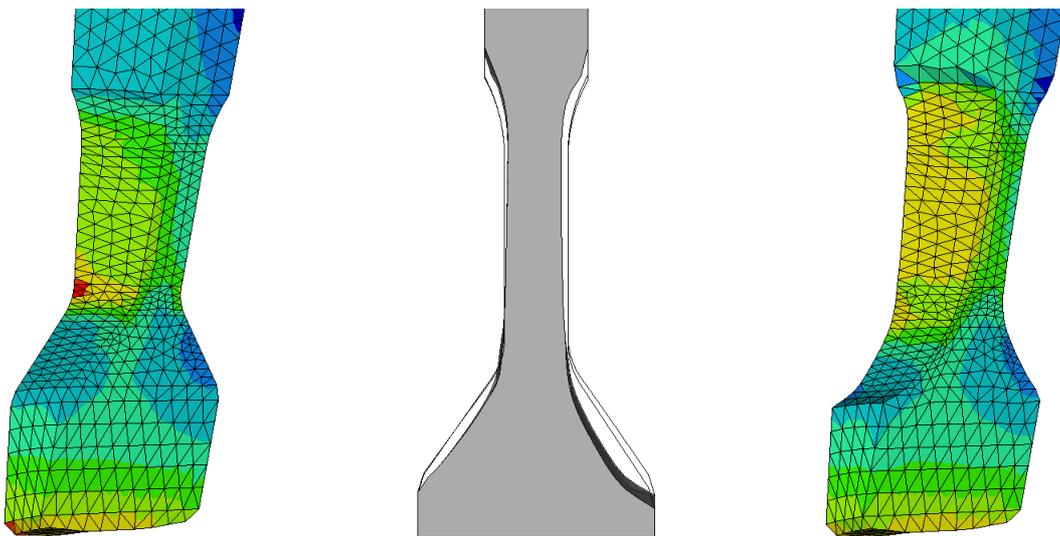


Abb. 7.18 Von Mises-Spannungsverteilung vor (links) und nach (rechts) der Gestaltoptimierung mit sensitivitätsbasiertem Algorithmus sowie neue und alte Gestalt im Vergleich (mittig)

7.2.2.2 Ergebnis der Gestaltoptimierung mit optimalitätskriterienbasiertem Algorithmus

Der optimalitätskriterienbasierte Algorithmus bricht die Optimierung nach dem fünften Iterationsschritt wegen einer zu schlechten Elementqualität ab. Dies kann vorkommen, wenn aufgrund des Wachstums und Schrumpfens bestimmter Bereiche finite Elemente zu stark verzerrt werden und der interne Netzglättungsalgorithmus des Optimierungstools dies nicht ausgleichen kann. Gibt man sich aber mit dem Ergebnis nach fünf Iterationsschritten zufrieden, so stellt man bereits beachtliche Verbesserungen hinsichtlich der Zielfunktion fest. Im Design-Bereich kann die maximale von Mises-Spannung um 25% reduziert werden, wobei jedoch die von Mises-Spannung außerhalb des Design-Bereiches am inneren Rand der Scheibe ansteigt.

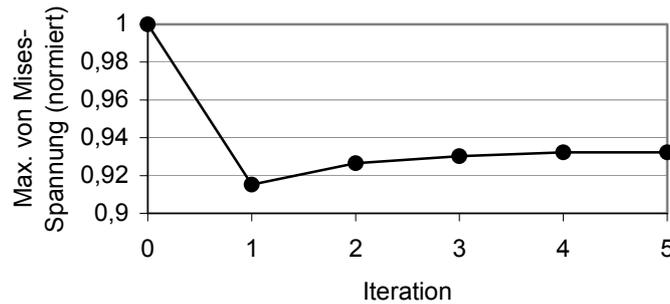


Abb. 7.19 Normierte max. von Mises-Spannung in der Scheibe für jeden Iterationsschritt

Es ist also ein ähnlicher Effekt zu beobachten wie auch beim einfachen Kerbspannungsoptimierungsproblem. Schaut man sich den Verlauf der maximalen von Mises-Spannung in der gesamten Scheibe und nicht nur im Design-Bereich an (Abb. 7.19), so wird deutlich, dass bereits nach dem ersten Iterationsschritt die Gestalt mit der geringsten von Mises-Spannung in der gesamten Scheibe gefunden wird (Reduktion um 8,5% bei nahezu identischem Gesamtvolumen wie Original-Blisk). Gleichzeitig steigt die maximale von Mises-Spannung in der Schaufel nur um 0,1% an. Die Verschiebung in radialer Richtung ist bei der optimierten Scheibenform sogar um 4% geringer. In Abb. 7.20 (links) ist zu erkennen, in welchen Bereichen das Wachsen bzw. Schrumpfen stattfindet. Auch hier wird durch die Optimierung eine wesentlich homogenere Verteilung der von Mises-Spannung erreicht (Abb. 7.20, rechts). Die Dicke der Scheibe ändert sich durch das Wachsen bzw. Schrumpfen im Vergleich zur Originalscheibe in einer Größenordnung von maximal 1 mm.

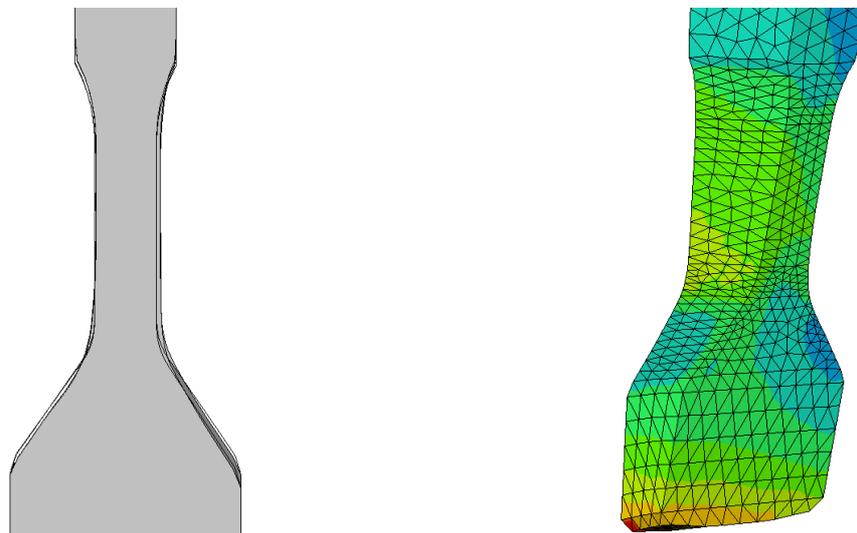


Abb. 7.20 Gestaltveränderung nach der 1. Iteration (grau = neue Gestalt, in Umrissen hinterlegt = Originalgestalt, links) und Verteilung der von Mises-Spannung bei gleicher Farbskalierung wie in Abb. 7.18

7.3 Praktischer Vergleich der Topographieoptimierungsverfahren

7.3.1 Einfaches Beispiel für eine Topographieoptimierung

Als einfaches Beispiel für die Topographie- oder Sickenoptimierung dient eine quadratische, zunächst ebene Platte, die an 3 Eckpunkten fest eingespannt (alle Verschiebungen und Rotationen gleich null) und am vierten, freien Eckpunkt durch eine Einzelkraft normal zu ihrer Oberfläche belastet ist (Abb. 7.21). Mit Hilfe der Topographieoptimierung sollen Sicken in die Platte eingebracht werden, um deren Steifigkeit zu erhöhen.

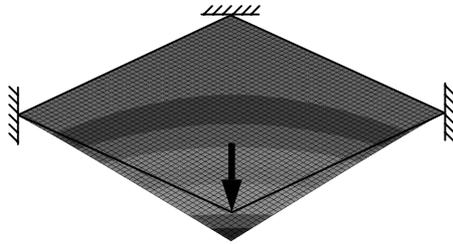


Abb. 7.21 Verformte Lage einer an drei Punkten eingespannten und durch Einzelkraft belasteten Platte

Um, wie auch schon in den vorangegangenen FE-Rechnungen, eine möglichst gute Vergleichbarkeit der Ergebnisse sicherstellen zu können, werden für diesen Lastfall wieder die zur Verfügung stehenden finiten Elemente hinsichtlich der auftretenden Spannungen, der Verzerrungsenergie und der Verschiebungen verglichen, wobei nur Elemente mit linearer Ansatzfunktion untersucht werden. Wie schon beim ebenen Kerbspannungsproblem in Abschnitt 7.2.1 sind die Ergebnisse der Elemente S4 und QUAD4 nahezu identisch, weshalb für den sensitivitätsbasierten Algorithmus das QUAD4- und für den optimalitätskriterienbasierten Algorithmus das S4-Element verwendet wird. Als Material für das Bauteil kommt Stahl mit den bekannten Elastizitätskonstanten $E = 210000 \text{ N/mm}^2$ und $\nu = 0,3$ zum Einsatz. Die Dicke der Platte beträgt ein Hundertstel der Seitenkantenlänge.

Ziel der Optimierung ist die Maximierung der Plattensteifigkeit. Da der optimalitätskriterienbasierte Algorithmus als Maß für die Steifigkeit bei einer statischen Rechnung nur die im Bauteil gespeicherte Verzerrungsenergie zulässt, wird auch für den sensitivitätsbasierten Algorithmus die Minimierung der Verzerrungsenergie bzw. der Arbeit der äußeren Lasten als Zielfunktion definiert.

Weiterhin werden vom Nutzer bei einer Sickenoptimierung noch Vorgaben hinsichtlich der maximalen Sickenhöhe, der minimalen Sickenbreite sowie des Anstiegswinkels der Sicken verlangt. Der optimalitätskriterienbasierte Algorithmus benötigt nur die Vorgabe einer Sickenhöhe, welche für beide Algorithmen mit dem vierfachen der Plattendicke festgelegt wird. Die anderen Parameter werden beim optimalitätskriterienbasierten Algorithmus automatisch anhand der Elementgröße und -dicke bestimmt, können aber auch durch den Nutzer vorgegeben werden, wovon bei diesem Beispiel jedoch nicht Gebrauch gemacht wird. Für den sensitivitätsbasierten Algorithmus wird ein Sickenanstiegswinkel von 60° und eine minimale Sickenbreite vom vierfachen der Plattendicke vorgegeben. Diese Parameter haben aber in der Regel keinen großen Einfluss auf die Zielfunktion. Symmetrievorgaben werden für dieses symmetrische Problem nicht gemacht.

7.3.1.1 Topographieoptimierungsergebnis mit sensitivitätsbasiertem Verfahren

Der sensitivitätsbasierte Topographieoptimierungsalgorithmus konvergiert nach 16 Iterationsschritten. Die Verschiebung am Kraftangriffspunkt, welche für das hier zu behandelnde Problem als ein zu der im Bauteil gespeicherte Verzerrungsenergie äquivalentes Steifigkeitsmaß angesehen werden kann, wird durch das in Abb. 7.22 erzeugte Sickenbild um 92% reduziert. Als Nebeneffekt der Steifigkeitsmaximierung sinkt die maximale von Mises-Spannung in der Platte um etwa 73%. Die maximal zulässige Sickenhöhe wird in großen Bereichen der Struktur ausgenutzt. Trotz der symmetrischen Problemstellung wird keine vollständig symmetrische Sickenverteilung als Optimierungsergebnis gefunden.

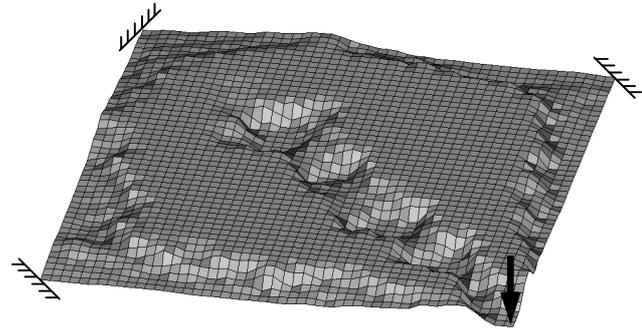


Abb. 7.22 Ergebnis der Topographieoptimierung mit sensitivitätsbasiertem Algorithmus

7.3.1.2 Topographieoptimierungsergebnis mit optimalitätskriterienbasiertem Verfahren

Der optimalitätskriterienbasierte Algorithmus benötigt lediglich die dem Verfahren innewohnende und fest vorgegebene Iterationsanzahl von drei Iterationen, ist allerdings nur in der Lage, die Verschiebung am Kraftangriffspunkt um 58% gegenüber der ebenen Platte zu reduzieren. Gleichzeitig sinkt die maximale von Mises-Spannung um etwa 55%. Auch mit diesem Algorithmus wird kein exakt symmetrisches Sickenbild erzeugt (Abb. 7.23).

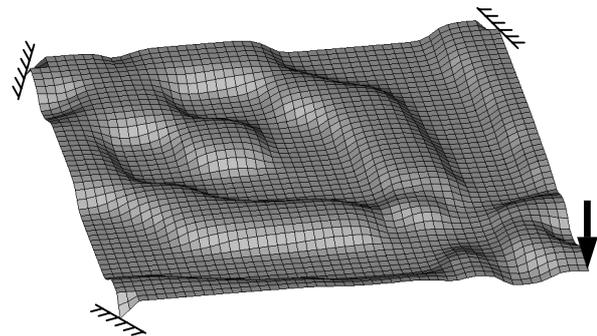


Abb. 7.23 Ergebnis der Topographieoptimierung mit optimalitätskriterienbasiertem Algorithmus

7.3.2 Topographieoptimierung eines realen Triebwerksbauteils

Als flächenhaftes Bauteil, welches sich für eine Topographieoptimierung eignet, wird die Ölkühlerhalterung eines zweiwelligen Flugtriebwerkes gewählt (Abb. 7.24, links). Dieses Bauteil hat lediglich die Aufgabe, für eine sichere Befestigung des Ölkühlers am Triebwerk zu sorgen und dabei eine nahezu statisch bestimmte Lagerung desselben zu garantieren, da es im Betrieb aufgrund der Erwärmung des Ölkühlers zu Längenausdehnungen kommt. Man kann sich den Ölkühler dabei als Balken vorstellen, dessen translatorische Freiheitsgrade an dem einen Lager gleich null sind. Am anderen Lager, welches durch die hier betrachtete Ölkühler-

halterung gebildet wird (Abb. 7.24, rechts), muss, um eine statisch bestimmte Lagerung des Balkens zu garantieren, eine Translation in Balkenlängsrichtung möglich sein. Dieser Translationsfreiheitsgrad wird näherungsweise durch eine große Nachgiebigkeit der Ölkühlerhalterung erreicht. Dehnt sich der Ölkühler unter Betriebsbedingungen aus, so unterliegt er damit nahezu keinen Zwängungen.

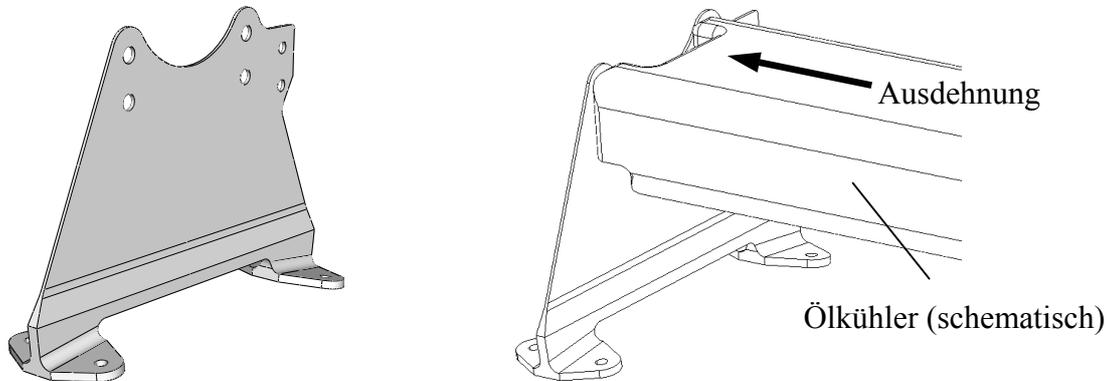


Abb. 7.24 Ölkühlerhalterung (links) und Ölkühlerhalterung mit schematisch dargestelltem Ölkühler (rechts)

Dies bedeutet aber, dass sich das hier vorgestellte Bauteil eigentlich nur bedingt für eine Topographieoptimierung eignet, deren typisches Ziel eine Steifigkeitserhöhung ist. Wird allerdings gleichzeitig eine Parameteroptimierung der Schalendicke mit dem Ziel der Volumenminimierung und einer Nebenbedingung, welche die geforderte Nachgiebigkeit der Struktur garantiert, durchgeführt, so ist auch bei diesem Bauteil eine Topographieoptimierung sinnvoll anwendbar [99]. Der optimalitätskriterienbasierte Topographieoptimierungsalgorithmus bietet im Gegensatz zu einem sensitivitätsbasierten Algorithmus allerdings nicht die Möglichkeit der Kombination und gleichzeitigen Durchführung verschiedener Optimierungsdisziplinen (hier Parameter- und Topographieoptimierung). Daher wird die Topographieoptimierung der Ölkühlerhalterung in diesem Falle nur mit dem Ziel der Maximierung der Steifigkeit des Bauteils durchgeführt.

In Abb. 7.24 ist zu erkennen, dass die Dicke des Bauteils etwas variiert. Aus Vereinfachungsgründen, auch im Hinblick auf eine spätere einfache Fertigbarkeit, wird hingegen eine konstante Dicke angenommen.

Die Ölkühlerhalterung ist seitlich am Triebwerk angebracht und durch das Eigengewicht des massiven Ölkühlers (F_z) und dessen temperaturbedingter Ausdehnung belastet (F_x), Abb. 7.25. Somit ergeben sich zwei Lastfälle:

1. Ölkühler erfährt keine temperaturbedingten Ausdehnungen (nur F_z wirkt),
2. Ölkühler ist in Betrieb und erfährt temperaturbedingte Ausdehnungen (F_x und F_z wirken gleichzeitig).

Die Lasten werden durch starre Balken, die in Abb. 7.25 (links) durch dünne schwarze Linien gekennzeichnet sind, auf die dafür vorgesehenen Befestigungsbohrungen der Halterung übertragen. An den unteren vier Befestigungsbohrungen (schwarz umrandet), welche die Verbindung zum Triebwerk darstellen, ist das Bauteil fest eingespannt. Die durch das Eigengewicht

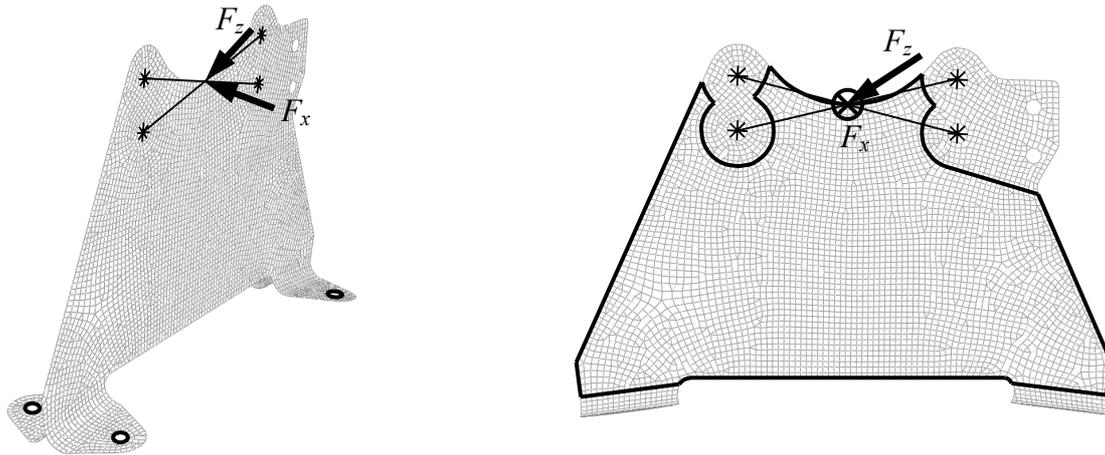


Abb. 7.25 Lasten und Randbedingungen der Ölkühlerhalterung (links) und Designbereich für Topographieoptimierung (rechts)

des Ölkühlers aufgebrauchte Last F_z wirkt in der Mittelebene des durch Schalenelemente diskretisierten FE-Modells und hat daher nur einen äußerst geringen Einfluss auf die optimierte Sickenverteilung, deren Aussehen durch die normal zur Oberfläche wirkende und damit die Biegung verursachende Kraft F_x dominiert wird.

Zielfunktion ist aus den bereits genannten Gründen die Maximierung der Steifigkeit bzw. Minimierung der Summe der Verzerrungsenergien beider Lastfälle, welche hierfür gleich gewichtet sind. Da durch das Einbringen der Sicken immer noch eine ungestörte Befestigung des Ölkühlers gewährleistet sein muss, dürfen die Sicken nicht auf der gesamten Ölkühlerhalterung entstehen, sondern nur im in Abb. 7.25 (rechts) schwarz umrandeten Designbereich. Außerdem dürfen sich die Sicken nur auf der ölkühlerabgewandten Seite erheben, weshalb nur Knotenverschiebungen normal zur Oberfläche in einer Richtung zulässig sind. Die maximale Sickenhöhe und minimale Sickenbreite wird auf das Zweieinhalbfache der Blechdicke im Designbereich beschränkt, der Sickenanstiegswinkel wird für den sensitivitätsbasierten Algorithmus mit 60° vorgegeben.

7.3.2.1 Topographieoptimierungsergebnis mit sensitivitätsbasiertem Verfahren

Nach 16 Iterationen konvergiert der sensitivitätsbasierte Topographieoptimierungsalgorithmus und erzeugt das in Abb. 7.26 dargestellte Sickenbild. Vergleicht man zwecks Quantifizierung des Optimierungsergebnisses die Verschiebungen am Lasteinleitungspunkt normal zur Blechoberfläche zwischen der Ausgangsstruktur und der optimierten Struktur, so stellt man fest, dass sich die Verschiebung aufgrund des Einbringens der Sicken um 75% verringert. Die Verschiebung in Richtung der Kraft F_z , verursacht durch das Eigengewicht des Ölkühlers, erhöht sich zwar um etwa das Dreifache, liegt aber mit einem Absolutwert von etwa $0,1 \text{ mm}$ im zulässigen Bereich. Wie auch schon bei dem einfachen Topographieoptimierungsbeispiel sinkt durch das Einbringen der Sicken die maximale von Mises-Spannung, welche im Lastfall 2 am höchsten ist, um 25%.

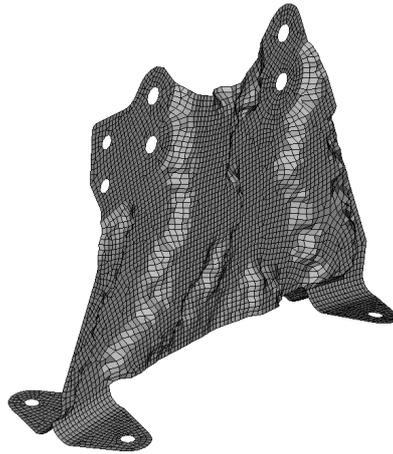


Abb. 7.26 Ergebnis der Topographieoptimierung mit sensitivitätsbasiertem Algorithmus

7.3.2.2 Topographieoptimierungsergebnis mit optimalitätskriterienbasiertem Verfahren

Wie auch beim einfachen Plattenbeispiel, erzielt der optimalitätskriterienbasierte Algorithmus ein etwas schlechteres Ergebnis als der sensitivitätsbasierte Algorithmus. Durch die nach drei Iterationen erzeugte Sickenverteilung in Abb. 7.27 kann die Verschiebung normal zur Blechoberfläche am Lasteinleitungspunkt für den relevanten Lastfall 2 um 63% reduziert werden. Die Verschiebung in Richtung der Kraft F_z steigt um das zehnfache und liegt im Bereich von etwa $0,33 \text{ mm}$. Hinsichtlich der von Mises-Spannung kann durch die erzeugten Sicken in Abb. 7.27 sogar eine Reduktion um etwa 49% erreicht werden.



Abb. 7.27 Ergebnis der Topographieoptimierung mit optimalitätskriterienbasiertem Algorithmus

7.4 Zusammenfassender Vergleich der Strukturoptimierungsergebnisse

In Tabelle 7.4 sind die durchgeführten vergleichenden Strukturoptimierungen zwischen sensitivitäts- und optimalitätskriterienbasierten Algorithmen hinsichtlich der betrachteten Ausgabegrößen noch einmal zusammengefasst. Angegeben sind jeweils die Veränderung der maximalen von Mises-Spannung, der Steifigkeit (entweder als Verschiebungs- oder Verzerrungsenergieveränderung, wobei eine sinkende Steifigkeit eine steigende Verzerrungsenergie bzw. Verschiebung und umgekehrt bedeutet) und des Volumens gegenüber dem nicht optimierten Ausgangsmodell. Bei der Topologieoptimierung des einfachen Brückenbeispiels wird hierzu als Referenzstruktur das Modell mit komplett mit Material gefülltem Designraum genutzt. Die hierbei aufgeführten Veränderungen der Steifigkeit bei Nutzung des sensitivitätsbasierten Algorithmus sind abhängig vom gewählten Bestrafungsexponenten (siehe hierzu auch Tabelle 7.1). Für die Topologieoptimierung des realen Bauteils (Zwischengehäuse) sind die Ergebnisse hinsichtlich Volumen und Steifigkeit in Tabelle 7.4 nach der Parameteroptimierung des topologieoptimierten Zwischengehäuses bezogen auf das parameteroptimierte Originalzwischengehäuse aufgeführt. Für die Angabe der Steifigkeit wurde die Gesamtverzerrungsenergie der Bauteile über alle Lastfälle gemittelt und zueinander ins Verhältnis gesetzt. Obwohl die Steifigkeit des topologieoptimierten Zwischengehäuses unter der des parameteroptimierten

Tabelle 7.4 Strukturoptimierungsergebnisse der verschiedenen Algorithmen

		Sensitivitätsbasierter Algorithmus			Optimalitätskriterienbasierter Algorithmus		
		Von Mises-Spannung	Steifigkeit	Volumen	Von Mises-Spannung	Steifigkeit	Volumen
Topologieoptimierung	Brückenproblem	-	-32,5% / -56,7% / -60,5% / -81,7%	-59,0%	-	-48,0%	-59,0%
	Zwischengehäuse	-	(-11,8%)	(-1,8%)	-	-	-
Gestaltoptimierung	Kerbproblem	-21,3% * bzw. -24,0% **	+0,5%	-0,2%	-30,0%	+0,8%	-0,04%
	Blisk	-4,9%	-5,5%	-4,3%	-8,5%	+4,0%	+0,9%
Topographieoptimierung	Quadr. Platte	-72,9%	+92,0%	-	-54,8%	+58,3%	-
	Ölkühlerhalterung	-24,6%	+75,2%	-	-49,2%	+63,0%	-

* Gestaltoptimierung mittels Basisformen

** Gestaltoptimierung mittels Free-Shape-Optimierung

Originalzwischengehäuses liegt, werden doch alle Steifigkeitsnebenbedingungen eingehalten. Für die Topographieoptimierung ist eine Angabe der Volumenveränderung nicht sehr sinnvoll, da dieser aus dem FE-Programm resultierende Wert nicht die Änderung der Wandstärke der Sicken aufgrund des Tiefziehprozesses beinhaltet und somit nicht der Realität entspreche. Ähnliches gilt für die Topologieoptimierung. Hier wurde auf die Angabe der Veränderung der von Mises-Spannung verzichtet.

8 Strukturoptimierung faserverstärkter Kunststoffbauteile

Um das Optimierungspotential realer Bauteile weiter (also beispielsweise über eine Topologieoptimierung hinaus) auszuschöpfen, bietet sich die Nutzung faserverstärkter Kunststoffe an. Faserverstärkte Kunststoffe besitzen gegenüber herkömmlichen isotropen Materialien den großen Vorteil, dass ihre Eigenschaften belastungsgerecht angepasst werden können. Dies ist durch eine Variation der Faserorientierungen und der Dicken der einzelnen Schichten möglich. Liegen nur wenige oder ein einzelner Lastfall vor, so kann die Orientierung der Fasern zweckmäßigerweise entlang der Hauptspannungsrichtungen erfolgen. Bei einer größeren Anzahl an Lastfällen fällt dies jedoch schwer, da die Hauptspannungsrichtungen möglicherweise für jeden Lastfall verschieden sind. Man benötigt also einen mehrlagigen Schichtaufbau, dessen Faserorientierungen und Schichtdicken per Hand an die Lastfälle angepasst werden müssen. Für diese Anpassung werden in diesem Kapitel zur Effizienzsteigerung verschiedene Optimierungsalgorithmen eingesetzt. Als Festigkeitsnebenbedingung werden dabei die in Abschnitt 6.2.4 vorgestellten und implementierten wirkebenenbasierten Bruchkriterien sowie das Tsai-Hill-Kriterium (Abschnitt 6.2.3) verwendet. Im Folgenden wird die Optimierung der Materialparameter für sogenannte „ungestörte“ und „gestörte“ Bereiche durchgeführt. Zuvor werden aber kurz die möglichen Verfahren bei der Optimierung im Zusammenhang mit faserverstärkten Materialien vorgestellt und auf eine wichtige Besonderheit bei der Optimierung, das Singularitätsproblem, hingewiesen.

8.1 Das Singularitätsproblem

Das Singularitätsproblem bei der Optimierung faserverstärkter Kunststoffe (oder allgemeiner faserverstärkter oder orthotroper Materialien) ist verwandt mit dem Problem der Spannungsnebenbedingungen bei der Topologieoptimierung und tritt beispielsweise auf, wenn als Zielfunktion die Masse oder das Volumen und als Nebenbedingung ein Festigkeitskriterium definiert ist (siehe auch [28]). Zur Verdeutlichung der Problematik sei folgendes einfaches Optimierungsbeispiel (wie man es auch in [28] findet) angeführt: Ein quadratisches, ebenes Bauteil ist aus einem vierlagigen, symmetrischen glasfaserverstärkten Kunststoff aufgebaut (Materialdaten nach Tabelle 6.3) und wie in Abb. 8.1 dargestellt durch eine Zugspannung belastet. Die Faserorientierungen der Schichten betragen 0° bzw. 90° . Ziel der Optimierung ist die Minimierung der Masse der Struktur. Gleichzeitig soll der Fehlerindex eines geeigneten Versagenskriteriums, hier des Tsai-Hill-Kriteriums, nicht

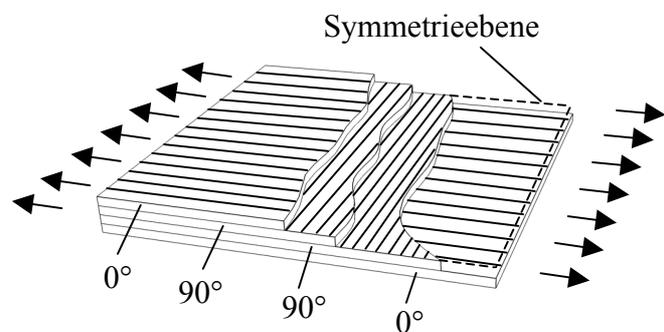


Abb. 8.1 Schichtaufbau für Beispielproblem zur Spannungssingularität

größer als 1,0 werden. Als Designvariablen werden zunächst nur die Dicken der einzelnen Schichten gewählt, was aufgrund des symmetrischen Schichtaufbaus auf zwei Designvariablen (Dicke der 0° -Schichten und Dicke der 90° -Schichten) führt. Bei diesem einfachen Problem ist die Optimallösung sofort ersichtlich. Die Dicke der 90° -Schichten sollte auf einen Wert von null reduziert werden und die Dicke der 0° -Schichten entsprechend ihrer Zugfestigkeit angepasst werden. Betrachtet man jedoch den zulässigen Designraum, wie er sich für den Optimierungsalgorithmus darstellt, so wird die Problematik der auftretenden Spannungssingularität deutlich.

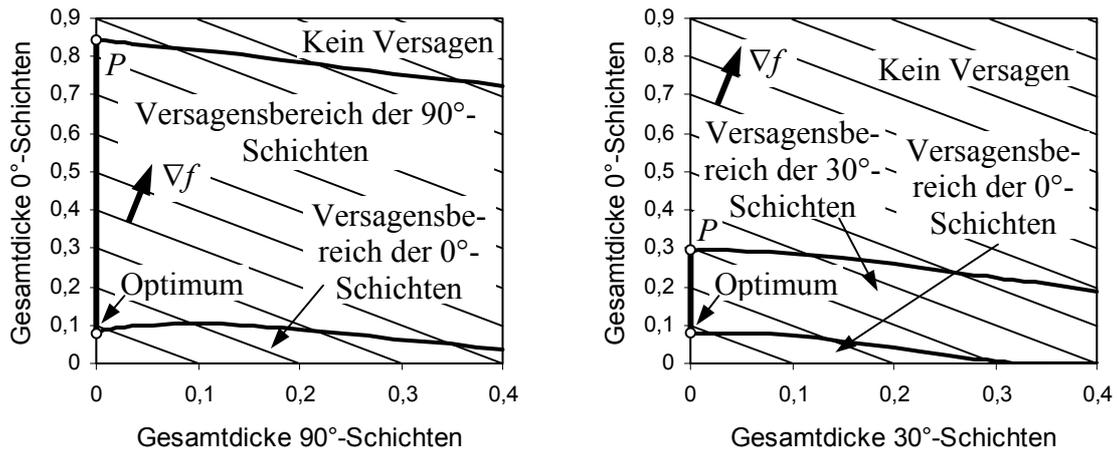


Abb. 8.2 Designraum des Laminatoptimierungsproblems (links bei Schichtaufbau aus 0° - und 90° -Schichten und rechts bei Schichtaufbau aus 0° - und 30° -Schichten) mit Höhenlinien der Zielfunktion

Abb. 8.2 (links) zeigt den zulässigen Bereich des Optimierungsproblems. Im oberen Bereich findet kein Versagen einer Schicht statt, im mittleren Bereich befinden sich die Schichtdickenkombinationen, die zu einem Versagen der 90° -Schichten führen würden und im unteren Bereich versagen auch die 0° -Schichten. Das Optimum befindet sich an einem Punkt, an dem die Dicke der 90° -Schichten gleich null ist. Dieser Punkt ist mit dem oberen, zulässigen Bereich nur über eine Linie verbunden (dick gezeichnete vertikale Linie auf Achse der 0° -Schichten). Eine Schichtdicke von null würde aber in einem FEM-Programm zu numerischen Problemen führen. Auch der Optimierungsalgorithmus selber könnte beispielsweise die notwendige Schrittweite, um diesen Punkt zu erreichen, nie mit der notwendigen Genauigkeit bestimmen. Solange jedoch die Dicke der 90° -Schichten größer als null ist, die Schichten also vorhanden sind, verhindert die Festigkeitsnebenbedingung das Erreichen des eigentlichen Optimums - wären die 90° -Schichten nicht mehr vorhanden, könnten sie auch nicht mehr versagen. Der Optimierungsprozess endet daher üblicherweise am Punkt P . Die geringere Festigkeit der 90° -Schichten limitiert also hier das Ergebnis der Optimierung und stellt eine undurchdringliche Barriere für den Algorithmus dar.

Werden in dem Problem aus Abb. 8.1 die 90° -Schichten durch 30° -Schichten ersetzt, so stellt sich der Designraum wie in Abb. 8.2 (rechts) gezeigt dar. Der Punkt P , der vom Optimierungsalgorithmus als Optimum ermittelt wird, liegt nun schon wesentlich näher am wirklichen

Optimum, wenngleich auch hier im Designraum eine Singularität in Form von zulässigen Bereichen mit unterschiedlicher Dimension auftritt. Die Veränderung des Orientierungswinkels der zweiten Schicht bewirkt also eine gewisse Relaxation des ursprünglichen Problems. Lässt man dem Optimierungsalgorithmus die Freiheit, neben der Schichtdicke auch die Faserorientierungen zu verändern, so ist er in der Lage, das Problem selbstständig zu relaxieren und das wahre Optimum zu erreichen [28]. Dies wurde für das vorliegende Problem aus Abb. 8.1 auch erfolgreich mit dem CONLIN-Algorithmus erprobt.

8.2 Verfahren zur Optimierung faserverstärkter Kunststoffe

Um den optimalen Laminataufbau festzulegen, existieren im Bereich der kommerziellen Software im Wesentlichen drei verschiedene Strategien, die alle auf der klassischen Laminattheorie bzw. der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung und somit ebenen Spannungszuständen beruhen und nachfolgend kurz erläutert sind.

a) Topologieoptimierung:

Die Topologieoptimierung lässt sich auch effektiv auf die Optimierung des Lagenaufbaus eines faserverstärkten Kunststoffes übertragen. Hierzu ist es notwendig, einen Anfangslaminataufbau zu definieren, wobei jeder Schicht eine Dicke und Faserorientierung zugewiesen wird. Nachfolgend wird im Topologieoptimierungsprozess für jede Schicht die für die Topologieoptimierung typische 0-1-Dichteverteilung ermittelt, die anzeigt ob die entsprechende Schicht in einem bestimmten Bereich vorhanden ist oder nicht. Somit erhält man Informationen darüber in welchem Bauteilbereich sich welche Faserorientierungen befinden sollten.

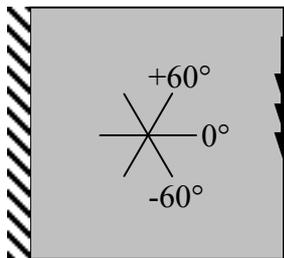
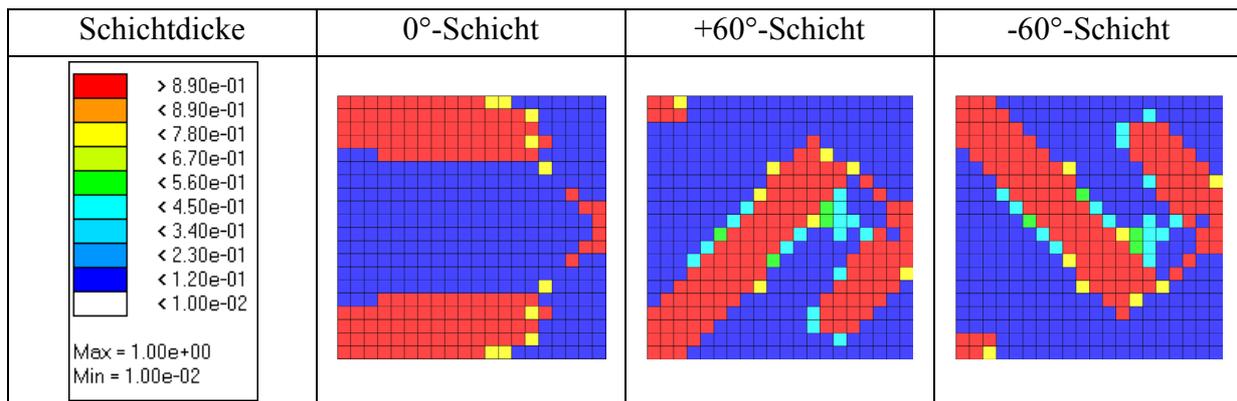


Abb. 8.3 Beispielproblem für Laminatoptimierung

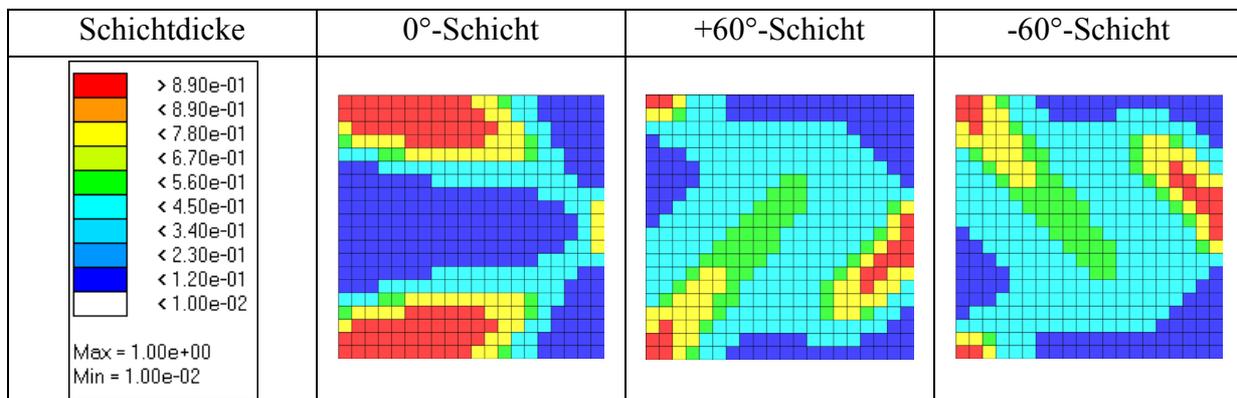
Die Charakteristik der Topologieoptimierung bei faserverstärkten Materialien sei anhand eines einfachen Beispiels verdeutlicht. Eine quadratische Scheibe aus glasfaserverstärktem Kunststoff sei an einer Seite fest eingespannt und an der gegenüberliegenden Seite mit einer über einen gewissen Bereich tangential wirkenden Streckenlast beaufschlagt (Abb. 8.3). Der Laminataufbau ist symmetrisch und beinhaltet die Faserorientierungen $[0^\circ, +60^\circ, -60^\circ]_{\text{sym}}$. Alle Schichten haben dieselbe Dicke. Ziel der Optimierung ist die Minimierung des Gesamtvolumens, wobei ein bestimmter Wert der Verschiebung in Richtung der Last am mittleren Lasteinleitungsknoten nicht unterschritten werden soll. Das Ergebnis der Topologieoptimierung ist

Tabelle 8.1 zu entnehmen. Die Farbskala gibt die ermittelte optimale Dickenverteilung in einer jeden Schicht an. Beispielsweise wird Material mit einer Faserorientierung von 0° hauptsächlich am oberen und unteren Rand der Scheibe benötigt.

Ein Nachteil der Topologieoptimierung ist, dass keine Spannungs- und somit auch keine Festigkeitsnebenbedingungen gesetzt werden können. Der Grund hierfür liegt in dem erläuterten Spannungssingularitätsproblem, da die Faserorientierungen bei der Topologieoptimierung nicht variiert werden.

Tabelle 8.1 Ergebnis Laminat-Topologieoptimierung für einfaches Beispiel**b) Free-Size-Optimierung:**

Die Übertragung der Free-Size-Optimierung auf Laminare erfolgt ähnlich der klassischen Topologieoptimierung, wobei hier eine kontinuierliche Variation der Schichtdicken erfolgt, so dass im Gegensatz zur Topologieoptimierung keine 0-1-Verteilung erzwungen wird, sondern auch „Zwischendicken“ zulässig sind. Optimierungsparameter ist nicht ein Dichtefaktor, sondern direkt die Schichtdicke eines jeden Elementes. In Tabelle 8.2 sind die Ergebnisse des Beispielproblems aus Abb. 8.3 für die Free-Size-Optimierung dargestellt. Auch bei der Free-Size-Optimierung können aus den bereits genannten Gründen keine Spannungsnebenbedingungen definiert werden.

Tabelle 8.2 Ergebnis Laminat-Free-Size-Optimierung für einfaches Beispiel**c) Parameteroptimierung:**

Bei einer klassischen Parameteroptimierung können Schichtdicken und Faserorientierungen gleichzeitig variiert werden, weswegen dieses Optimierungsverfahren auch nicht den Einschränkungen hinsichtlich der Spannungsnebenbedingungen unterliegt. Diese Eigenschaft macht dieses Verfahren besonders interessant für praktische Anwendungsfälle und ist der Grund dafür, warum die weiteren Optimierungen im Zusammenhang mit Faserverbundmaterialien als Parameteroptimierungen durchgeführt werden. Unter Umständen ist es auch sinn-

voll, einer Parameteroptimierung eine Topologie- oder Free-Size-Laminat-Optimierung voranzuschalten, da diese beiden Verfahren zunächst zumindest einen groben Eindruck von einer günstigen Verteilung der Schichtdicken und Faserorientierungen liefern. Eine geeignete Interpretation dieser Verteilungen im Sinne eines Laminataufbaus, bestehend aus verschiedenen Bereichen, welche sich auch überlappen können, kann dann ein guter Startpunkt für eine anschließende Parameteroptimierung sein.

Einen sehr umfangreichen Überblick über weitere Möglichkeiten der Optimierung von Faser-Kunststoff-Verbunden, die jedoch in den meisten Fällen bisher nur an akademischen Beispielstrukturen erprobt wurden, kann man [60] und [61] entnehmen.

8.3 Verhalten verschiedener Optimierungsalgorithmen

Das Verhalten verschiedener Optimierungsalgorithmen bei der Optimierung der Materialparameter faserverstärkter Kunststoffe, welches typischerweise durch viele lokale Optima gekennzeichnet ist, wird im Folgenden exemplarisch für einen einfachen Fall untersucht. Betrachtet wird hierzu eine gerade, torsionsbelastete Röhre mit konstantem Querschnitt, deren einzige Schnittlast ein konstantes Torsionsmoment darstellt (Abb. 8.4). Die Röhre ist aus einem zweischichtigen Laminat aufgebaut, wobei beide Schichten dieselbe Dicke aufweisen. Ziel der Optimierung ist die Maximierung der Torsionssteifigkeit bzw. Minimierung des Torsionswinkels der Röhre durch eine Optimierung der Faserorientierungen der beiden Schichten.

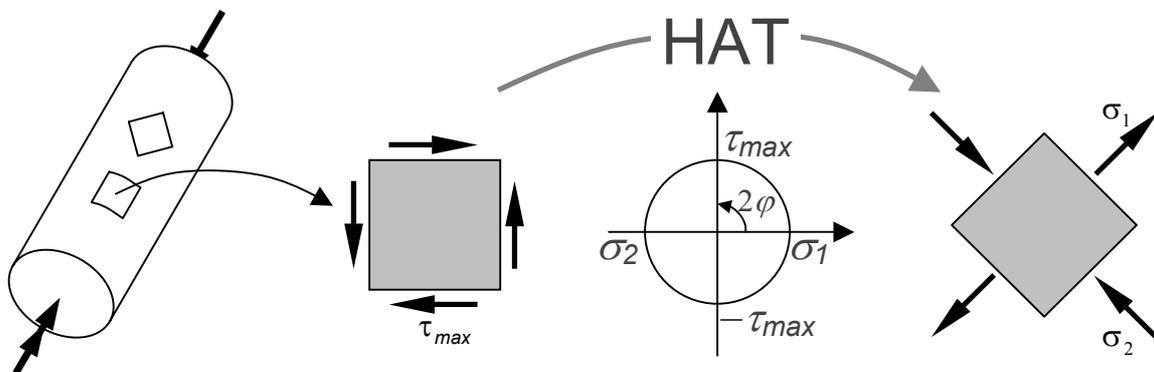


Abb. 8.4 Hauptachsentransformation (HAT) eines reinen Schubspannungszustandes in einen Normalspannungszustand

Ein axial ausgerichtetes Flächenelement der Struktur wird im vorliegenden Fall durch einen reinen Schubspannungszustand belastet. Dieser kann bekanntlich durch eine Hauptachsentransformation in einen reinen Normalspannungszustand überführt werden, welcher sich in einem um 45° gedrehten Koordinatensystem einstellt. Da Faser-Kunststoff-Verbunde ihre größte Festigkeit und Steifigkeit in Richtung der Faserorientierungen besitzen, sollten diese auch entlang der Belastungsrichtungen verlaufen. Beim vorgestellten Beispiel wären dies die $+45^\circ$ -Richtung und die -45° -Richtung, in denen jeweils eine Zug- bzw. Drucknormalspan-

nung auf das Flächenelement wirken (Abb. 8.4). Somit ist die optimale Faserorientierung für dieses Beispiel bekannt.

Die Abhängigkeit der Steifigkeit von den beiden Faserorientierungswinkeln kann z.B. mit

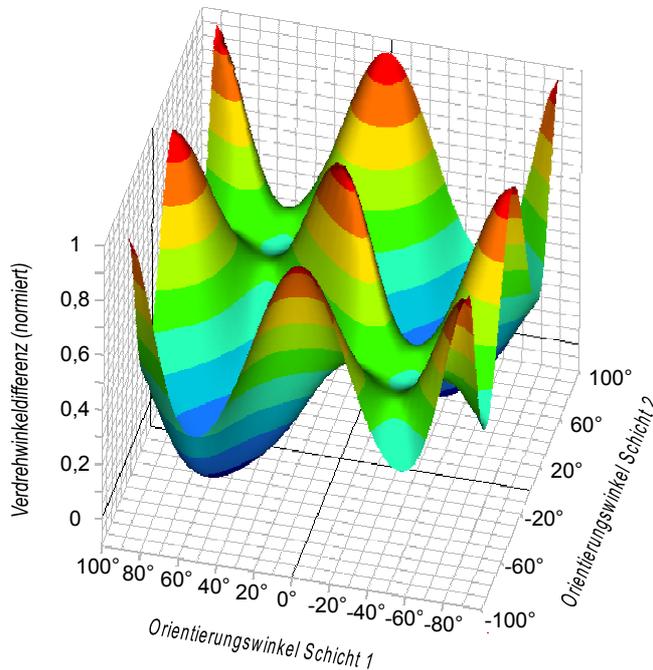


Abb. 8.5 Abhängigkeit des Verdrehwinkels der Röhre von den Faserorientierungen der Schichten

Hilfe der CLT oder einer DoE-Studie (**Design of Experiments**) berechnet werden. Abb. 8.5 zeigt die Abhängigkeit des Verdrehwinkels der beschriebenen Röhre von den Faserorientierungen der beiden Laminatschichten für alle möglichen Faserorientierungskombinationen. Wie zu erkennen ist, existieren neben dem globalen Minimum $+45^\circ/-45^\circ$ bzw. $-45^\circ/+45^\circ$ auch noch lokale Minima bei $-45^\circ/-45^\circ$ bzw. $+45^\circ/+45^\circ$. Um zumindest einen groben Eindruck des Verhaltens verschiedener Optimierungsalgorithmen bei derartigen Problemstellungen zu bekommen, werden ausgehend von den Startfaserorientierungen $+5^\circ/+5^\circ$ und $+5^\circ/-5^\circ$ ein SQP-Algorithmus, die „Method of Feasible Directions“

(MFD), die „Adaptive Response Surface Method“ (ARSM), ein genetischer Algorithmus (GA) und der CONLIN-Algorithmus angewandt. Abb. 8.6 zeigt das Verhalten der Algorithmen.

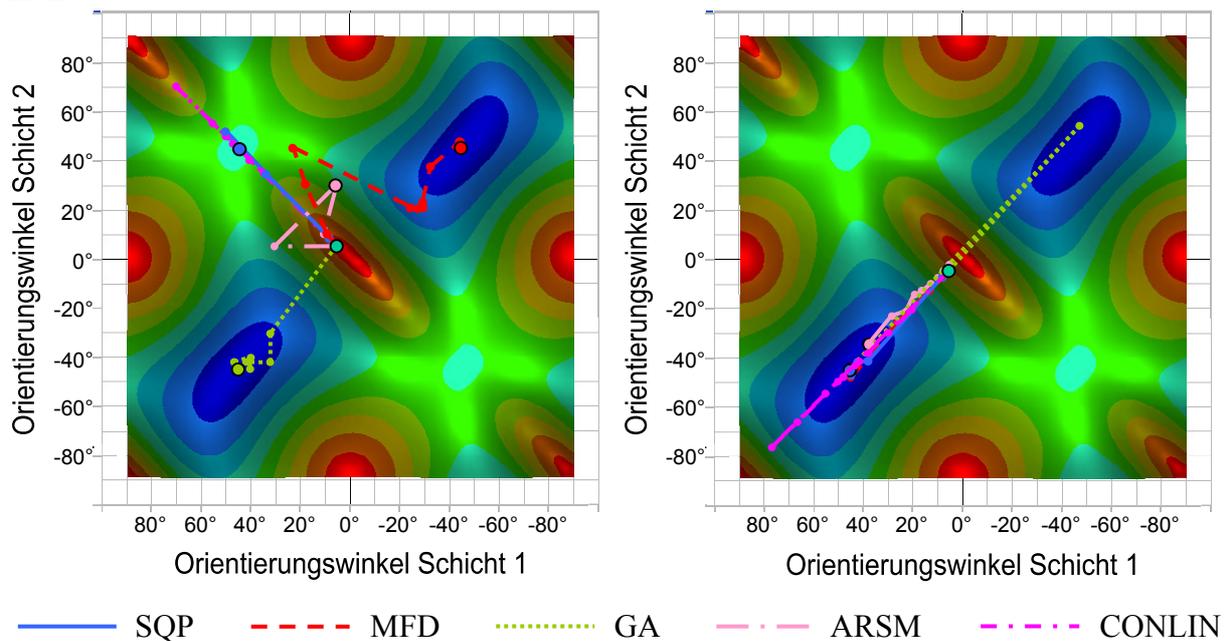


Abb. 8.6 Verhalten verschiedener Optimierungsalgorithmen bei Laminatoptimierung für verschiedene Startpunkte (links Startpunkt = $+5^\circ/+5^\circ$, rechts Startpunkt = $+5^\circ/-5^\circ$)

Wie auch Tabelle 8.3 zu entnehmen ist, konvergieren der SQP- und der CONLIN-Algorithmus für den Startpunkt $+5^\circ/+5^\circ$ im lokalen Optimum $+45^\circ/+45^\circ$. Bei geringfügiger Änderung des Startpunktes für die Optimierung (Änderung einer Faserorientierung von $+5^\circ$ auf -5°), erreichen jedoch auch diese beiden Verfahren das globale Optimum bei $+45^\circ/-45^\circ$. Der hier verwendete ARSM-Algorithmus konvergiert für keine der beiden Startparameterkombinationen in einem lokalen oder globalen Optimum. Der genetische Algorithmus erzielt zwar bei einer geringen Anzahl an Iterationen sehr gute Ergebnisse, jedoch benötigt dieses Verfahren in jedem Iterationsschritt, d.h. Generation, aufgrund der gewählten Populationsgröße von 40 Individuen sehr viele Funktionsauswertungen, was es für größere strukturmechanische Problemstellungen, bei denen die Rechenzeiten für eine Funktionsauswertung im hohen Sekunden- oder Minutenbereich liegen und wie sie im Folgenden behandelt werden, ohne Modifikationen oder Erweiterungen unattraktiv macht. Somit erscheinen der SQP-Algorithmus, die Method of Feasible Directions und der CONLIN-Algorithmus für die Optimierung der Materialparameter in Faser-Kunststoff-Verbunden zunächst am geeignetsten.

Tabelle 8.3 Ergebnisse der Torsionsröhren-Laminat-Optimierung mit verschiedenen Algorithmen

Algorithmus	Startpunkt für Optimierung	Anzahl benötigter Iterationen	Optimierungsergebnis	Anzahl der Funktionsauswertungen
SQP	$+5^\circ/+5^\circ$	8	$+42,8^\circ/+47,3^\circ$	25
	$+5^\circ/-5^\circ$	8	$+45,5^\circ/-47,4^\circ$	25
MFD	$+5^\circ/+5^\circ$	12	$-45,5^\circ/+45,5^\circ$	57
	$+5^\circ/-5^\circ$	6	$+45,5^\circ/-45,9^\circ$	28
GA	$+5^\circ/+5^\circ$	8	$+45,1^\circ/-45,7^\circ$	286
	$+5^\circ/-5^\circ$	7	$+45,1^\circ/-45,6^\circ$	248
ARSM	$+5^\circ/+5^\circ$	5	$+5^\circ/+30^\circ$	5
	$+5^\circ/-5^\circ$	15	$+37,7^\circ/-34,9^\circ$	15
CONLIN	$+5^\circ/+5^\circ$	11	$+45,7^\circ/+45,7^\circ$	34
	$+5^\circ/-5^\circ$	14	$+44,9^\circ/-44,9^\circ$	43

8.4 Optimierung ungestörter Bereiche

Unter „ungestörten Bereichen“ sollen im Folgenden Bereiche einer Struktur verstanden werden, die nur sehr geringe und somit vernachlässigbare Spannungen in Dickenrichtung aufweisen und frei von größeren Spannungskonzentrationen sind. Dies trifft im Wesentlichen auf dünne, blechartige Regionen mit einer moderaten Krümmung (d.h. $t/r \ll 1$) und ohne konzentrierte Lasten in Dickenrichtung zu. Für derartige Strukturen ist eine Modellierung bei Nutzung eines faserverstärkten Kunststoffes als Material mit Hilfe der Schubdeformations-

theorie 1. Ordnung (siehe Abschnitt 5.2) in Verbindung mit finiten Schalenelementen zulässig.

Als ungestörter Bereich eines realen Bauteils wird ein Teil eines Struts aus dem bereits in der Topologieoptimierung behandelten Zwischengehäuse (Abschnitt 7.1.3) ausgewählt, Abb. 8.7.

Die erforderlichen Schnittlasten für den ausgewählten Strut-Bereich können wieder aus dem Whole Engine Model des Triebwerks bestimmt werden. Um nun eine Untersuchung des ungestörten Strut-Bereiches hinsichtlich der Verwendung von Faser-Verbund-Materialien durchzuführen, ist natürlich eine sehr viel feinere Vernetzung als die des WEM-Modells erforderlich. Damit auch die Originalgeometrie vernetzt werden kann, ist es notwendig, die Knoten des groben Modells aus Abb. 8.7 auf die Originalgeometrie zu projizieren (Abb. 8.8, links),

um so ein Modell mit denselben Abmaßen wie der freigeschnittene Strut-Bereich zu erhalten (Abb. 8.8, mittig), das dann feiner vernetzt werden kann (Abb. 8.8, rechts).

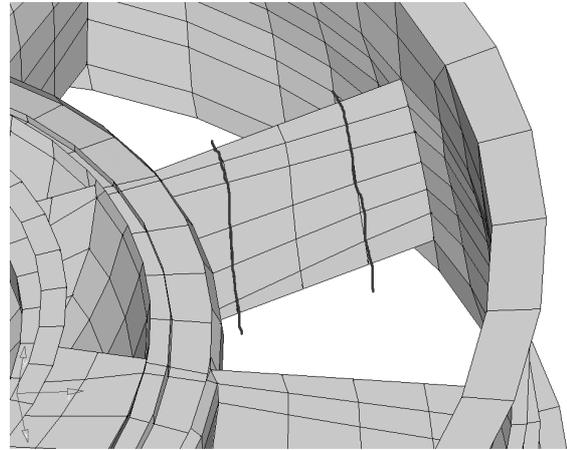


Abb. 8.7 Ausgewählter ungestörter Bereich im Whole Engine Model

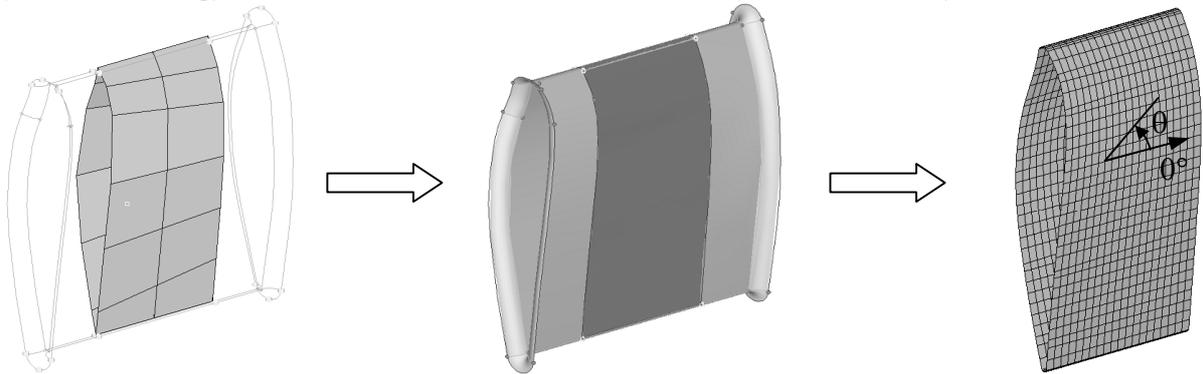


Abb. 8.8 Projektion des groben WEM-Netzes auf Strut-Geometrie (links), Erzeugung einer vernetzbaren Geometrie (dunkle Fläche, mittig) und fein vernetzter Strut-Bereich mit Definition der Faserorientierung (rechts)

Da die zuvor bestimmten Knotenschnittlasten nur für die Knotenpositionen des groben Netzes gelten, werden Knoten des feinen Netzes an genau dieselben Positionen auf der Geometrie gelegt. Durch das Antragen der Schnittlasten an diesen Knoten entstünden aber Spannungskonzentrationen aufgrund der Tatsache, dass der Großteil der Randknoten nicht belastet wird. Die bei dem feinen Netz zwischen den eigentlichen Lasteinleitungsknoten liegenden Knoten müssen daher ebenfalls mit einer Last beaufschlagt werden, bzw. die einzuleitenden Lasten auf alle Randknoten verteilt werden. Da es sich bei den im WEM verwendeten Schalenelementen um Elemente mit linearer Ansatzfunktion zwischen den Knoten handelt, müssen auch in dem fein vernetzten Modell alle Lasten linear zwischen den belasteten Knoten verteilt werden, um am Rand dieselben linearen Verformungen hervorzurufen. Eine Möglichkeit, dies zu

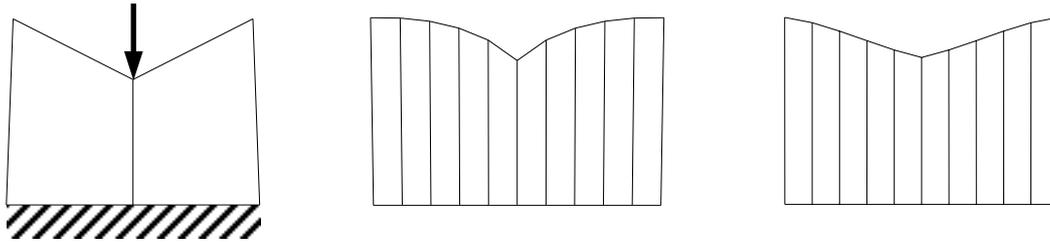


Abb. 8.9 Effekt der Coupling-Elemente bei einfachem Beispiel: Verformte Lage und Randbedingungen bei grober Vernetzung (links), verformte Lage bei feinerer Vernetzung (mittig) und verformte Lage bei feiner Vernetzung und Verteilung der Last mittels Coupling-Elementen (rechts)

realisieren, ist die Verwendung sogenannter Coupling-Elemente [37], deren Effekt in Abb. 8.9 demonstriert wird.

Um einen wirklich ungestörten Spannungszustand zu betrachten und eventuelle Störungen trotz der Verwendung der verteilten Coupling-Randbedingungen auszuschließen, werden für die Festigkeitsnebenbedingung die zwei äußeren Elementreihen des Strut-Bereiches nicht betrachtet (Abb. 8.10d). Alle Änderungen am Modell, die während des Optimierungsprozesses vorgenommen werden, betreffen diese Randelemente jedoch in gleicher Weise wie alle anderen Elemente.

Der ursprünglich freigeschnittene Strut-Bereich (Abb. 8.7 bzw. Abb. 8.8 links) befindet sich bei Antragung aller Schnittlasten in einem Gleichgewichtszustand (bei Vernachlässigung eventueller numerischer Ungenauigkeiten). Da jedoch einige Änderungen am Modell vorgenommen werden (feinere Vernetzung, Einführung der Coupling-Elemente), geht der Gleichgewichtszustand verloren. Um daraus resultierende Starrkörperbewegungen der Struktur auszugleichen bzw. zu verhindern, wird das Strut-Modell an weichen Federn an den Lasteinleitungsknoten aufgehängt (Abb. 8.10b).

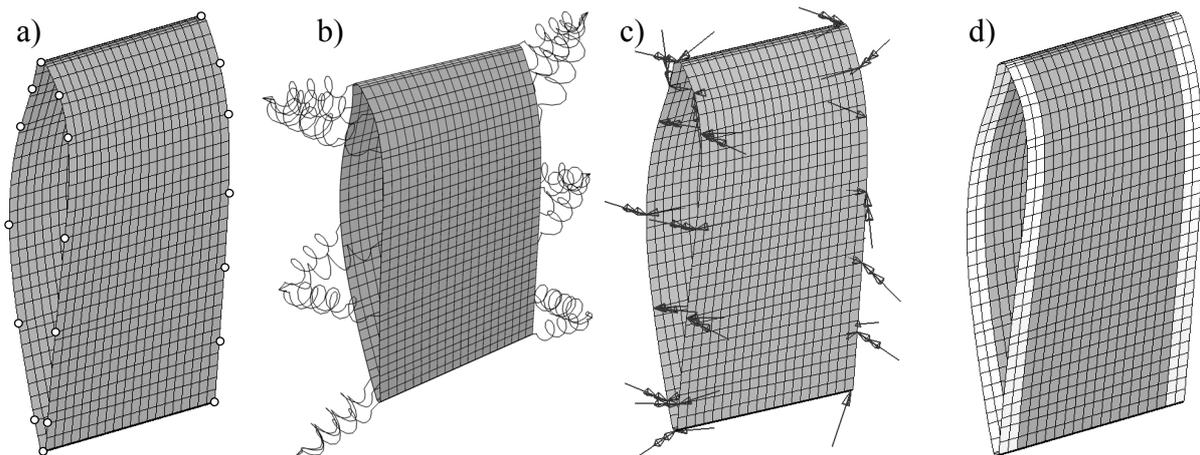


Abb. 8.10 Lasteinleitungsknoten (a), Lagerung durch weiche Federn (b), Modell mit aufgebrauchten Lasten eines Lastfalls (c) und von Festigkeitsnebenbedingung ausgeschlossene Elemente (helle Elemente in d)

Ziel der Optimierung ist, die Faserorientierungen und Schichtdicken des Strut-Bereiches so einzustellen, dass der Strut bei minimalem Gewicht Festigkeitsnebenbedingungen erfüllt. Um

eine spätere Fertigung möglichst einfach zu halten, wird der gesamte Strut-Bereich aus demselben Laminat aufgebaut, d.h. Faserwinkel und Schichtdicken sind überall gleich. Somit kann als Zielfunktion statt des Gesamtvolumens auch die Laminatdicke als eine dem Volumen direkt proportionale Größe gewählt werden.

Als Nebenbedingung wird nur eine Festigkeitsnebenbedingung definiert. Hierfür kommt das in Abschnitt 6.2.4.2 vorgestellte LaRC04-Kriterium zum Einsatz, wobei der berechnete Fehlerindex dieses Bruchkriteriums für jeden Integrationspunkt des Modells kleiner als 0,8 sein soll (zur Integration des Bruchkriteriums in den Optimierungsprozess siehe [101]). Die Spannungen werden dabei an jedem Integrationspunkt in der Mitte und an den Rändern einer jeden Schicht berechnet. Wie in [112] gezeigt wird, hat die Wahl des Bruchkriteriums, welches als Nebenbedingung verwendet wird, durchaus einen Einfluss auf das Optimierungsergebnis, was jedoch nicht überrascht.

Designvariablen sind die Faserorientierungen und Schichtdicken. Die Faserorientierung darf dabei kontinuierlich zwischen -90° und $+90^\circ$ variieren. Auch für die Schichtdicken ist theoretisch eine kontinuierliche Variation derselben denkbar. In der Praxis verwendete Gelege haben jedoch standardisierte Dicken, wodurch ein Optimierungsergebnis mit Schichtdicken, die möglicherweise von keinem Hersteller angeboten werden, relativ nutzlos ist. Daher bietet es sich an, für die Schichtdicken diskrete Werte zu definieren, zwischen denen der Optimierungsalgorithmus „wählen“ kann. In diesem Falle werden für die Schichtdicken $1,0e-5 \text{ mm}$, $0,128 \text{ mm}$, $0,201 \text{ mm}$, $0,257 \text{ mm}$, $0,34 \text{ mm}$ und $0,674 \text{ mm}$ vorgegeben, wobei die Schichtdicke $1,0e-5 \text{ mm}$ keiner realen Gelegedicke entspricht, sondern dem Optimierungsalgorithmus durch die Wahl dieser Schichtdicke mit vernachlässigbarer Steifigkeit die Möglichkeit gibt, die Anzahl der Schichten zu reduzieren.

Als Material für den Strut-Bereich wird kohlefaserverstärkter Kunststoff (CFK) verwendet, dessen Materialparameter in Tabelle 8.4 zu finden sind. Als Ausgangslaminat wird ein achtschichtiger, symmetrischer, quasiisotroper Laminataufbau definiert $[0^\circ, 90^\circ + 45^\circ, -45^\circ]_{\text{sym}}$, wo-

Tabelle 8.4 Materialparameter einer unidirektionalen CFK-Schicht nach [96] und [138]

Faser: Torayca T300, Matrix: Hexcel 913 (60% Faservolumenanteil)		
Basisfestigkeiten in $[N/mm^2]$:	$R_{\parallel}^c = 1023$	$R_{\perp}^c = 199$
	$R_{\parallel}^t = 1769$	$R_{\perp}^t = 51,2$
		$R_{\perp\parallel} = 91$
Elastizitätskenngrößen in $[N/mm^2]$ bzw. [-]:	$E_{11} = 111095$	$\nu_{12} = 0,3155$
	$E_{22} = 8956$	$\nu_{23} = 0,4$
	$E_{33} = 8956$	$\nu_{13} = 0,3155$
	$G_{12} = 3905$	
	$G_{23} = 3123$	
	$G_{13} = 3905$	
Kritische Energiefreisetzungsraten in $[kJ/m^2]$:	$G_{Ic} = 0,258$	$G_{IIc} = 1,08$

bei die Faserorientierungen entsprechend Abb. 8.8 (rechts) zu verstehen sind und die 0°-Grad-Richtung parallel zu den Scheitelgeraden des Struts verläuft. Die Ausgangsdicke jeder Schicht beträgt 0,674 mm.

Die Nutzung von diskreten Designvariablen für die Schichtdicken schränkt die Anzahl der anwendbaren Optimierungsalgorithmen stark ein. Daher wird für diese gemischt-diskrete Optimierung zunächst der ARSM-Algorithmus genutzt. Dieses Verfahren konvergiert nach 41 Iterationen, jedoch in einem nicht zulässigen Design, da für mehrere Lastfälle die Festigkeitsnebenbedingung verletzt wird. Das hinsichtlich der Zielfunktion beste Ergebnis, welches die Randbedingungen annähernd einhält, ist bereits in der 21. Iteration erreicht. Tabelle 8.5 zeigt die zugehörigen Faserorientierungswinkel und Schichtdicken dieses ersten Optimierungsschrittes, wobei die Orientierungswinkel identisch mit den Startorientierungswinkeln sind und vom Algorithmus erst in den späteren Iterationsschritten verändert werden. Der Wert des Bruchkriteriums beträgt im 21. Iterationsschritt für den Lastfall, in dem es maximal wird, 0,8022 und verletzt damit eine Nebenbedingung geringfügig.

Um das Ergebnis in Hinsicht auf die Festigkeit des Bauteils zu verbessern, wird ausgehend von den in Tabelle 8.5 nach dem ersten Optimierungsschritt gefundenen Parametern ein weiterer Optimierungsschritt durchgeführt, bei dem lediglich die Faserorientierungen als Designparameter verwendet werden. Die Schichtdicken behalten die in Tabelle 8.5 angegebenen Werte. Ziel des zweiten Optimierungsschrittes, für den ein SQP- und ein MFD-Verfahren zur Anwendung kommen, ist die Minimierung des Maximalwertes des Bruchkriteriums aller Lastfälle. Dabei zeigt sich, dass das SQP-Verfahren mit der Reduktion des maximalen Bruchkriteriumswertes von 0,8022 auf 0,8020 nur eine äußerst geringe Verbesserung der Zielfunktion erzielt. Ein deutlich besseres Ergebnis kann hingegen mit dem MFD-Verfahren erreicht werden. Hierbei wird der Maximalwert des Bruchkriteriums innerhalb von 9 Iterationen auf 0,5955 verkleinert. Tabelle 8.5 zeigt die mittels MFD-Verfahren optimierten Faserorientierungen.

Tabelle 8.5 Ergebnisse der Optimierung der ungestörten Region

Schicht	Ergebnisse des 1. Optimierungsschrittes mit ARSM-Algorithmus		Ergebnisse des 2. Optimierungsschrittes mit MFD-Algorithmus
	Orientierungswinkel in Grad	Schichtdicke in mm	Orientierungswinkel in Grad
1	0	0,201	-3,972
2	90	0,674	87,26
3	+45	0,257	44,56
4	-45	0,674	-54,90
5	-45	0,674	-47,81
6	+45	0,674	47,78
7	90	0,34	90,0
8	0	0,257	-17,99

Mit den optimierten Materialparametern werden abschließend Beulrechnungen durchgeführt, um sicher zu gehen, dass es nicht zu gefährlichen Instabilitäten kommt. Hierfür kann jedoch nicht das bisher genutzte, an Federn aufgehängte Strut-Modell verwendet werden, da hier die mechanischen Randbedingungen nicht den wirklichen Randbedingungen des eingebauten Struts entsprechen. Eine Beulrechnung mit dem kompletten IMC wäre aber nur sinnvoll, wenn alle Bereiche, die später aus faserverstärktem Kunststoff gefertigt werden sollen entsprechend modelliert werden, wofür der Aufwand sehr hoch wäre. Daher werden die wirklichen Randbedingungen durch folgende Näherungen abgebildet: Jeweils eine Seite des Struts (Bereich, an dem die Lasten angreifen, Abb. 8.10c) wird so gelagert, dass an allen Randknoten die Verschiebungsfreiheitsgrade zu null gesetzt wurden. An der freien Strut-Seite greifen weiterhin die bereits aufgebrauchten Lasten der 20 Lastfälle an. Alle Federn werden entfernt. Durch wechselseitiges Austauschen von Lager- und Lastseite erhält man insgesamt 40 Beullastfälle, deren Eigenwerte mit wenig Aufwand auch als Nebenbedingung in einer Optimierung genutzt werden könnten. Alle auf diese Weise berechneten positiven Beuleigenwerte liegen weit über dem kritischen Wert von eins, bei dem es zu einem Ausbeulen der Struktur unter der gegebenen Last kommen würde.

Um das erzielte Optimierungsergebnis des Strut-Bereiches mit dem Werkstoff CFK einordnen zu können, wird dieselbe Optimierung mit gleichem Modell und gleichen Lasten zusätzlich mit einer Titanlegierung ($E\text{-Modul} = 110600 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0,32$, $R_{p0,2} = 736 \text{ MPa}$, $\rho = 4429 \text{ kg/m}^3$) durchgeführt, welche bisher für den Strut verwendet wird. Um eine vergleichbare Festigkeitsnebenbedingung zu verwenden, soll die maximale von Mises-Spannung im Titan-Modell das 0,6-Fache der 0,2%-Dehngrenze des Materials nicht überschreiten, da im optimierten Faser-Verbund-Strut die maximale Anstrengung ebenfalls etwa 60% beträgt. Zielfunktion für die Optimierung ist die Minimierung der Strut-Masse, einzige Designvariable die Blechdicke des Struts, für welche der MFD-Optimierungsalgorithmus einen minimalen Wert von $2,434 \text{ mm}$ berechnet. Geht man von einer Dichte des CFK's von etwa 1500 kg/m^3 aus, so ergibt sich für das Verhältnis der Gesamtmassen von CFK-Strut zu Titan-Strut ein Wert von 0,52. Somit wäre der CFK-Strut bei vergleichbarer Materialauslastung nur etwa halb so schwer wie der Titan-Strut.

8.4.1 Probabilistische Betrachtungen

Das Ergebnis einer Optimierung sollte auch immer unter probabilistischen Gesichtspunkten hinsichtlich seiner Robustheit bewertet werden [174]. Oftmals sind Werte von Designvariablen und anderen Modelleingangsgrößen, wie z.B. Lasten oder Geometrie, unsicher oder unterliegen statistischen Schwankungen. Derartige Schwankungen können beispielsweise durch Ungenauigkeiten während des Produktionsprozesses zu Stande kommen und beeinflussen schließlich auch die Zielfunktion und die Nebenbedingungen. Befindet sich ein Optimum bildlich gesprochen beispielsweise in einem schmalen Tal mit steil ansteigenden Flanken, so bedingt eine leichte Veränderung der Designvariablen unter Umständen einen starken Anstieg des Zielfunktionswertes. Günstiger wäre daher ein Optimum, in dessen Umgebung es keine steil ansteigenden „Wände“ gibt. Ähnliches gilt für Nebenbedingungen einer Optimierung.

Oftmals befindet sich ein Optimum gerade am Rand des zulässigen Bereiches. Ändert sich der Zielfunktionswert nun aufgrund einer Variation der Designvariablen, so werden möglicherweise Nebenbedingungen verletzt. Es wäre daher weiterhin wünschenswert, wenn als Optimierungsergebnis ein Parametersatz gefunden wird, der auch bei gewissen Parametervariationen alle Nebenbedingungen erfüllt oder diese zumindest mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit einhält.

Für die hier optimierten Materialparameter der Faser-Kunststoff-Verbunde ist die Zielfunktion nur von einem Teil der Designvariablen, den Schichtdicken, linear abhängig, womit sofort eine Aussage über die Robustheit des Optimums hinsichtlich der Zielfunktion möglich ist. Die Festigkeitsnebenbedingung jedoch ist neben den Schichtdicken u.a. auch von den Faserorientierungen abhängig. Um einen Eindruck vom Grad der Nichtlinearität der Abhängigkeit der Festigkeitsnebenbedingung (also des Bruchkriteriums) von den Materialparametern zu bekommen, wird eine DoE-Analyse durchgeführt. Dazu werden in insgesamt 144 Rechnungen alle Schichtdicken und Faserorientierungen ausgehend vom Optimierungsergebnis des zweiten Optimierungsschrittes in Tabelle 8.5 zufällig variiert und bei jeder Rechnung der Maximalwert des Bruchkriteriums ausgewertet. Die Variation der Faserorientierungen beträgt $\pm 2,5^\circ$, die der Schichtdicken $\pm 3\%$ um den optimierten Wert. Die zufällige Verteilung dieser Parameter wurde mittels Latin Hypercube-Sampling ([120], [32]) bestimmt.

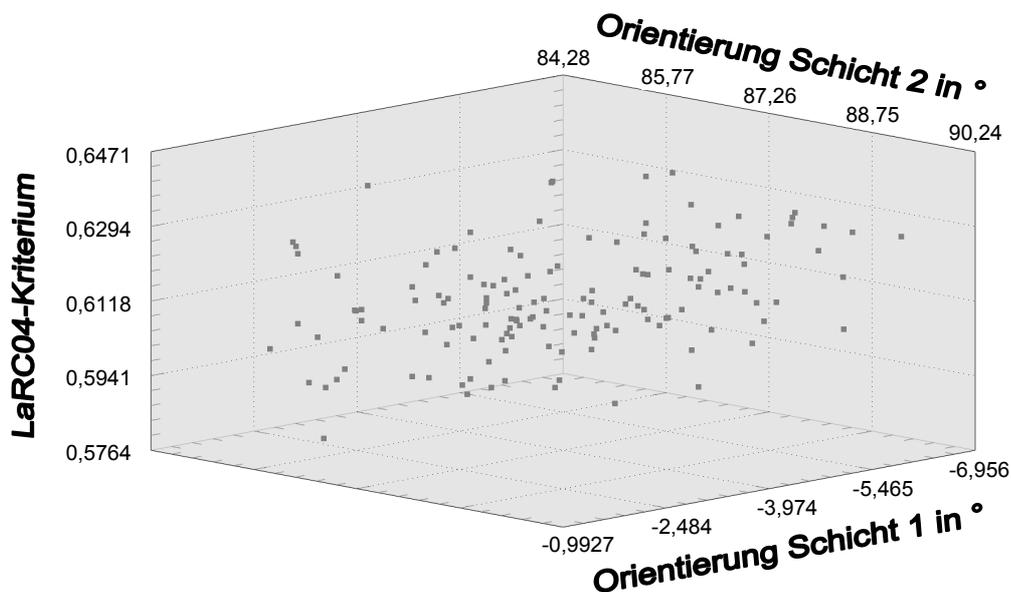


Abb. 8.11 Verhalten des maximalen Wertes des LaRC04-Bruchkriteriums über alle Lastfälle bei Variation aller Schichtdicken und Faserorientierungen

Abb. 8.11 zeigt die Veränderung des Maximalwertes des LaRC04-Kriteriums über alle Lastfälle bei Variation aller Faserorientierungen und Schichtdicken. In der Darstellung ist nicht nur die Abhängigkeit des Bruchkriteriums von den Orientierungen der ersten und zweiten Schicht enthalten, sondern die Abhängigkeit von allen variierten Parametern, da beispielsweise bei Variation der Faserorientierung von Schicht 1 auch alle anderen Modellparameter gleichzeitig verändert werden. Der Wert des Bruchkriteriums steigt maximal um etwa 7% an

bzw. sinkt um etwa 2,5% gegenüber dem Wert des Bruchkriteriums für die optimierten Designvariablen.

Die hier durchgeführten 144 Rechnungen sind natürlich für statistisch hinreichend gesicherte probabilistische Aussagen nicht ausreichend, vermitteln jedoch zumindest einen Eindruck von der Problematik der Robustheit der Lösung. Um bereits während des Optimierungsprozesses eine robuste Lösung sicherzustellen, existieren eine Reihe von Verfahren, die überblicksweise z.B. in [170] beschrieben sind. Konventionelle zuverlässigkeitsbasierte Optimierungsverfahren beruhen dabei auf der sogenannten Zwei-Schleifen-Technik. Hierbei wird durch die äußere Optimierungsschleife in jeder Iteration eine Zuverlässigkeitsanalyse aufgerufen, die die Werte für die Robustheitsnebenbedingungen in der inneren Optimierungsschleife liefert. Ein derartiges Verfahren kann natürlich insbesondere bei sehr hohen geforderten Zuverlässigkeiten und vielen unsicheren Designvariablen numerisch sehr kostspielig sein. Daher wurden Methoden, wie zum Beispiel das SORA-Verfahren (Sequential Optimization and Reliability Assessment) entwickelt ([41], [42], [110]), die in erster Linie versuchen, die Zuverlässigkeitsanalyse effizienter zu lösen.

8.5 Optimierung gestörter Bereiche

Unter „gestörten Bereichen“ sollen nun Regionen einer Struktur verstanden werden, die in Abschnitt 8.4 noch ausgeschlossen wurden. Insbesondere geht es dabei um dickwandige Strukturen, bei denen nicht unerhebliche Spannungen in der Dickenrichtung auftreten, weshalb eine Modellierung mit Schalenelementen ungeeignet ist. Stattdessen werden für die FE-Modellierung, auf die später noch genauer eingegangen wird, Volumenelemente verwendet. Gegenstand der Optimierung ist zunächst eine Flanschverbindung zwischen zwei Komponenten eines Flugtriebwerkes, dem schon behandelten Zwischengehäuse (IMC) und der Nebenstromkanalabdeckung (BPD), welche am äußersten Rand des Zwischengehäuses über den gesamten Umfang mittels 181 Bolzen verbunden sind (Abb. 8.12). Beide Komponenten, wie auch die derzeitige Flanschverbindung, sind aus Titan gefertigt und sollen durch einen kohlefaserverstärkten Kunststoff ersetzt werden.

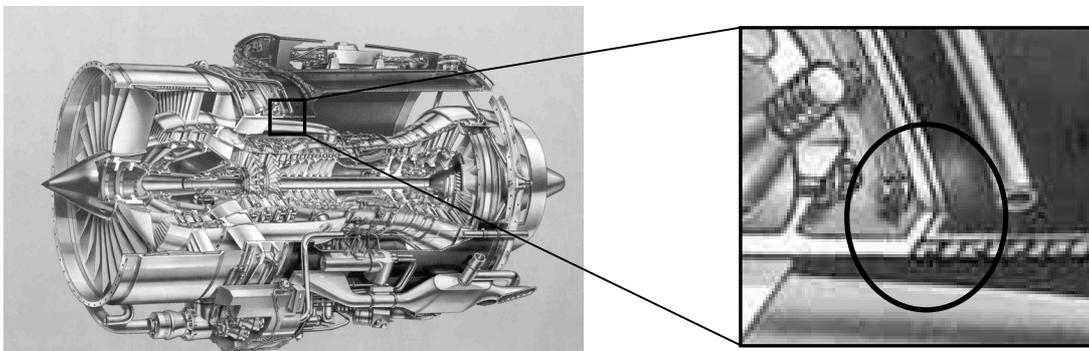


Abb. 8.12 Flanschverbindung zwischen Nebenstromkanalabdeckung und Zwischengehäuse eines Flugtriebwerkes (Abb. mit freundlicher Genehmigung von Rolls-Royce Deutschland)

Die gesamte Flanschverbindung ist zyklisch symmetrisch und besteht aus 181 Sektoren. Abb. 8.13 (links) zeigt ein CAD-Modell eines Sektors. Besonders im Bereich der Flanschkrümmung ist bei Belastung der Verbindung mit räumlichen Spannungszuständen zu rechnen. Auch im Bereich der Bolzenverbindung treten derartige Spannungszustände auf. Obwohl eine Modellierung der Struktur mit Hilfe von Schalenelementen damit fehlerbehaftet ist, wird trotzdem für die Optimierung der Faserorientierungen und Schichtdicken zunächst ein solches vereinfachtes Schalenmodell verwendet. Dies hat im wesentlichen zwei Gründe. Zum Einen wäre die Rechenzeit bei einem Volumenmodell wegen der wesentlich höheren Anzahl der Modellfreiheitsgrade bei adäquater Modellierung sehr hoch, zum Anderen ist die Veränderung der Schichtdicken bei einem Volumenmodell nicht ohne Weiteres möglich, da diese Größe im Gegensatz zu einem Schalenmodell kein direkter Parameter des Modells ist. Eine weitere Maßnahme, um die Rechenzeit in einem angemessenen Rahmen zu halten, ist die Verwendung eines Sektormodells des Flansches. Auch hierbei wird ein gewisser Fehler gemacht, da zwar die gesamte Flanschgeometrie zyklisch symmetrisch aufgebaut ist, die Lasten aber keinerlei Symmetrien unterliegen.

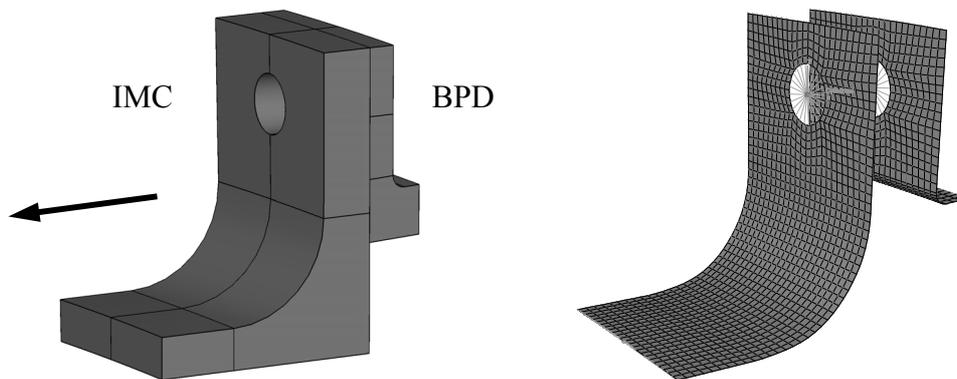


Abb. 8.13 Sektormodell der Flanschverbindung mit Angabe der Flugrichtung (links) und Schalenmodell für Optimierung (rechts)

Abb. 8.13 (rechts) zeigt das für die Optimierung genutzte Schalenmodell. Das Modell beinhaltet sowohl eine Kontaktformulierung zwischen den beiden Bauteilen, welche die Schalendicke und Reibung (Reibkoeffizient $\mu = 0,256$) berücksichtigt, als auch die Modellierung der Bolzenverbindung mit Hilfe eines Verbindungselementes und Kopplungsnebenbedingungen, auf die im Folgenden genauer eingegangen wird.

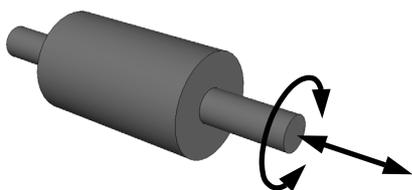


Abb. 8.14 Schematische Darstellung der Freiheitsgrade des Verbindungselementes

Zur Modellierung der erwähnten Bolzenverbindung wird ein zylindrisches Verbindungselement genutzt, welches nur eine translatorische Bewegung entlang seiner Längsachse sowie eine rotatorische Bewegung um dieselbe erlaubt (Abb. 8.14). Für diese beiden Freiheitsgrade müssen Federsteifigkeiten definiert werden, wobei hier für den rotatorischen Freiheitsgrad eine Steifigkeit von null angenommen wird. Zusätzlich ist eine Referenzlänge l_{ref} für das Element anzugeben, bei der die Dehnung in Längsrichtung gleich null ist. Ändern sich während der Optimierung die Schichtdicken der Bauteile, so müssen

sowohl die Referenzlänge des Elementes als auch die Federsteifigkeit in Längsrichtung angepasst werden. Die Federsteifigkeit k des Verbindungselementes ist als Faktor definiert, der die Längenänderung Δl des Elementes und die daraus resultierende Kraft F miteinander verbindet ($F = k \cdot \Delta l$). Eine Besonderheit dieser Bolzenverbindung ist die Verwendung einer Abstandshülse (Abb. 8.15), deren Steifigkeit in die Berechnung der Gesamtsteifigkeit der Bolzenverbindung mit einbezogen werden muss.

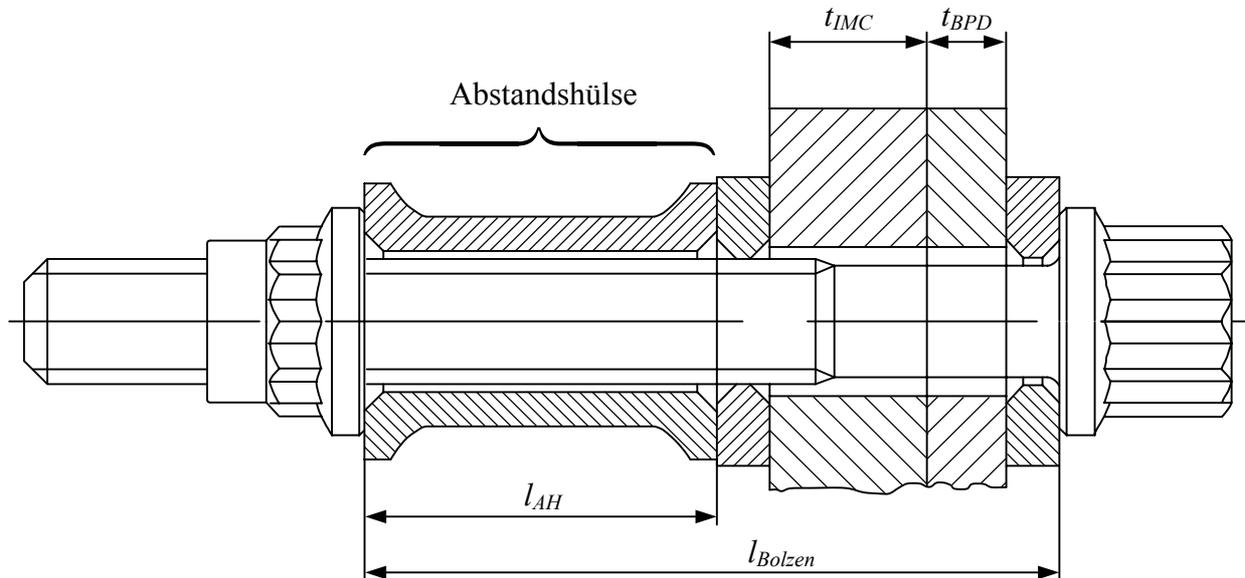


Abb. 8.15 Darstellung der gesamten Bolzenverbindung inklusive Abstandshülse (Prinzipiskizze)

Die Steifigkeit k eines Zug-/Druckstabes lässt sich mit Hilfe des Stabquerschnittes A , des E-Moduls des verwendeten Materials und der Länge des Stabes angeben:

$$k = \frac{E \cdot A}{l} \quad (8.1)$$

Die Steifigkeit der Abstandshülse k_{AH} ist konstant und kann durch Einsetzen der Länge l_{AH} des Abstandshalters in Gleichung (8.1) mit Hilfe eines angenommenen mittleren Querschnittes A_{AH} des Abstandshalters berechnet werden:

$$k_{AH} = \frac{E \cdot A_{AH}}{l_{AH}} \quad (8.2)$$

Die Länge des Bolzens l_{Bolzen} hingegen ist nicht konstant, sondern hängt von der Summe aller Schichtdicken auf der Seite des Zwischengehäuses (IMC) und der Nebenstromkanalabdeckung (BPD) $t_{IMC} + t_{BPD}$ ab:

$$k_{Bolzen} = \frac{E \cdot A_{Bolzen}}{t_{IMC} + t_{BPD} + l_{AH}} \quad (8.3)$$

Das Material und damit der E-Modul für Bolzen und Abstandshalter ist gleich. Steifigkeit und Länge der Unterlegscheiben sowie die Steifigkeit der CFK-Komponenten werden im Schalenmodell für die Optimierung nicht betrachtet, womit die Gesamtverbindung von Abstands-

hülse und Bolzen als Reihenschaltung zweier Federn betrachtet werden kann und man für die Gesamtsteifigkeit

$$\begin{aligned}
 k_{gesamt} &= \frac{k_{Bolzen} \cdot k_{AH}}{k_{Bolzen} + k_{AH}} = \frac{\frac{E \cdot A_{Bolzen}}{t_{IMC} + t_{BPD} + l_{AH}} \cdot \frac{E \cdot A_{AH}}{l_{AH}}}{\frac{E \cdot A_{Bolzen}}{t_{IMC} + t_{BPD} + l_{AH}} + \frac{E \cdot A_{AH}}{l_{AH}}} \\
 &= \frac{E \cdot A_{Bolzen} \cdot A_{AH}}{l_{AH} \cdot A_{Bolzen} + A_{AH} (t_{IMC} + t_{BPD} + l_{AH})}
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

erhält.

Mit Hilfe der Referenzlänge des Verbindungselementes kann die Vorspannkraft des Bolzens, die durch das Anziehen der Bolzenverbindung mit einem bestimmten Drehmoment entsteht, abgebildet werden. Die Vorspannkraft $F_{Vorspann}$, welche bekannt ist, kann durch die Gesamtsteifigkeit der Verbindung k_{gesamt} und die Änderung der Länge Δl des Verbindungselementes gegenüber der dehnungsfreien Länge ausgedrückt werden:

$$F_{Vorspann} = k_{gesamt} \cdot \Delta l. \tag{8.5}$$

Bedenkt man, dass im Schalenmodell das Verbindungselement jeweils auf der Schalenreferenzfläche (hier der Mittelfläche) endet und nicht bis an die Flanschaußenflächen reicht (siehe auch Abb. 8.16, links), so erhält man für die Referenzlänge den Ausdruck

$$l_{ref} = \frac{t_{IMC} + t_{BPD}}{2} - \Delta l = \frac{t_{IMC} + t_{BPD}}{2} - \frac{F_{Vorspann}}{k_{gesamt}}. \tag{8.6}$$

Auf diese Weise ist es möglich, die Vorspannkraft des Bolzens durch die Angabe einer entsprechenden Referenzlänge des Verbindungselementes, welche geringer ist als die geometrische Länge des Verbindungselementes, abzubilden. Sowohl die Referenzlänge als auch die Steifigkeit des Bolzens (k_{Bolzen} bzw. k_{gesamt}) müssen in jedem Iterationsschritt des Optimierungsprozesses neu berechnet werden. Die Übertragung der Lasten vom Bolzen auf den Flansch und umgekehrt erfolgt über Kopplungsnebenbedingungen, dargestellt durch die radial verlaufende Linien in Abb. 8.13 (rechts).

Die Bestimmung der Kräfte und Momente, die auf den Freischnitt der Flanschverbindung wirken, erfolgt wieder mit Hilfe des Gesamttriebwerksmodells (WEM), das Schnittlasten zwischen ausgewählten Komponenten des Triebwerks, wie hier zwischen IMC und BPD, liefert. Im vorliegenden Falle werden jedoch nicht die Schnittlasten zwischen zwei Komponenten benötigt, sondern die an den Rändern des Freischnittes wirkenden (Abb. 8.16, rechts). Da diese Lasten aber nicht mit einem vertretbaren Aufwand durch das WEM zur Verfügung gestellt werden können, wird eine andere Strategie angewendet: Die Schnittlasten aus dem WEM, werden an den Rand der einen Flanschkälfte verschoben, während der Rand der anderen Flanschkälfte fest eingespannt wird. In einem zweiten Lastfall wird dann der zuvor eingespannte Rand der einen Flanschkälfte mit den Schnittlasten beaufschlagt und die andere

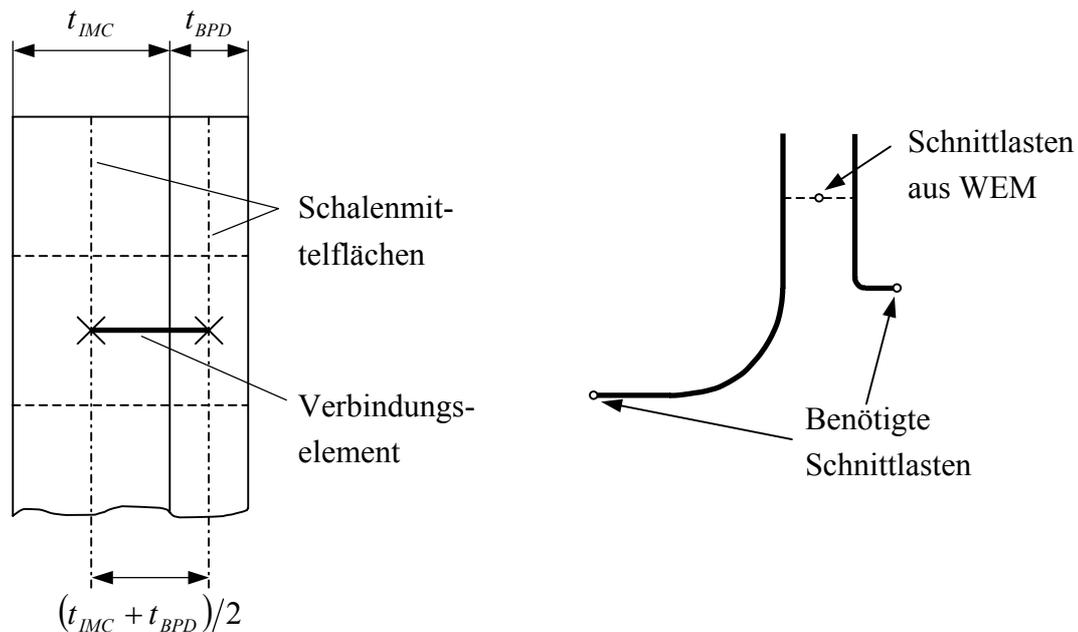


Abb. 8.16 Skizze zur Lage des Verbindungselements (links) und vom WEM gelieferte Schnittlasten und benötigte Schnittlasten (rechts)

Flanshhälfte fest gelagert (Abb. 8.17). Im Folgenden wird beziehend auf Abb. 8.17 vereinfachend $M_1 = M_2$ angenommen. Auf eine Berücksichtigung der zusätzlichen Momente, die durch die Verschiebungen der Kräfte entstehen, wird verzichtet. Die Verteilung der Einzellasten und Momente erfolgt über Kopplungsnebenbedingungen (fett gezeichnete, schwarze Linien in Abb. 8.17). Die vereinbarten Vereinfachungen und Modellierungstechniken stellen natürlich nur eine Näherung der Wirklichkeit dar, sollen aber genügen, um den Auslegungsprozess anhand einer gestörten Region zu zeigen.

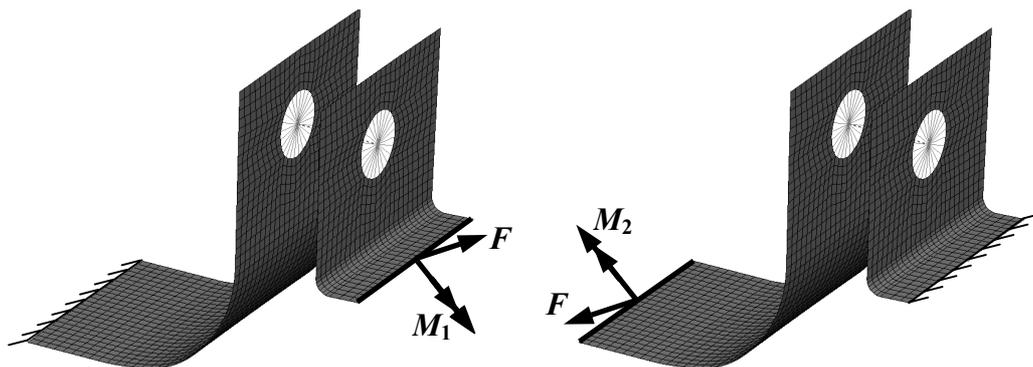


Abb. 8.17 Lasten und Randbedingungen: Links Lastfall 1 (rechte Flanshhälfte belastet und linke Flanshhälfte fest eingespannt) und rechts zugehöriger Lastfall 2 (rechte Flanshhälfte fest eingespannt und linke Flanshhälfte belastet)

Das WEM liefert die Schnittlasten in einem globalen kartesischen Koordinatensystem. Für eine bessere Vergleichbarkeit der Lasten, die zwar in einem Lastfall aber an verschiedenen Punkten entlang des gesamten Flanschumfangs wirken, ist es nützlich, die Lasten in lokale Koordinatensysteme zu transformieren. Das WEM-Netz besitzt 40 Knoten entlang der Umfangsrichtung des Flansches. Dies bedeutet, dass das lokale Koordinatensystem für jeden

Knoten um $360^\circ/40 = 9^\circ$ gegenüber dem lokalen Koordinatensystem des vorangegangenen Knotens gedreht werden muss (Koordinatensystem für Knoten 2 wird um 9° gedreht, das Koordinatensystem für Knoten 3 um 18° usw., siehe Abb. 8.18). Die Transformation der Lasten f aus dem globalen Koordinatensystem in die Lasten f' der lokalen Koordinatensysteme geschieht durch die Multiplikation des Lastvektors f mit der Drehmatrix S entsprechend

$$f' = S \cdot f, \quad (8.7)$$

wobei die Drehmatrix folgendes Aussehen besitzt:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (8.8)$$

Hierbei ist α der Rotationswinkel des jeweiligen lokalen Koordinatensystems ($\alpha = 0^\circ$ für System 1, $\alpha = 9^\circ$ für System 2, $\alpha = 18^\circ$ für System 3 usw.).

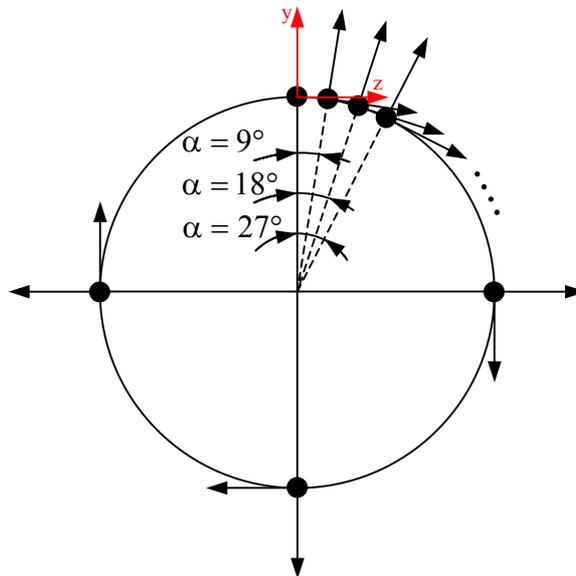


Abb. 8.18 Rotation der lokalen Koordinatensysteme (schwarz) gegenüber dem globalen Koordinatensystem (rot)

Nach erfolgreicher Transformation sind nun alle Knotenschnittlasten aus dem WEM für alle Lastfälle leicht vergleichbar und es können insgesamt sechs Lastfälle ausgewählt werden, die für den jeweiligen Flanschbereich die größte Belastung bedeuten. Da diese Lasten, wie bereits erläutert, auf die eine Seite des Flansches angetragen werden, während die andere fest eingespannt ist und umgekehrt, ergeben sich schließlich 12 Lastfälle.

Als Designvariablen für diese Optimierung werden, wie schon bei den ungestörten Bereichen, die Faserorientierungen, welche kontinuierlich variieren dürfen, und die Schichtdicken, bei denen nur die diskreten Werte $0,128 \text{ mm}$, $0,201 \text{ mm}$, $0,257 \text{ mm}$, $0,34 \text{ mm}$ und $0,674 \text{ mm}$ zulässig sein sollen, verwendet. Bei einem zwölfschichtigen Laminataufbau bei beiden Flanschhälften ergeben sich so insgesamt 48 Designvariablen.

Für eine derartige Optimierung mit kontinuierlichen und diskreten Variablen ist von den zur Verfügung stehenden Optimierungsalgorithmen (MFD, SQP, ARSM) nur die ARSM-

Methode einsetzbar. Bei diesem Verfahren ist allerdings bei einer diskreten Optimierung die Anzahl n der Designvariablen bzw. die Anzahl k der jeweils möglichen Werte aufgrund der 32-Bit-Architektur der Software limitiert und es muss $n^k \leq 2^{31} - 1$ gelten. Bei $k=5$ möglichen Werten der diskreten Designvariablen und $n=24$ diskreten Designvariablen (zwei Bauteile mit jeweils 12 Schichtdicken) wäre diese Bedingung verletzt. Daher wird für den Optimierungslauf mit dem ARSM-Algorithmus die Anzahl der zulässigen diskreten Werte von fünf auf zwei reduziert, d.h. nur noch die Schichtdicken $0,674 \text{ mm}$ und $0,34 \text{ mm}$ sind zulässig.

Ziel der Optimierung ist eine Struktur mit möglichst geringer Masse. Der Einfachheit halber wird daher als Zielfunktion zunächst wieder die Summe der Schichtdicken beider Flanschhälften definiert.

Als Festigkeitsnebenbedingung kommt das Puck'sche Bruchkriterium (Abschnitt 6.2.4.1) zum Einsatz, welches in keinem der Lastfälle einen Wert von $0,8$ überschreiten soll. Hierbei wird auf die Vereinfachungen für den ebenen Spannungszustand und die Parameterkopplung aus Gleichung (D.8) zurückgegriffen. Aus der daraus resultierenden Möglichkeit, den potentiellen Bruchwinkel analytisch zu bestimmen, ergibt sich eine erhebliche Rechenzeiterparnis. Dies ist hier insbesondere wichtig, da die Rechenzeit des FEM-Modells aufgrund der nichtlinearen Kontaktberechnung ohnehin erhöht ist.

Als Material für die Flanschverbindung kommt wieder kohlefaserverstärkter Kunststoff zum Einsatz, dessen Materialparameter Tabelle 8.4 entnommen werden können. Die für die Anwendung des Puck'schen Bruchkriteriums benötigten Anstiegsparameter der Bruchkurve werden aufgrund fehlender experimenteller Daten entsprechend den Empfehlungen in [98] gewählt und sind in Tabelle 8.6 angegeben. Auch für die Parameter zur Berechnung des Abschwächungsfaktors der Wirkebenenbruchwiderstände aufgrund faserparalleler Spannungen wird den Empfehlungen in [98] gefolgt und $m=s=0,5$ gewählt.

Tabelle 8.6 Gewählte Anstiegsparameter der Bruchkurve des Puck'schen Bruchkriteriums

$p'_{\perp\parallel}$	$p^c_{\perp\parallel}$	$p'_{\parallel\perp}$	$p^c_{\parallel\perp}$
0,35	0,3	0,25	0,3 bzw. nach Gl. (6.43)

Für das Ausgangslaminat werden für beide Flanschhälften dieselben Faserorientierungen definiert (Tabelle 8.7, links), wobei alle Schichtdicken $0,674 \text{ mm}$ betragen. Die angegebenen Faserorientierungen beziehen sich dabei für die BPD-Seite bei Blickrichtung in Flugrichtung (vgl. Abb. 8.13) als Abweichung in Uhrzeigerichtung der Faserorientierung von einer gedachten, radial auf die Flanschverbindung projizierten Linie, welche die Triebwerkslängsachse darstellt. Für die IMC-Seite gilt dieselbe Aussage bei Blickrichtung entgegen der Flugrichtung. Die Schichtnummerierung erfolgt aufsteigend vom Triebwerksinneren nach außen.

Eine statische Rechnung mit diesem Laminataufbau ergibt Anstrengungswerte, deren Maximalwert mit etwa $0,9$ leicht über dem zulässigen Wert von $0,8$ liegt. Der Start des ARSM-Algorithmus aus diesem unzulässigen Bereich heraus, bringt keine Verbesserung des Laminataufbaus hinsichtlich der Zielfunktion und auch die Festigkeitsnebenbedingung wird weiter verletzt. Daher wird zunächst eine Optimierung aller 24 Faserorientierungen mit unveränderten Schichtdicken mittels eines MFD-Algorithmus durchgeführt, wobei die Zielfunk-

Tabelle 8.7 Ausgangsfaserorientierungen für Gewichtsminimierung der gestörten Region und Faserorientierungen nach Minimierung der maximalen Anstrengungswerte mittels MFD-Algorithmus

Schicht	Faserorientierungswinkel in Grad vor der Optimierung		Faserorientierungswinkel in Grad nach Minimierung der Anstrengungswerte mit MFD-Algorithmus	
	Flanschkante „BPD“	Flanschkante „IMC“	Flanschkante „BPD“	Flanschkante „IMC“
1	0	0	-0,37	-10,31
2	90	90	+89,75	90,0
3	+45	+45	+45,18	+40,78
4	-45	-45	-45,0	-45,04
5	+60	+60	+60,05	+59,59
6	-60	-60	-60,0	-60,01
7	-60	-60	-60,02	-61,71
8	+60	+60	+60,06	+62,89
9	-45	-45	-44,97	-50,83
10	+45	+45	+44,85	+42,41
11	90	90	+89,6	90,0
12	0	0	-0,35	-26,18

tion die Minimierung des maximalen Anstrengungswertes über alle Lastfälle ist. Durch diese Optimierung kann der maximale Anstrengungswert auf 0,58 reduziert werden. Tabelle 8.7 (rechts) zeigt die zugehörigen gefundenen Faserorientierungen, welche als Startdesign für die anschließende Optimierung mit einem ARSM-Algorithmus mit dem Ziel der Volumenminimierung unter Einhaltung der Festigkeitsnebenbedingungen (Anstrengungswerte $< 0,8$) dienen. Für die weitere Optimierung der Bauteile erweist sich folgendes dreistufiges Vorgehen als vorteilhaft:

1. Minimierung des Volumens mittels ARSM-Algorithmus, wobei zunächst nur die Schichtdicken als Designvariablen zugelassen werden und die Faserorientierungen unverändert bleiben (Nebenbedingung: max. Anstrengungswert des Bruchkriteriums $< 0,8$)
2. Zuweisung der optimierten Schichtdicken und Minimierung des maximalen Anstrengungswertes des Bruchkriteriums mittels MFD-Algorithmus, wobei nur die Faserorientierungen als Designvariablen zugelassen werden (Nebenbedingung: keine)
3. Zuweisung der optimierten Faserorientierungen.

Das beschriebene Vorgehen kann nun solange wiederholt werden, bis die Änderung der Zielfunktion hinreichend klein ist. Bereits nach einmaligem Durchlauf des Prozesses kann das Gesamtvolumen der Faserverbundanteile der Flanschverbindung um 19% gesenkt werden.

Der maximale Anstrengungswert des Bruchkriteriums beträgt dabei 0,73. Weitere Durchläufe werden aufgrund des zufriedenstellenden Ergebnisses nicht mehr durchgeführt. Tabelle 8.8 zeigt die optimierten Schichtdicken und Faserorientierungen.

Tabelle 8.8 Endergebnis der Optimierung von Faserorientierung und Schichtdicken der Flanschverbindung

Schicht	Flanschkälfte „BPD“		Flanschkälfte „IMC“	
	Orientierungswinkel in Grad	Schichtdicke in <i>mm</i>	Orientierungswinkel in Grad	Schichtdicke in <i>mm</i>
1	-3,34	0,674	-3,82	0,674
2	90,0	0,674	+87,44	0,34
3	+45,79	0,674	+47,24	0,34
4	-44,62	0,34	-50,96	0,34
5	+58,96	0,674	+59,79	0,34
6	-59,51	0,34	-59,51	0,674
7	-59,8	0,34	-61,13	0,674
8	+59,36	0,34	+71,06	0,674
9	-44,53	0,34	-61,11	0,674
10	+46,38	0,674	+37,4	0,674
11	+84,87	0,674	90,0	0,674
12	-4,19	0,674	-27,61	0,674

8.5.1 Überprüfung der Optimierungsergebnisse mit verfeinertem Modell

Um auch dreidimensionale Spannungszustände, etwa im Bereich der Krümmungen oder der Lasteinleitung, adäquat hinsichtlich ihrer Festigkeit beurteilen zu können, ist es notwendig, ein detailliertes Volumenmodell der Struktur zu verwenden, welches auf Näherungen, wie sie z.B. in der Schalentheorie vereinbart werden, verzichtet (Abb. 8.19). Hier sind nun auch die

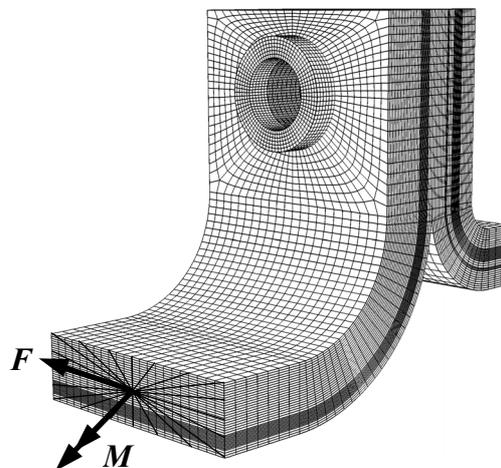


Abb. 8.19 Detailliertes Volumenmodell mit durch Kopplungsnebenbedingungen aufgebrachten Lasten zur Überprüfung des Optimierungsergebnisses hinsichtlich der Festigkeit

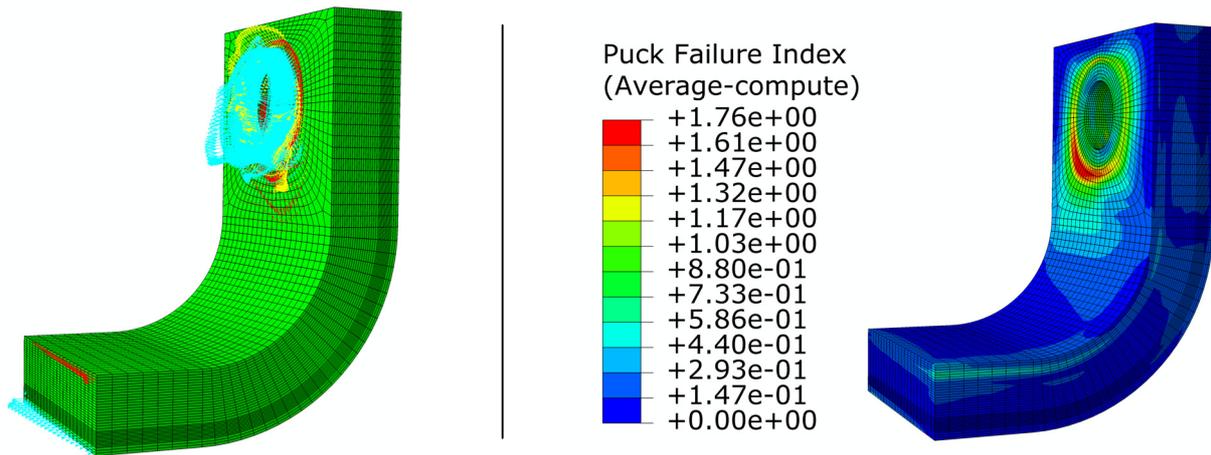


Abb. 8.20 Hauptspannungsrichtungen (links) und Anstrengungswerte des Puck’schen Bruchkriteriums für selben Lastfall

Unterlegscheiben mitmodelliert, welche aus einer isotropen Titanlegierung mit den Elastizitätskenngrößen $E = 110600 \text{ MPa}$ und $\nu = 0,32$ bestehen. Jede Laminat-Schicht wird in Dickenrichtung durch drei Volumenelemente diskretisiert, so dass das detaillierte Modell insgesamt ca. 440000 Freiheitsgrade besitzt. Ähnlich wie beim Schalenmodell werden auch hier die Schnittlasten mittels Kopplungsnebenbedingungen auf die gesamte Schnittfläche verteilt. Zwischen den Flanschhälften und den Unterlegscheiben wird eine Kontaktformulierung verwendet.

In Abb. 8.20 sind Ergebnisse der FE-Rechnungen dargestellt. Auf der linken Seite der Abbildung sind die Hauptspannungen in Betrag und Richtung für einen ausgewählten Lastfall an der Flanschhälfte des Zwischengehäuses zu erkennen, wobei die unterschiedlichen Farben die jeweilige Hauptspannungskoordinate symbolisieren. Es wird sofort deutlich, dass es im Bereich der Unterlegscheibe durch das Aufbringen der Vorspannkraft des Bolzens und die hinzukommende Belastung der Flanschverbindung durch die Schnittlasten zu einem räumlichen Spannungszustand kommt, wobei die Spannungskomponente in Laminatdickenrichtung besonders ausgeprägt ist. Für die Festigkeitsbeurteilung kommt das Bruchkriterium nach Puck mit allen in Abschnitt 6.2.4.1.4 erwähnten Erweiterungen (m+p-Effekte und Berücksichtigung des Einflusses der faserparallelen Spannungen auf das Zwischenfaserbruchverhalten) zum Einsatz. Als Anstiegsparameter für die Bruchkurve werden wieder die in Tabelle 8.6 gegebenen Werte genutzt. Die notwendigen Parameter für die Einbeziehungen der m+p-Effekte sowie der Abschwächung der Wirkebenenbruchwiderstände aufgrund faserparalleler Spannungen werden entsprechend den Empfehlungen in [98] gewählt und können Tabelle 8.9 entnommen werden.

Tabelle 8.9 Parameter für Erweiterungen der Puck’schen Zwischenfaserbruchbedingungen

m	s	$f'_{E_{thr}}$	Δ_{max}	S_{max}	S_{ref}
0,5	0,5	0,5	0,2	90°	30°

Auf der rechten Seite der Abb. 8.20 sind die mit Hilfe des Puck’schen Bruchkriteriums ermittelten Anstrengungswerte für einen ausgewählten Lastfall dargestellt. Es wird ersichtlich, dass

sich nur im Bereich der Unterlegscheibe, also dort wo Spannungen in Laminatdickenrichtung auftreten, Anstrengungen einstellen, die zu einer Materialschädigung führen. Dabei handelt es sich ausschließlich um Schädigungen der Matrix, wie Abb. 8.21 verdeutlicht.

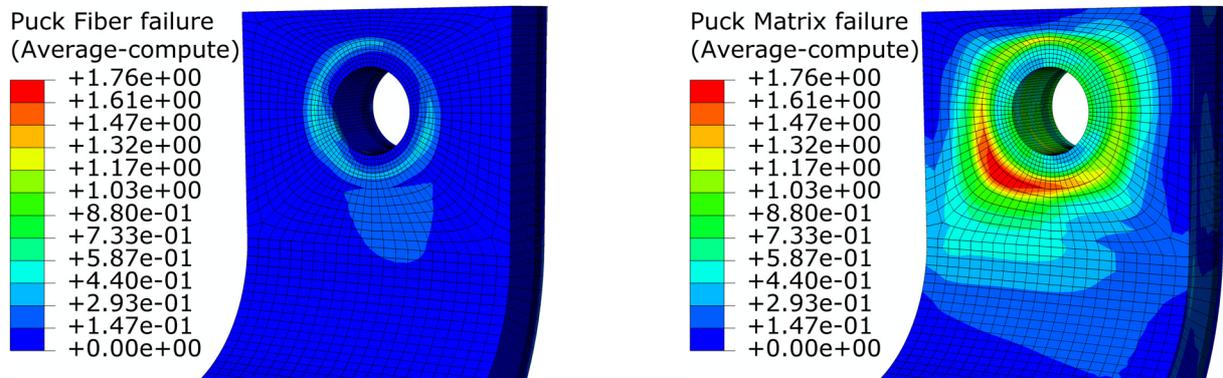


Abb. 8.21 Faser- (links) und Zwischenfaserbruchanstrengung (rechts) im Bereich der Unterlegscheibe

Eine weitere „Problemregion“ stellt bei bestimmten Lastfällen der Bereich der Krümmung auf der BPD-Seite der Flanschverbindung dar (Abb. 8.23). Auch hier handelt es sich um eine Schädigung der Matrix. Die Anstrengungswerte der Fasern liegen weit unter den zulässigen Werten. In dem betreffenden Lastfall erwirken die aufgebracht Lasten u.a. eine „Aufbiegung“ des Bereiches der Krümmung, wodurch wiederum Spannungen in Laminatdickenrichtung erzeugt werden, die letztendlich zur Materialschädigung führen. Bei der Lage mit den höchsten Anstrengungswerten handelt es sich um eine Lage mit $+84,87^\circ$ Faserorientierung, d.h. die Fasern dieser Schicht verlaufen annähernd in Triebwerksumfangsrichtung. In den benachbarten Schichten sind die Spannungen in Dickenrichtung zwar ähnlich hoch (Abb. 8.22, links), allerdings besitzen diese Schichten

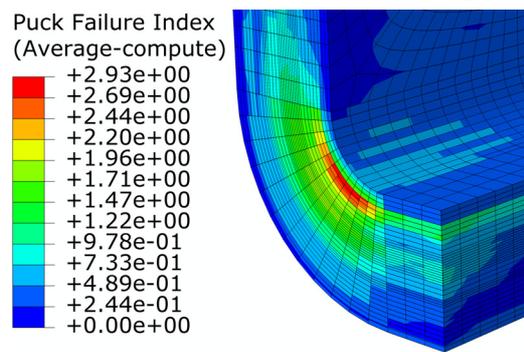


Abb. 8.23 Hohe Anstrengungswerte im Bereich hoher Krümmung der BPD-seitigen Flanschkälfte

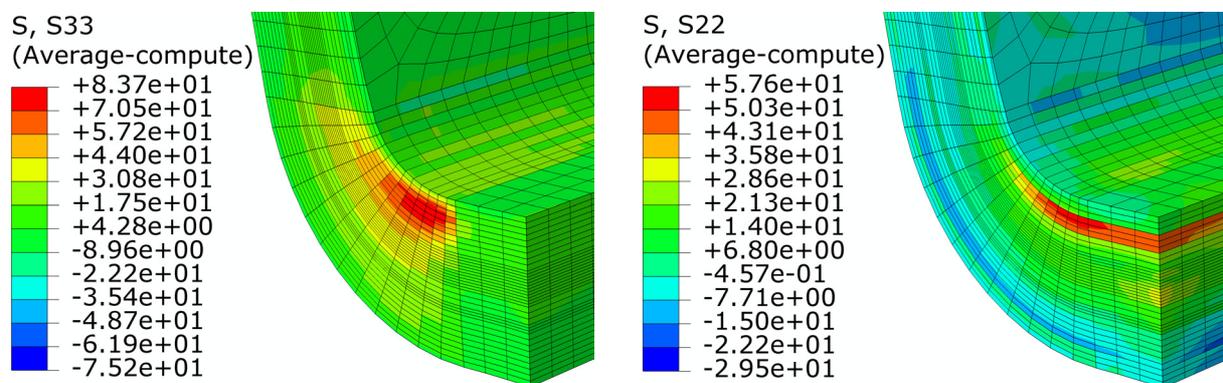


Abb. 8.22 Spannungen in Laminatdickenrichtung (links) und Spannungen quer zur Faserrichtung (rechts) in N/mm^2

ten eine stark abweichende Faserorientierung (vgl. Schicht 10 und 12 in Tabelle 8.8). Hierdurch treten in dem ausgewählten Lastfall nur bei der stark beanspruchten Schicht 11 zusätzlich zu den hohen Spannungen in Dickenrichtung auch noch große Spannungen quer zur Faserrichtung auf (Abb. 8.22, rechts), was letztendlich dann in dieser Schicht zu den besonders hohen Anstrengungswerten führt.

Um eine Lösung für das Problem der zu hohen Anstrengungswerte zu finden, empfiehlt sich zunächst eine vereinfachte Betrachtung des grundlegenden mechanischen Modells. Um das Entstehen der Spannungen in Laminatdickenrichtung zu verstehen, genügt es, das Problem einer Kreisbogenscheibe aus isotropem Material unter reiner Biegung zu behandeln, welches analytisch lösbar ist (Abb. 8.24, links).

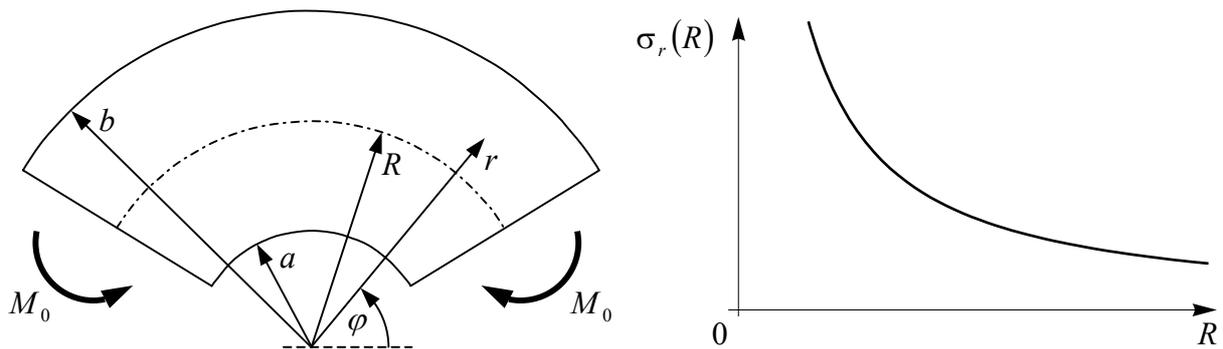


Abb. 8.24 Kreisbogenscheibe unter reiner Biegebelastung (links) und Radialspannung $\sigma_r(R)$ in der Mitte des Kreisbogens (rechts)

In [70] findet man als Lösung für die Spannung in radialer Richtung, welche der Laminatdickenrichtung entspricht

$$\sigma_r(r) = \frac{4M_0}{\kappa} \left[-a^2 \ln \frac{r}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + \frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} \right] \quad (8.9)$$

$$\text{mit } \kappa = t \left[(b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2 \right].$$

Hierbei ist t die gegenüber allen anderen Größen kleine Scheibendicke. Die Breite der Scheibe, welche im Modell der Summe aller Laminatschichtdicken entspricht, wird durch die Differenz des äußeren Kreisbogenradius b und des inneren Kreisbogenradius a festgelegt. Die reine Biegebeanspruchung wird durch zwei entgegengesetzt wirkende Momente M_0 erzeugt.

Hält man nun die Scheibenbreite $b - a$ konstant und variiert nur den mittleren Radius $R = (a + b)/2$ für ein negatives Moment M_0 , wobei letzteres ein „Aufbiegen“ der Kreisbogenscheibe bewirkt, so erhält man die in Abb. 8.24 (rechts) dargestellte Abhängigkeit der Radialspannung $\sigma_r(R)$ vom mittleren Radius R des Kreisbogens. Für eine andere Koordinate r ändert sich zwar der Betrag der Spannung und geht z.B. für $r \rightarrow b$ gegen null, jedoch bleibt der qualitative Verlauf in Abhängigkeit von R derselbe. Hieraus wird ersichtlich, dass eine Vergrößerung des Radius an der BPD-Flanschhälfte zu einer Reduktion der Spannungen in Laminatdickenrichtung und damit zu einer Reduktion der Anstrengungswerte führt.

Dies wird auch klar, wenn man sich die Spannungen bzw. Anstrengungen auf der IMC-

Flanschhälfte, welche mit einem größeren Radius ausgeführt ist, anschaut. Abb. 8.25 zeigt die Anstrengungen (links) und die Spannungen in Laminatdickenrichtung (rechts) für den zugehörigen Lastfall am IMC-Flansch, wobei nun Einspannung und Lastangriffspunkt gerade vertauscht sind (vgl. Abb. 8.17). Die Skalierung der Legende ist identisch zu Abb. 8.23 bzw. Abb. 8.22. Natürlich können die geringeren Anstrengungswerte auch von dem etwas anderen Schichtaufbau des IMC-Flansches herrühren, jedoch ist dieser Effekt gegenüber dem Radius-Effekt wesentlich kleiner, zumal die Schicht 11 des BPD-Flansches, in der die höchsten Anstrengungswerte auftreten, und die Schicht 11 des IMC-Flansches mit $84,87^\circ$ und $90,0^\circ$ entsprechend Tabelle 8.8 annähernd dieselbe Faserorientierung besitzen.

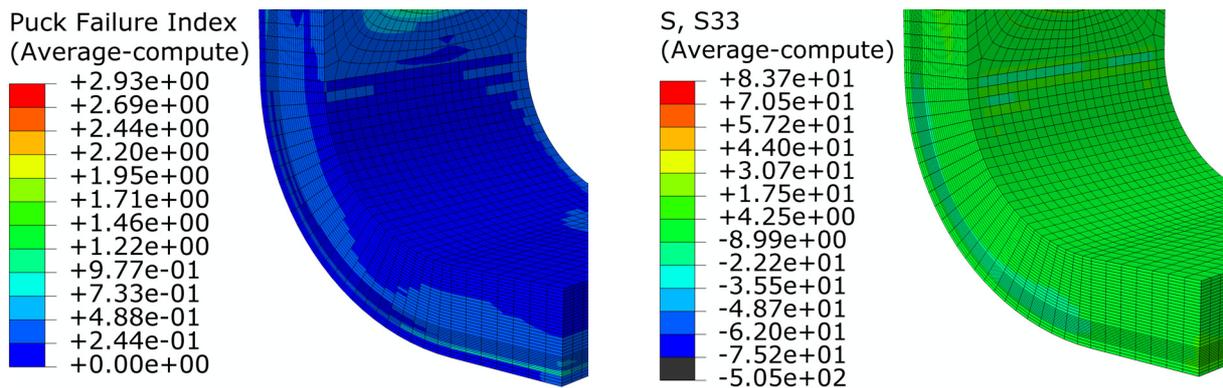


Abb. 8.25 Anstrengungswerte an der IMC-Flanschhälfte (links) und Spannungen in Laminatdickenrichtung (rechts) in N/mm^2

8.5.2 Detaillierte Betrachtung des „Unterlegscheiben-Problems“

Abschließend soll nun eine Möglichkeit aufgezeigt werden, mit deren Hilfe auch die hohen Anstrengungswerte unterhalb der Unterlegscheibe stark reduziert werden können. Hierbei soll deutlich werden, welch großes Potential eine geeignete Verknüpfung von Strukturoptimierungsalgorithmen und realistischen Bruchkriterien für die Faser-Verbund-Bauweise haben kann. Dazu wird zunächst ein vereinfachtes Modell betrachtet, welches jedoch die wesentlichen Effekte abbilden kann (Abb. 8.26, links).

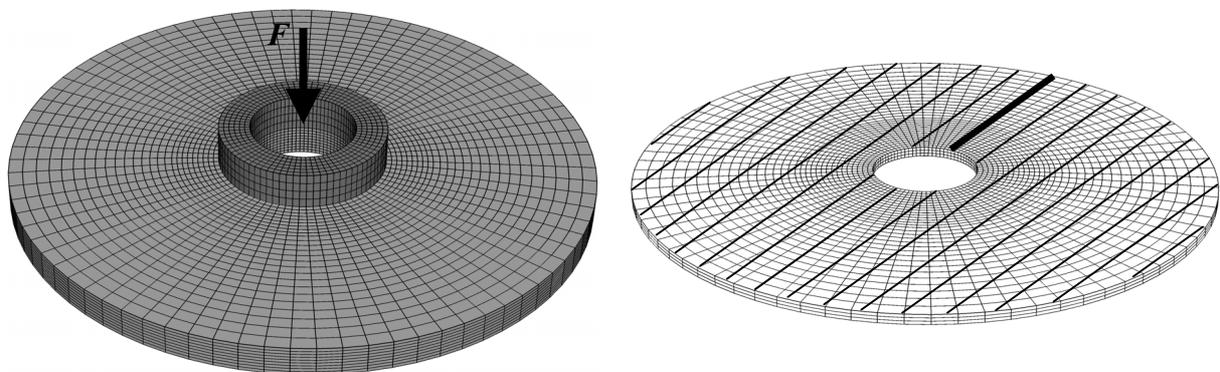


Abb. 8.26 Modell zur detaillierten Betrachtung des Unterlegscheibenproblems (links) und Darstellung der 0° -Faserorientierung in der obersten Schicht sowie des Pfades zur Spannungs- bzw. Anstrengungsauswertung (fett gezeichnete Linie, rechts)

Eine Unterlegscheibe aus Titan (Innenradius = R , Außenradius = $(46/29) \cdot R$, Dicke = $(20/29) \cdot R$) wird mit konstanter Kraft $F = 30000 \text{ N}$ auf eine Unterlage aus CFK (Innenradius = R , Außenradius = $(160/29) \cdot R$, Gesamtdicke = $(81/45) \cdot R$) mit Materialdaten entsprechend Tabelle 8.4 und quasiisotropem Schichtaufbau, bestehend aus 3 Schichten $[0^\circ, +60^\circ, -60^\circ]$, gedrückt, die dabei auf ihrer gesamten Unterseite so gelagert ist, dass eine Verschiebung in Richtung der angreifenden Kraft nicht möglich ist. Jede Schicht der Unterlage wird wieder mit drei Volumenelementen in Dickenrichtung modelliert. Zwischen Unterlegscheibe und CFK-Unterlage wird, wie auch schon beim Flanschmodell, ein Reibkoeffizient von $\mu = 0,256$ verwendet. Berechnet man die Anstrengungswerte des Puck-Kriteriums, so ergibt sich im Bereich der Unterlegscheibe ein ähnliches Bild wie bei der Flanschverbindung (Abb. 8.27).

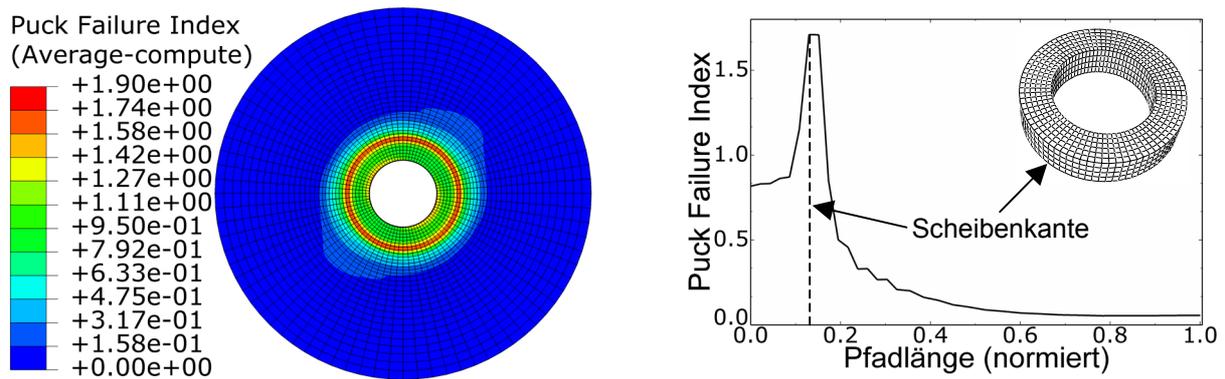


Abb. 8.27 Anstrengungswerte nach Puck in der CFK-Unterlage (links) und Verlauf der Anstrengungswerte entlang des in Abb. 8.26 (rechts) definierten und auf seine Länge normierten Pfades (rechts)

Trägt man die Anstrengungswerte an der Oberseite der CFK-Unterlage entlang eines radialen Pfades auf, der in Abb. 8.26 (rechts) als fett gezeichnete Linie zu sehen ist und parallel zur Faserorientierung der obersten Schicht liegt, so ergibt sich ein bemerkenswerter Verlauf, der in Abb. 8.27 (rechts) dargestellt ist. Auffällig hierbei ist, dass das Maximum der Anstrengung gerade dort zu finden ist, wo die Unterlegscheibe endet. Ein ähnliches Bild ergibt sich bei Verwendung einer größeren Unterlegscheibe, was ja als Möglichkeit zur Verringerung der

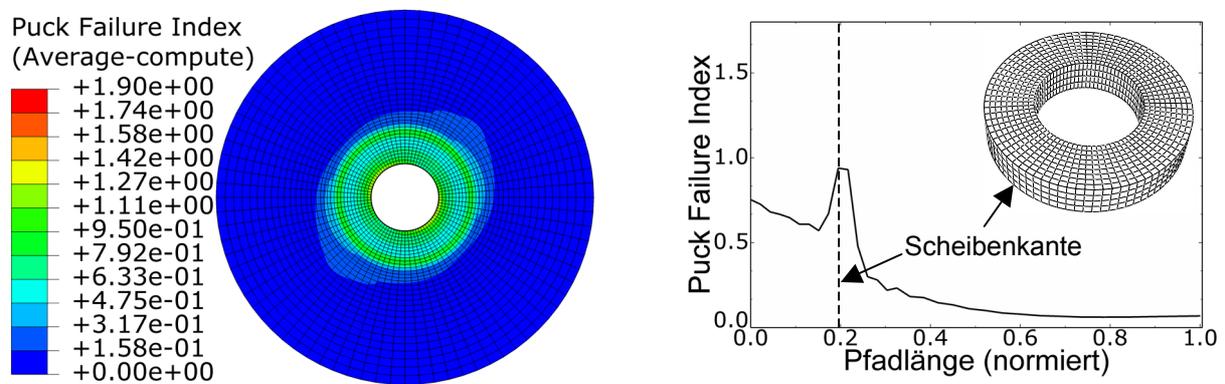


Abb. 8.28 Anstrengungswerte nach Puck in der CFK-Unterlage (links) und Verlauf der Anstrengungswerte entlang des in Abb. 8.26 (rechts) definierten Pfades für eine vergrößerte Unterlegscheibe

Anstrengungswerte in Betracht gezogen werden könnte. Im dargestellten Beispiel wurde der äußere Scheibendurchmesser um 19% vergrößert, wodurch die Auflagefläche der Unterlegscheibe um etwa 71% steigt. Zwar verringern sich die Anstrengungswerte etwas, jedoch bleibt die charakteristische Spitze der Anstrengungswerte an der Unterlegscheibenkante erhalten (Abb. 8.28).

Um herauszufinden, welche Spannungscoordinate im Speziellen für die Spitze der Anstrengungswerte verantwortlich ist und damit maßgeblich eine Materialschädigung hervorruft,

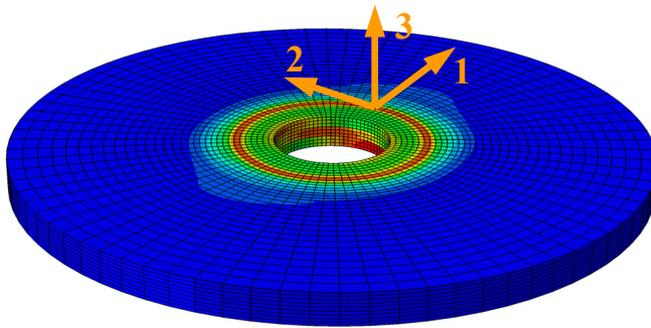


Abb. 8.30 Definition eines lokalen Koordinatensystems zur Spannungsauswertung am Punkt der größten Anstrengung

werden die Spannungscoordinate an einem entsprechenden Integrationspunkt (oberster Integrationspunkt der obersten Schicht beim Anstrengungsmaximum) in einem lokalen kartesischen Koordinatensystem, welches in Abb. 8.30 definiert ist und in dem die 1-Richtung der Faserrichtung entspricht und die 3-Richtung in Laminatdickenrichtung zeigt, ausgewertet. Die Spannungscoordinate σ_{11} in Faserrichtung nimmt dabei einen Wert an, der weit unterhalb der

Faserfestigkeit liegt. Die Schubspannungen τ_{12} und τ_{23} sind sogar nahezu null. Die verbleibenden Spannungscoordinate hingegen weisen, verglichen mit den entsprechenden Basisfestigkeiten, sehr hohe Werte auf. Zur Ermittlung der Empfindlichkeit des Anstrengungswertes gegenüber diesen Spannungen wird jeweils eine Spannungscoordinate separat von den anderen um bis zu $\pm 500 \text{ MPa}$ um einen Mittelwert, der dem Spannungswert an der Stelle der hohen Anstrengung entspricht, variiert. Alle anderen Spannungscoordinate werden konstant

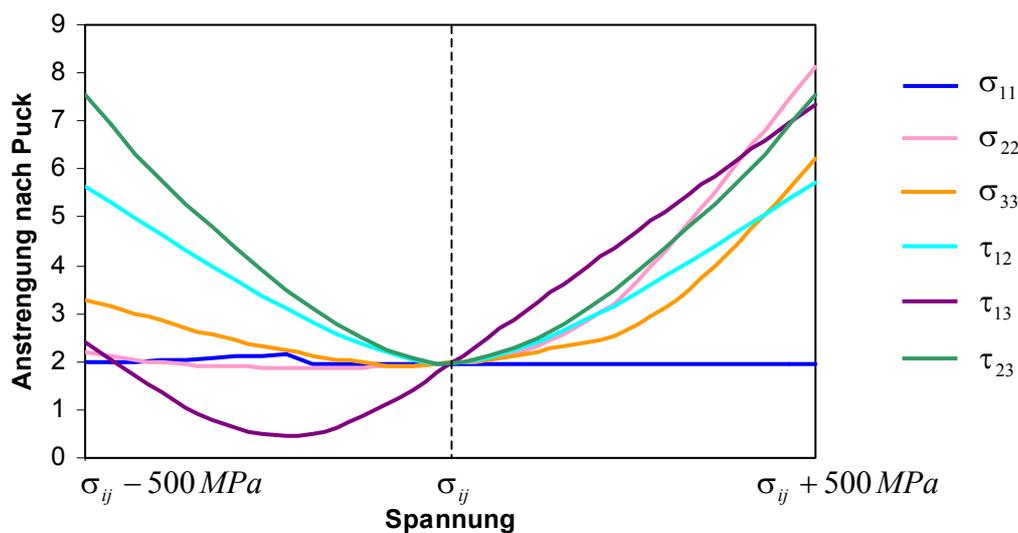


Abb. 8.29 Anstrengungswerte nach Puck bei separater Variation der einzelnen Spannungscoordinate um gegebenen Spannungszustand σ_{ij}

bei den ermittelten Werten gehalten. Trägt man die aus der Variationen folgenden Anstrengungswerte über allen variierten Spannungskordinaten auf, erhält man das in Abb. 8.29 gezeigte Diagramm.

Offensichtlich hat eine Veränderung der Schubspannung τ_{13} den größten Einfluss auf die Anstrengung. Aus den Variationsrechnungen erhält man, dass das Minimum dieser Funktion bei $\tau_{13} = 0 \text{ MPa}$ liegt, weshalb eine Verringerung des Betrages dieser Spannung anzustreben ist, um die Schädigung des Materials zu vermeiden. Auch für diesen Sachverhalt findet man eine Bestätigung in einer analytischen Scheibenlösung. Wird, wie in Abb. 8.31 (links) gezeigt, ein unendlich langer, starrer, prismatischer Körper durch eine Last P je Längeneinheit in z -Richtung gegen einen elastischen Halbraum gepresst, so verformt sich der Halbraum, wie in Abb. 8.31 (rechts) qualitativ angegeben.

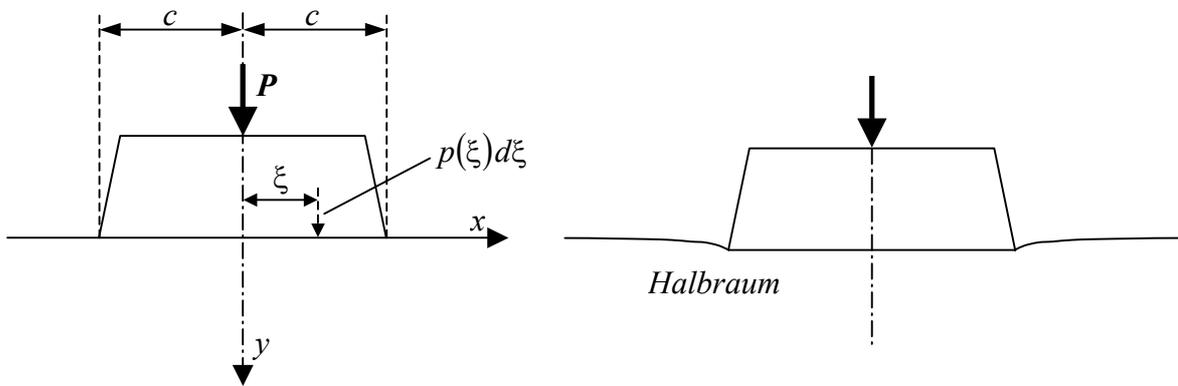


Abb. 8.31 Starrer Körper wird durch Last P je Längeneinheit gegen elastischen Halbraum gepresst (links) und qualitative Verformung des Halbraumes (rechts), nach [63]

Für die Schubspannungen im Halbraum unterhalb des starren Körpers lässt sich [63] folgend die Gleichung

$$\tau_{xy}(x,y) = -\frac{2}{\pi} \int_{\xi=-c}^{\xi=+c} \frac{(x-\xi)y^2}{[(x-\xi)^2 + y^2]^2} p(\xi) d\xi \tag{8.10}$$

angeben, wobei $p(\xi)d\xi$ das im Randpunkt $x=\xi$ der Halbebene angreifende Lastelement ist, welches auch als Einzellast je Längeneinheit in z -Richtung des Körpers aufgefasst werden kann. Nachdem die unter dem starren Körper herrschende Druckverteilung $p(\xi)$ zu

$$p(\xi) = \frac{1}{\pi\sqrt{c^2-x^2}} \int_{-c}^{+c} p(\xi) d\xi = \frac{P}{\pi\sqrt{c^2-x^2}} \tag{8.11}$$

bestimmt wurde (Details siehe [63]), kann Gleichung (8.10) integriert werden und man erhält für die Schubspannung an einem Punkt (x,y) der Halbebene:

$$\tau_{xy}(x,y) = \frac{Py^2}{\pi^2\sqrt{c^2-x^2}} \left(\frac{1}{(c+x)^2 + y^2} - \frac{1}{(c-x)^2 + y^2} \right). \tag{8.12}$$

Trägt man die Schubspannung für konstante Werte von P , c und y entlang der x -Achse unterhalb des starren Körpers auf, so erhält man den in Abb. 8.32 dargestellten Verlauf. Wie auch

leicht anhand Gleichung (8.12) zu erkennen ist, strebt die Schubspannung für $x \rightarrow c$ gegen unendlich große Werte. Beim vorliegenden Unterlegscheibenproblem strebt die Schubspannung zwar nicht gegen unendlich hohe Werte, da die Unterlegscheibe nicht unendlich starr ist, trotzdem nimmt die Schubspannung im CFK-Bauteil sehr hohe Werte an, was letztendlich zu einer Materialschädigung führt.

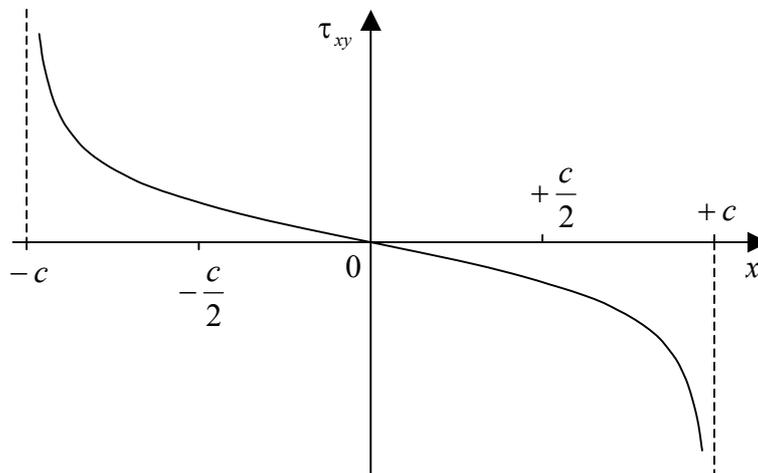


Abb. 8.32 Schubspannungsverlauf im Halbraum

Mit Hilfe der Methoden der Strukturoptimierung soll nun eine Form für die Unterlegscheibe gefunden werden, welche die Schubspannungen in der CFK-Unterlage reduziert und auf diese Weise auch die Anstrengungswerte verringert. Dabei soll zunächst mit Hilfe der Topologieoptimierung das grundsätzliche Aussehen der Unterlegscheibe bestimmt werden. Um für diesen Optimierungsschritt Rechenzeit zu sparen, werden die folgenden zwei Vereinbarungen getroffen:

1. Nur die oberste Laminatschicht wird modelliert.
2. Der Laminataufbau dieser Schicht wird gedanklich derart verändert, dass alle Fasern in radialer Richtung verlaufen (Abb. 8.33, links).

Unter diesen beiden Voraussetzungen ist es aufgrund der herrschenden Symmetrien ausreichend, ein Sektormodell $\Delta\varphi$ der CFK-Schicht und der Unterlegscheibe zu betrachten.

In Abb. 8.33 (rechts) ist das Modell für die Topologieoptimierung dargestellt. Hierbei ist der Bereich der CFK-Schicht noch feiner diskretisiert als im Vollmodell und besitzt die in Tabelle 8.4 angegebenen Materialeigenschaften. Zusätzlich sind der Design- und Non-Design-Bereich der Unterlegscheibe hinzugefügt, welche aus derselben Titanlegierung wie bei Modellierung der Flanschverbindung bestehen. Die Breite des Non-Design-Bereiches entspricht der Breite der ursprünglich verwendeten Unterlegscheibe. Die Last wird über starre Balkenelemente eingeleitet und gleichmäßig auf den Non-Design-Bereich der Unterlegscheibe verteilt. Die Unterseite der CFK-Unterlage ist in Laminatdickenrichtung unverschieblich gelagert. Zusätzlich existieren an den Seitenflächen des Modells Symmetrierandbedingungen, die keine Verschiebung in Umfangsrichtung zulassen. Zwischen der Unterlegscheibe (Design- und Non-Design-Bereich) und der CFK-Unterlage wird der Kontakt mittels sogenannter GAP-

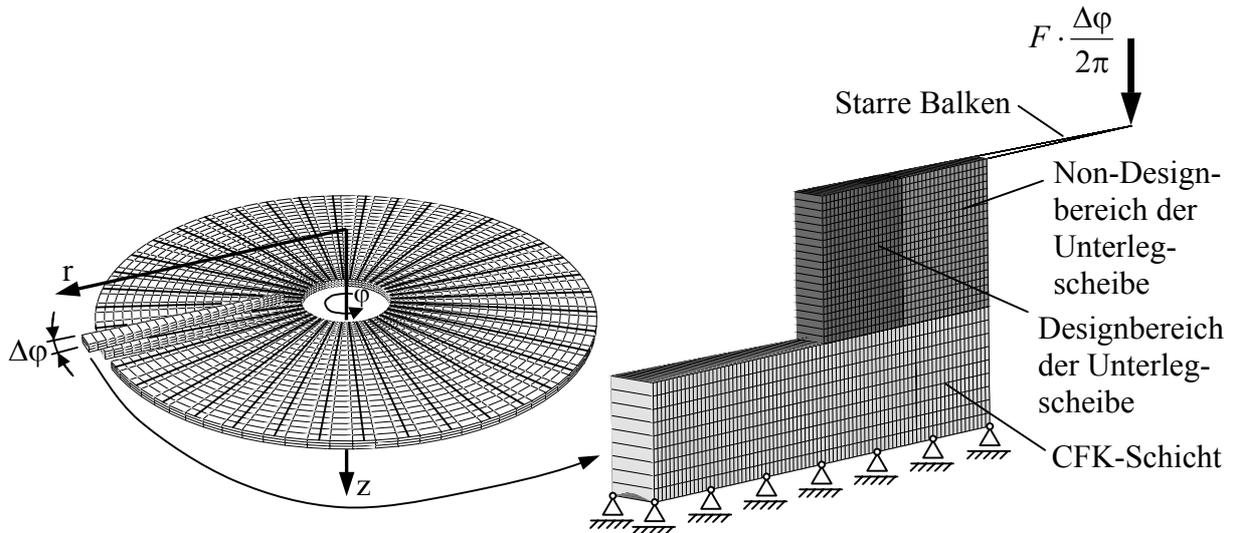


Abb. 8.33 (Gedankliche) Faserorientierung in der obersten Laminatschicht (links) und Modellaufbau eines Sektors für die Topologieoptimierung (rechts)

Elemente (näheres siehe [127] und Abb. 8.34) modelliert, die ein Abgleiten der Oberflächen aufeinander ermöglichen.

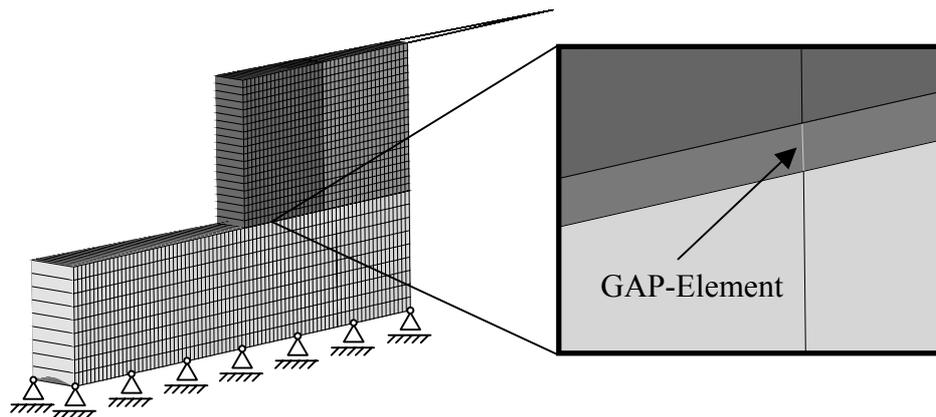


Abb. 8.34 Kontaktmodellierung in der Topologieoptimierung mittels GAP-Elementen

Bei der Topologieoptimierung wird von einem anfänglich komplett mit Material gefüllten Designraum ausgegangen (Dichtefaktor $\rho = 1,0$). Für den Bestrafungsexponenten erweist sich die Wahl von $p = 4$ als günstig. Zusätzlich wird als Fertigungsnebenbedingung eine Entformungsrichtung in z -Richtung, der Laminatdickenrichtung, definiert, sodass es zu keinen Hohlräumen oder Hinterschneidungen bezüglich dieser Richtung in der optimierten Struktur kommen kann. In Bezug auf eine möglichst einfache Fertigbarkeit zeigen sich die besten Ergebnisse bei einer Begrenzung des Volumens auf das 0,5-fache des Designraumvolumens. Zielfunktion für die Optimierung ist die Minimierung des Betrages der maximalen Schubspannung τ_{rz} in der CFK-Unterlage bei Verwendung des in Abb. 8.33 angegebenen Zylinderkoordinatensystems. Abb. 8.35 zeigt einen „Iso Surface-Plot“ des Optimierungsergebnisses, der eine geglättete Darstellung derjenigen Elemente enthält, deren Dichtewert 0,56 oder größer ist. Die Maximale Schubspannung im CFK kann während der 34 benötigten Iterationsschritte um etwa 65% gesenkt werden.

In einem zweiten Optimierungsschritt, einer nachgeschalteten Gestaltoptimierung, soll nun die endgültige Scheibenkontur festgelegt werden. Hierzu bedarf es zunächst einer Interpretation des Topologieoptimierungsergebnisses. In erster Näherung wird dazu die von der Topologieoptimierung erzeugte äußere, gekrümmte Kontur der Unterlegscheibe vereinfacht als gerade Linie aufgefasst. Diese neue Struktur wird wieder vernetzt und einer „Free-Shape“-Gestaltoptimierung unterzogen, wobei die in Abb. 8.36 (links) umrandeten äußeren Knoten der Scheibenaußenkante als Designknoten definiert werden, deren Koordinaten durch den Optimierungsprozess verändert werden dürfen. Zielfunktion ist wiederum die Minimierung der maximalen Schubspannung τ_{rz} in der CFK-Unterlage. Abb. 8.36 (rechts) zeigt das Ergebnis der Gestaltoptimierung, die nach sechs Iterationsschritten konvergiert und bezogen auf das Startdesign der Gestaltoptimierung eine Reduktion der maximalen Schubspannung um etwa 20% erzielt.



Abb. 8.35 Ergebnis der Topologieoptimierung als „Iso Surface-Plot“

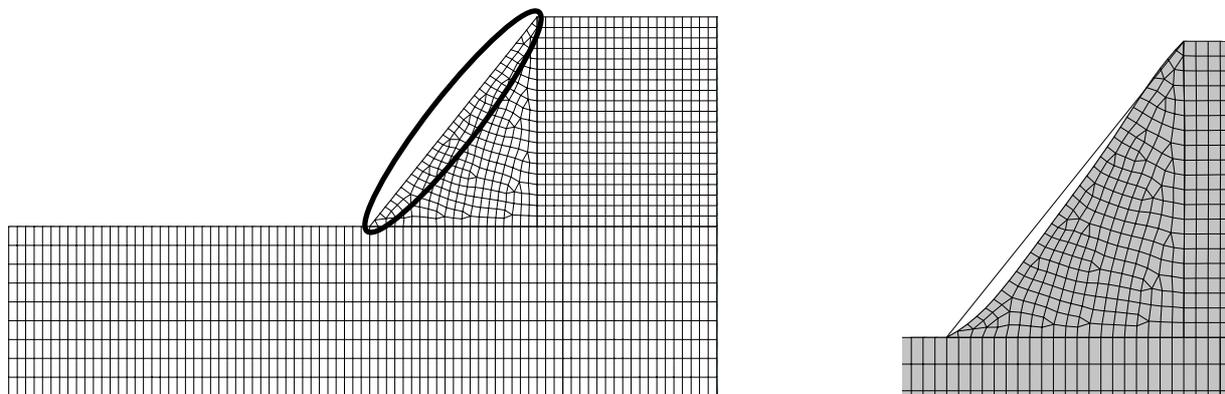


Abb. 8.36 Designknoten für Gestaltoptimierung (links) und Enddesign (grau eingefärbt) der Gestaltoptimierung (rechts)

Nach Umsetzung dieser optimierten Form in eine Scheibengeometrie, wird nun wieder das komplette Vollmodell aus Scheibe und CFK-Unterlage mit dem dreischichtigen, quasiisotropen Laminat $[0^\circ, +60^\circ, -60^\circ]$ für eine FE-Analyse aufgebaut und die Werte des Puck-Kriteriums entlang des bereits zuvor verwendeten Pfades in einem Diagramm aufgetragen. Abb. 8.37 zeigt den Kontur-Plot der Anstrengungswerte nach Puck auf der Oberseite der CFK-Unterlage sowie die Anstrengungswerte entlang des auch für die Abb. 8.27 und Abb. 8.28 genutzten Pfades bei gleicher Skalierung der Legenden. Offenbar kann durch die neue Scheibenform die schädigungsrelevante Schubspannungskoordinate derartig reduziert werden, dass nun nach dem Puck'schen Bruchkriterium keine Materialschädigung mehr auftritt. Die charakteristische Spitze des Bruchkriteriums an der Scheibenkante kann völlig eliminiert

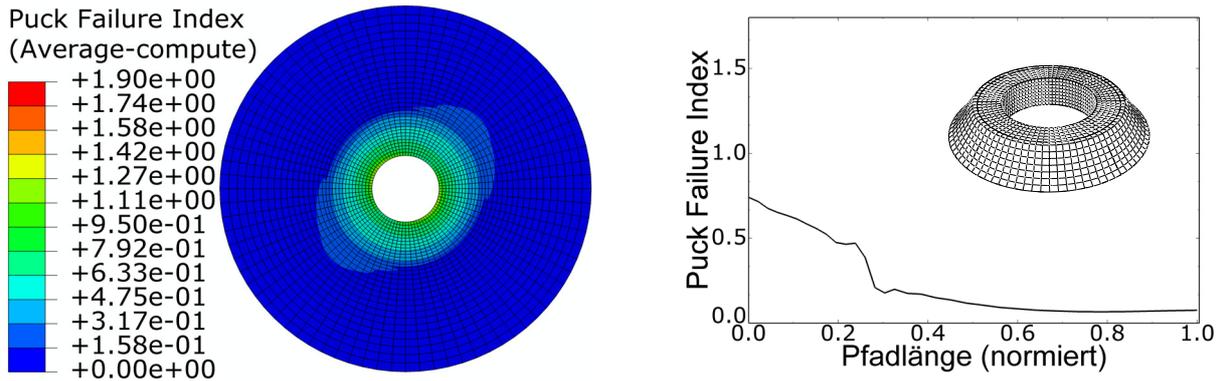


Abb. 8.37 Anstrengungswerte nach Puck in der CFK-Unterlage (links) und Verlauf der Anstrengungswerte entlang des in Abb. 8.26 (rechts) definierten Pfades für die gestaltoptimierte Unterlegscheibe

werden, was natürlich auch insbesondere im Hinblick auf die Dauerfestigkeit des Materials große Vorteile bringt.

Das Gewicht der neuen Unterlegscheibe liegt etwa 7,4% unter demjenigen der großen Unterlegscheibe, aber um etwa 59% über dem der ursprünglichen Scheibe. Hierbei sei jedoch darauf hingewiesen, dass das Ziel der Optimierung nicht die Minimierung der Masse war und auch sonst keinerlei Restriktionen bezüglich der Masse vorhanden waren. Die Spannungen in der optimierten Unterlegscheibe überschreiten nicht die zulässigen Werte und liegen in einem ähnlichen Bereich wie bei der ursprüngliche Scheibe.

Nutzt man die neu entwickelte Unterlegscheibe für die im vorherigen Kapitel betrachtete Flanschverbindung, so stellen sich nun wesentlich geringere Anstrengungswerte im Bereich der Unterlegscheibe bei gleicher Belastung ein (vgl. Abb. 8.21 und Abb. 8.38), wobei die maximale Anstrengung mit einem Wert von 0,84 nun unter dem kritischen Anstrengungswert von 1,0 liegt. Wie in [100] gezeigt wird, gelangt man zu denselben Ergebnissen auch bei Nutzung des LaRC04-Kriteriums anstelle des Puck-Kriteriums.

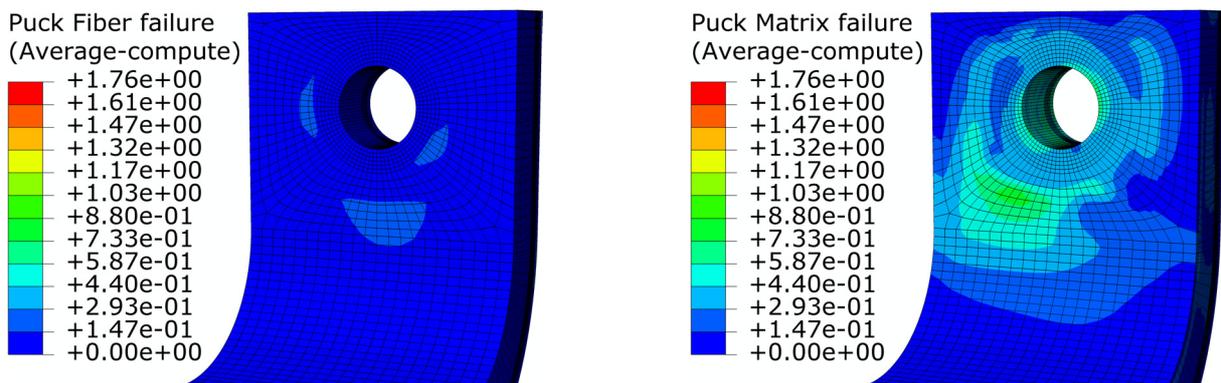


Abb. 8.38 Faser- (links) und Zwischenfaserbruchanstrengung (rechts) im Bereich der Unterlegscheibe bei Verwendung der gestaltoptimierten Unterlegscheibe

9 Zusammenfassung/Ausblick

In heutiger Zeit gewinnt der Leichtbau immer stärker an Bedeutung, was in erster Linie einer immer wichtiger werdenden Ressourcenschonung geschuldet ist. Um das Leichtbaupotential von Material und Struktur auszuschöpfen, werden in dieser Arbeit verschiedene Optimierungsalgorithmen verwendet. Hierzu folgt nach einem historischen Überblick eine Skizzierung der Herleitung von Optimalitätsbedingungen 1. und 2. Ordnung. Nachfolgend werden darauf aufbauend einige wichtige Optimierungsalgorithmen für lineare und nichtlineare Optimierungsprobleme erläutert, von denen viele im weiteren Verlauf dieser Arbeit Anwendung finden.

In Verbindung mit der Finiten-Elemente-Methode führen die Optimierungsalgorithmen zu den Verfahren der Strukturoptimierung. Die verschiedenen Disziplinen Parameter-, Gestalt-, Topographie-, Free-Size- und Topologieoptimierung werden ausführlich erläutert und auf Besonderheiten eingegangen. Zum Erreichen eines Optimums bestehen in der Strukturoptimierung zwei grundsätzlich verschiedene Algorithmenphilosophien. Dies sind zum Einen die Algorithmen, welche sich der Methoden der mathematischen Programmierung, also den vorgestellten Optimierungsalgorithmen, bedienen und zum Anderen die sogenannten optimalitätskriterienbasierten Algorithmen. Letztere basieren auf Vorstellungen über die Eigenschaften der optimalen Struktur und sind beispielsweise natürlichen Wachstumsprozessen entlehnt. Beide Philosophien werden mit Hilfe von akademischen Beispieloptimierungen, aber auch Optimierungen realer Bauteile, miteinander verglichen, um Eigenheiten sowie Vor- und Nachteile aufzuzeigen. Dabei kommt auch ein selbst entworfener Topologieoptimierungsalgorithmus zum Einsatz, der im Vergleich zu kommerziellen Algorithmen sehr gute Ergebnisse liefert. Es zeigt sich, dass beide Philosophien ihre Berechtigung haben und je nach Problemstellung das eine oder andere Verfahren vorzuziehen ist.

Weiteres Optimierungspotential eines Bauteils oder einer Struktur erschließt sich bei Verwendung von Materialien, deren Eigenschaften zielgerichtet den jeweiligen Erfordernissen angepasst werden können. Derartige Materialien sind beispielsweise Faser-Kunststoff-Verbunde, welche das Thema des zweiten Teils dieser Arbeit darstellen. Zunächst werden die Bestandteile dieses Werkstoffs, die Fasern und die Matrix detailliert dargestellt, und anschließend das mechanische Verhalten eines solchen geschichteten Verbundwerkstoffes mit Hilfe der klassischen Laminattheorie sowie der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung beschrieben. Da Leichtbau immer eine verstärkte Ausreizung der Materialeigenschaften und des -verhaltens bedeutet, muss man beides auch besonders gut kennen. Insbesondere bei Faser-Kunststoff-Verbunden ist eine korrekte Vorhersage des Materialversagens noch immer eine große Herausforderung. Es existieren zwar eine Reihe von sogenannten Bruchkriterien, die jedoch, wie gezeigt wird, bei gleichem Material und gleicher Belastung zu unterschiedlichen Aussagen bezüglich der Festigkeit führen können. Einen vielversprechenden Ansatz bieten wirkebenenbasierte Bruchkriterien, welche zwar einen höheren numerischen Aufwand bei der Berechnung der Materialbeanspruchung bedingen, aber im Vergleich mit experimentellen

Daten die besten Ergebnisse liefern. Es wird gezeigt, dass auch durch völlig verschiedene Herangehensweisen an die Beschreibung eines solchen wirkebenenbasierten Bruchkriteriums, wobei hier das Bruchkriterium nach Puck und das LaRC04-Bruchkriterium betrachtet werden, ähnliche Ergebnisse erzielt werden können. Beide Bruchkriterien werden in erster Linie als Nebenbedingung, teilweise aber auch als Zielfunktion bei der Optimierung der Materialparameter Faserorientierung und Schichtdicke verschiedener Faser-Kunststoff-Verbunde erfolgreich genutzt. Diese Optimierungen werden dabei an ungestörten Bereichen mit nahezu ebenem Spannungszustand und gestörten Bereichen mit räumlichem Spannungszustand realer Bauteile durchgeführt.

Eine geeignete Verknüpfung von realistischen Bruchkriterien und der Strukturoptimierung kann schließlich zu neuartigen Bauteilen führen, die an die Erfordernisse spezieller Materialien angepasst sind. Dies wird in dieser Arbeit anhand einer optimierten und an das Material CFK angepassten Titan-Unterlegscheibe demonstriert, welche zu einer starken Reduktion der Materialbelastung und somit potentieller Schädigungen in Lasteinleitungsbereichen beiträgt. Das beschriebene Vorgehen ist aber prinzipiell auch für beliebige andere Bauteile und Materialkombinationen anwendbar. In Zukunft wäre eine experimentelle Absicherung der berechneten Struktureigenschaften wünschenswert.

Probabilistische Aspekte werden im Rahmen dieser Arbeit nur am Rande betrachtet, was jedoch auch dem hierfür notwendigen, äußerst hohen numerischen Aufwand geschuldet ist.

Bei Faser-Kunststoff-Verbunden tritt bereits im Bereich elastischer Deformationen ein nicht-lineares Verhalten der Spannungs-Dehnungsbeziehung bei Schubbelastung einer unidirektionalen Schicht in der Ebene auf. Da für dieses Verhalten keine Materialdaten vorlagen, wird eine lineare Spannungs-Dehnungsbeziehung angenommen und den Berechnungen zu Grunde gelegt. Eine erweiterte experimentelle Datenbasis könnte hier zu noch genaueren Vorhersagen der Bruchkriterien führen. Darüber hinaus wird in dieser Arbeit nicht die weitere Schädigungsentwicklung in einem Laminat nach einem ersten Bruch betrachtet. Ein solcher Bruch, insbesondere wenn es sich um Zwischenfaserbruch handelt, führt nicht zwangsläufig zu einem kompletten Laminatversagen. Vielmehr kommt es oft zu Lastumlagerungen in benachbarte Schichten, wodurch die Struktur durchaus noch ihre Aufgaben erfüllen kann.

Anhang

A Beispiel für Ungültigkeit der Abadie-Regularitätsbedingung

Die von Kuhn und Tucker in [104] angegebenen Ungleichheitsnebenbedingungen, welche eine nach der Abadie-Regularitätsbedingung unzulässige Menge beschreiben, werden in der Standardform für das Optimierungsproblem

$$\min -x_1 \text{ u.d.N. } x_2 - (1-x_1)^3 \leq 0, -x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0 \quad (\text{A.1})$$

verwendet (Abb. A.1).

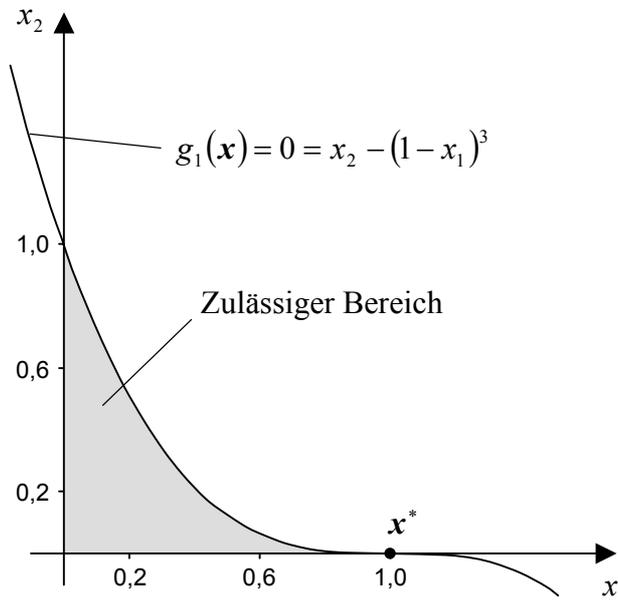


Abb. A.1 Zulässiger Bereich und Optimalpunkt des Optimierungsproblems (A.1)

Bei diesem Problem ist $\mathbf{x}^* = (1 \ 0)^T$ offenbar der Optimalpunkt, in dem die Ungleichheitsnebenbedingungen $g_1 = x_2 - (1-x_1)^3 \leq 0$ und $g_3 = -x_2 \leq 0$ aktiv sind. Somit erhält man nach Definitionsgleichung (2.10) für den linearisierten Tangentialkegel im Punkt \mathbf{x}^*

$$T_{lin}(\mathbf{x}^*) = \{ \mathbf{d} \in \mathbb{R}^2 \mid \nabla g_1(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d} \leq 0, \nabla g_3(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d} \leq 0 \} \quad (\text{A.2})$$

mit $\nabla g_1(\mathbf{x}^*) = (0 \ 1)^T$ und $\nabla g_3(\mathbf{x}^*) = (0 \ -1)^T$, woraus lediglich $d_2 = 0$ folgt und damit

$$T_{lin}(\mathbf{x}^*) = \{ (d_1 \ d_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid d_2 = 0 \}. \quad (\text{A.3})$$

Den Tangentialkegel kann man sich gedanklich aus der Definition desselben heraus überlegen. Konstruiert man sich die zugehörige Folge (siehe Abschnitt 2.1.4.1) aus dem Inneren des zulässigen Bereiches heraus, so erkennt man, dass $d_2 = 0$ und $d_1 \leq 0$ gelten muss und schließlich

$$T_x(\mathbf{x}^*) = \{ (d_1 \ d_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid d_2 = 0, d_1 \leq 0 \} \quad (\text{A.4})$$

folgt. Somit ist der Tangentialkegel eine echte Teilmenge des linearisierten Tangentialkegels und die Abadie-Regularitätsbedingung ist nicht erfüllt.

B Transformationsbeziehungen

Transformationsbeziehungen zwischen verschiedenen Koordinatensystemen spielen im Zusammenhang mit faserverstärkten Kunststoffen und dem schichtweisen Laminataufbau eine große Rolle. Die in dieser Arbeit benötigten Transformationen werden im Folgenden erläutert.

B.1 Transformation der Schichtsteifigkeiten aus lokalem Schichtkoordinatensystem in globales Verbundkoordinatensystem

Zunächst sei darauf hingewiesen, dass in Folge der technischen oder ingenieurmäßigen Beschreibung der Schubverzerrungen durch γ_{ij} an Stelle von ε_{ij} (wobei die Beziehung $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ gilt) die Tensoreigenschaften des Verzerrungstensors formal verloren gehen, womit dann auch nicht mehr von einem „Elastizitätstensor“ \mathcal{Q} gesprochen werden kann, der zwischen den Spannungs- und Verzerrungsgrößen vermittelt. Damit die Tensortransformationen uneingeschränkt angewendet werden können, sollten im Allgemeinen alle notwendigen Transformationen zunächst mit Hilfe der tensoriellen Größen durchgeführt werden, um diese dann gegebenenfalls wieder in die technischen Darstellungen zu überführen [3]. Für die hier benötigte Transformation der Schichtsteifigkeiten ist dies jedoch nicht erforderlich.

Wie bereits in Abschnitt 5.1.3 erwähnt, erfolgt die allgemeine Transformation eines polaren Tensors 4. Stufe gemäß

$$\bar{Q}_{ijkl} = S_{im} S_{jn} S_{ko} S_{lp} Q_{mnop} \quad (\text{B.1})$$

mit

$$Q_{mnop} = \begin{bmatrix} Q_{1111} & Q_{1122} & Q_{1133} & Q_{1123} & Q_{1131} & Q_{1112} & Q_{1132} & Q_{1113} & Q_{1121} \\ Q_{2211} & Q_{2222} & Q_{2233} & Q_{2223} & Q_{2231} & Q_{2212} & Q_{2232} & Q_{2213} & Q_{2221} \\ Q_{3311} & Q_{3322} & Q_{3333} & Q_{3323} & Q_{3331} & Q_{3312} & Q_{3332} & Q_{3313} & Q_{3321} \\ Q_{2311} & Q_{2322} & Q_{2333} & Q_{2323} & Q_{2331} & Q_{2312} & Q_{2332} & Q_{2313} & Q_{2321} \\ Q_{3111} & Q_{3122} & Q_{3133} & Q_{3123} & Q_{3131} & Q_{3112} & Q_{3132} & Q_{3113} & Q_{3121} \\ Q_{1211} & Q_{1222} & Q_{1233} & Q_{1223} & Q_{1231} & Q_{1212} & Q_{1232} & Q_{1213} & Q_{1221} \\ Q_{3211} & Q_{3222} & Q_{3233} & Q_{3223} & Q_{3231} & Q_{3212} & Q_{3232} & Q_{3213} & Q_{3221} \\ Q_{1311} & Q_{1322} & Q_{1333} & Q_{1323} & Q_{1331} & Q_{1312} & Q_{1332} & Q_{1313} & Q_{1321} \\ Q_{2111} & Q_{2122} & Q_{2133} & Q_{2123} & Q_{2131} & Q_{2112} & Q_{2132} & Q_{2113} & Q_{2121} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

in seiner zweidimensionalen Darstellung und dem Drehtensor S_{ij} .

Handelt es sich bei dem zu transformierenden Tensor, wie in diesem Falle, um einen Elastizitätstensor, so ergeben sich einige Vereinfachungen. Beachtet man nur die für den ebenen

Spannungszustand relevanten Koordinaten des Elastizitätstensors Q_{mnop} , für welche $m \neq 3 \wedge n \neq 3 \wedge o \neq 3 \wedge p \neq 3$ gilt, so erhält man für die Transformation (B.1) ausgeschrieben:

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{ijkl} = & S_{i1}S_{j1}S_{k1}S_{l1}Q_{1111} + S_{i1}S_{j1}S_{k1}S_{l2}Q_{1112} + S_{i1}S_{j1}S_{k2}S_{l1}Q_{1121} \\
 & + S_{i1}S_{j1}S_{k2}S_{l2}Q_{1122} \\
 & + S_{i1}S_{j2}S_{k1}S_{l1}Q_{1211} + S_{i1}S_{j2}S_{k1}S_{l2}Q_{1212} + S_{i1}S_{j2}S_{k2}S_{l1}Q_{1221} \\
 & + S_{i1}S_{j2}S_{k2}S_{l2}Q_{1222} \\
 & + S_{i2}S_{j1}S_{k1}S_{l1}Q_{2111} + S_{i2}S_{j1}S_{k1}S_{l2}Q_{2112} + S_{i2}S_{j1}S_{k2}S_{l1}Q_{2121} \\
 & + S_{i2}S_{j1}S_{k2}S_{l2}Q_{2122} \\
 & + S_{i2}S_{j2}S_{k1}S_{l1}Q_{2211} + S_{i2}S_{j2}S_{k1}S_{l2}Q_{2212} + S_{i2}S_{j2}S_{k2}S_{l1}Q_{2221} \\
 & + S_{i2}S_{j2}S_{k2}S_{l2}Q_{2222}.
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

Weiterhin ergeben sich durch die in Kapitel 5 durch die Gleichungen (5.8) und (5.10) beschriebenen Symmetrien des Elastizitätstensors folgende Identitäten:

$$Q_{1212} = Q_{2112} = Q_{2121} = Q_{1221} \tag{B.4}$$

sowie

$$Q_{1122} = Q_{2211}. \tag{B.5}$$

Durch die Symmetrieeigenschaften des verwendeten Materials müssen, wie ebenfalls in Kapitel 5 erwähnt, einige der in (B.3) verwendeten Koordinaten des Elastizitätstensors zu null werden. Man erhält diese Koordinaten durch folgende Überlegungen: Stellt man sich eine Spiegelung eines z.B. in Abb. 4.1 gegebenen Materialausschnittes an der 2,3-Ebene vor, so gilt dann der Zusammenhang $\bar{e}_1 = -e_1$, $\bar{e}_2 = e_2$ und $\bar{e}_3 = e_3$ für die verwendeten Basissysteme. Aufgrund der Materialsymmetrie muss der Materialausschnitt aber auch in diesem gespiegelten Basissystem immer noch dieselben Steifigkeitseigenschaften haben. Somit muss also u.a. $\bar{Q}_{1112} = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (+1) \cdot Q_{1112}$ sowie $\bar{Q}_{2212} = (+1) \cdot (+1) \cdot (-1) \cdot (+1) \cdot Q_{2212}$ gelten, was offensichtlich nur für

$$Q_{1112} = Q_{2212} = 0, \tag{B.6}$$

erfüllt ist und womit dann durch Gl. (5.8) und (5.10) außerdem

$$Q_{1121} = Q_{2221} = Q_{2111} = Q_{2122} = Q_{1222} = Q_{1211} = 0 \tag{B.7}$$

folgt. Schließlich verbleibt von Gl. (B.3) nur noch:

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{ijkl} = & S_{i1}S_{j1}S_{k1}S_{l1}Q_{1111} + S_{i1}S_{j1}S_{k2}S_{l2}Q_{1122} + S_{i1}S_{j2}S_{k1}S_{l2}Q_{1212} \\
 & + S_{i1}S_{j2}S_{k2}S_{l1}Q_{1221} + S_{i2}S_{j1}S_{k1}S_{l2}Q_{2112} + S_{i2}S_{j1}S_{k2}S_{l1}Q_{2121} \\
 & + S_{i2}S_{j2}S_{k1}S_{l1}Q_{2211} + S_{i2}S_{j2}S_{k2}S_{l2}Q_{2222} \\
 = & S_{i1}S_{j1}S_{k1}S_{l1}Q_{1111} \\
 & + (S_{i1}S_{j2}S_{k1}S_{l2} + S_{i2}S_{j1}S_{k1}S_{l2} + S_{i2}S_{j1}S_{k2}S_{l1} + S_{i1}S_{j2}S_{k2}S_{l1})Q_{1212} \\
 & + (S_{i1}S_{j1}S_{k2}S_{l2} + S_{i2}S_{j2}S_{k1}S_{l1})Q_{1122} \\
 & + S_{i2}S_{j2}S_{k2}S_{l2}Q_{2222}.
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

Um die Voigt'sche Matrix-/Vektor-Schreibweise nutzen zu können, werden Spannungs- und Verzerrungstensen oftmais in einfach indizierter Form und der Elastizitätstensor in doppelt indizierter Form aufgeschrieben. Die Tensorkoordinaten Q_{ijkl} werden nach Tabelle B.1 in die Matrixkoordinaten Q_{pq} umgeschrieben (siehe [3]):

Tabelle B.1 Transformation der Tensorkoordinaten Q_{ijkl} in die Matrixkoordinaten Q_{pq}

Q_{ijkl}				Q_{pq}			
$ij:$	11	22	33	$p:$	1	2	3
	23	31	12		4	5	6
$kl:$	11	22	33	$q:$	1	2	3
	23	31	12,		4	5	6

Beispielsweise wird Q_{1212} zu Q_{66} , Q_{1122} zu Q_{12} und Q_{2212} zu Q_{26} .

Für eine Drehung um die 3-Achse erhält man bei Verwendung des Drehtensors bzw. der Drehmatrix

$$S_{ij} = S_{kl} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

und Gl. (B.8) dann die einzelnen Koordinaten der Steifigkeitsmatrix \bar{Q}_{pq} im globalen 1,2-Koordinatensystem:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

B.2 Transformation der globalen Einzelschichtverzerrungen in lokales Schichtkoordinatensystem

Entsprechend den Transformationsregeln eines Tensors 2. Stufe gilt nach [156] für die Transformation des Verzerrungstensors ${}^k \varepsilon_{mn}$ aus dem globalen Koordinatensystem in das jeweilige Schichtkoordinatensystem bei Drehung um die 3-Achse:

$${}^k \varepsilon_{ij} = S_{mi} S_{nj} {}^k \varepsilon_{mn} \quad (\text{B.11})$$

mit S_{ij} nach (5.32) und der Definition des Winkels der Drehung nach Abb. 5.4.

Es ist jedoch zu beachten, dass (B.11) für die tensorielle Darstellung der Verzerrungen gilt und nicht für die beispielsweise in Kapitel 5 genutzte Voigt'sche Notation in Vektorform. Zudem gilt für die dort verwendete technische Schubverzerrung:

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2\varepsilon_{12}. \quad (\text{B.12})$$

Mit (B.11) erhält man für die Verzerrungen im lokalen Schichtkoordinatensystem

$$\begin{aligned} {}^k\varepsilon_{11} &= {}^{k-}\varepsilon_{11} \cos^2 \theta + {}^{k-}\varepsilon_{22} \sin^2 \theta + {}^{k-}\varepsilon_{12} \cos \theta \sin \theta + {}^{k-}\varepsilon_{21} \cos \theta \sin \theta \\ {}^k\varepsilon_{22} &= {}^{k-}\varepsilon_{22} \cos^2 \theta + {}^{k-}\varepsilon_{11} \sin^2 \theta - {}^{k-}\varepsilon_{12} \cos \theta \sin \theta - {}^{k-}\varepsilon_{21} \cos \theta \sin \theta \\ {}^k\varepsilon_{12} &= -{}^{k-}\varepsilon_{11} \cos \theta \sin \theta + {}^{k-}\varepsilon_{22} \cos \theta \sin \theta + {}^{k-}\varepsilon_{12} \cos^2 \theta - {}^{k-}\varepsilon_{21} \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Bei der üblichen Verwendung der technischen Schubverzerrung nach (B.12) ergibt sich schließlich bei Berücksichtigung der Symmetrie des Verzerrungstensors (Gleichung (5.7)) für die Verzerrungen im lokalen Schichtkoordinatensystem

$$\begin{aligned} {}^k\varepsilon_{11} &= {}^{k-}\varepsilon_{11} \cos^2 \theta + {}^{k-}\varepsilon_{22} \sin^2 \theta + {}^{k-}\gamma_{12} \cos \theta \sin \theta \\ {}^k\varepsilon_{22} &= {}^{k-}\varepsilon_{22} \cos^2 \theta + {}^{k-}\varepsilon_{11} \sin^2 \theta - {}^{k-}\gamma_{12} \cos \theta \sin \theta \\ {}^k\gamma_{12} &= -2 {}^{k-}\varepsilon_{11} \cos \theta \sin \theta + 2 {}^{k-}\varepsilon_{22} \cos \theta \sin \theta + {}^{k-}\gamma_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

B.3 Transformation der Spannungskordinaten in wirkebenenbasierte Spannungen

Für einen polaren Tensor 2. Stufe gilt nach [156] das Transformationsgesetz

$$T_{ij} = S_{mi} S_{nj} \bar{T}_{mn} \quad (\text{B.15})$$

bzw. in Matrixnotation

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}^T \bar{\mathbf{T}} \mathbf{S}, \quad (\text{B.16})$$

wobei T_{ij} den Tensor im durch die Wirkebene definierten Koordinatensystem und \bar{T}_{ij} den Tensor im materialbezogenen Koordinatensystem darstellt, vgl. Abb. 6.8. Bei Drehung um den Winkel θ , welcher positive Werte in mathematisch positiver Drehrichtung annimmt, um die 1-Achse gilt für die Drehmatrix:

$$S_{mi} = \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{B.17})$$

Die Spannungskordinaten der Wirkebene lassen sich nun gemäß

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & \tau_{1n} & \tau_{1t} \\ \tau_{n1} & \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{t1} & \tau_{tn} & \sigma_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{B.18})$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1 & \tau_{13}s + \tau_{12}c & \tau_{13}c - \tau_{12}s \\ \tau_{21}c + \tau_{31}s & \sigma_2 c^2 + 2\tau_{23}sc + \sigma_3 s^2 & -\sigma_2 sc + \tau_{23}(c^2 - s^2) + \sigma_3 sc \\ \tau_{31}c - \tau_{21}s & -\sigma_2 sc + \tau_{23}(c^2 - s^2) + \sigma_3 sc & \sigma_2 s^2 - 2\tau_{23}sc + \sigma_3 c^2 \end{pmatrix}$$

mit den Abkürzungen $s = \sin \theta$ und $c = \cos \theta$ berechnen. Die Spannungskordinaten der Wirkebene finden sich in der mittleren Zeile des transformierten Spannungstensors (siehe Markierung).

C Herleitung der Beziehung zwischen Anisotropie-Parametern der Hill'schen Fließbedingung und Basisfestigkeiten

Mit den Anisotropie-Parametern F , G und H sowie den zugehörigen Fließspannungen X , Y und Z in 1-, 2- und 3-Richtung des Materialkoordinatensystems und einer einachsigen Belastung des Materials in 1-Richtung, vereinfacht sich die in Gleichung (6.12) angegebene Fließbedingung nach Hill zu

$$G \cdot X^2 + H \cdot X^2 = 1. \quad (\text{C.1})$$

Analog erhält man für eine einachsige Belastung in 2- bzw. 3-Richtung:

$$F \cdot Y^2 + H \cdot Y^2 = 1 \quad (\text{C.2})$$

und

$$F \cdot Z^2 + G \cdot Z^2 = 1. \quad (\text{C.3})$$

Das lineare Gleichungssystem, bestehend aus den Gleichungen (C.1) bis (C.3), kann nach den Parametern F , G und H aufgelöst werden, wodurch sich die Beziehungen nach Gleichung (6.13) ergeben. Durch selbiges Vorgehen lassen sich auch die Parameter L , M und N ermitteln.

D Ergänzungen zum Puck'schen Bruchkriterium

Für ebene Spannungszustände lässt sich die aufwendige numerische Bruchwinkelsuche beim Puck'schen Bruchkriterium erheblich vereinfachen und der Bruchwinkel kann analytisch bestimmt werden. Nachfolgend wird ausführlich gezeigt, wie man zu solch einer analytischen Bestimmungsgleichung für den Bruchwinkel gelangt. Abschließend werden dann alle wichtigen Gleichungen des Puck'schen Bruchkriteriums in tabellarischer Form zusammengefasst.

D.1 Herleitung der Zwischenfaserbruchbedingungen des Puck'schen Bruchkriteriums für den ebenen Spannungszustand

Für die Herleitung der Anstrengungen ist es zweckmäßig, die drei Zwischenfaserbruchmodi A, B und C (Abb. 6.2) getrennt voneinander zu betrachten. Für eine Zugbeanspruchung quer

zur Faser ($\sigma_2 > 0$) ist mit einem Bruchwinkel von $\theta = 0^\circ$ zu rechnen, womit dann für die wirkebenenbasierten Spannungen nach Gleichung (6.36) gilt:

$$\begin{aligned}\sigma_n(\theta) &= \sigma_2 \\ \tau_{n1}(\theta) &= \tau_{21} \\ \tau_{nt}(\theta) &= 0.\end{aligned}\tag{D.4}$$

Einsetzen von (D.4) in (6.34) liefert

$$\cos^2 \psi = 1 - \sin^2 \psi = 0,\tag{D.5}$$

womit sich Gleichung (6.33) zu

$$\frac{P'_{\perp\psi}}{R^A_{\perp\psi}} = \frac{P'_{\perp\parallel}}{R_{\perp\parallel}}\tag{D.6}$$

vereinfacht. Durch Einsetzen von (D.4) und (D.6) in (6.31) erhält man (6.37), die Zwischenfaserbruchanstrengung für den ebenen Spannungszustand bei Zugbeanspruchung quer zur Faser.

Eine Druckbeanspruchung muss differenziert betrachtet werden. Solange die Querdruckspannung $\sigma_2 < 0$ einen kritischen Wert nicht über- bzw. unterschreitet, beträgt der Bruchwinkel weiterhin $\theta_{fp} = 0^\circ$. Die Anstrengung für diesen Fall erhält man durch Einsetzen von (D.4) in (6.34), was auf

$$\frac{P^c_{\perp\psi}}{R^A_{\perp\psi}} = \frac{P^c_{\perp\parallel}}{R_{\perp\parallel}}\tag{D.7}$$

führt, und dann zusammen mit (D.4) in (6.32) eingesetzt die Anstrengung (6.38) ergibt.

Um für die Spannungszustände, bei denen der Bruchwinkel einen von null verschiedenen Wert annimmt, ebenfalls eine Bruchbedingung bzw. eine Anstrengung formulieren zu können, empfiehlt sich die Einführung der Parameterkopplung

$$\frac{P^c_{\perp\perp}}{R^A_{\perp\perp}} = \frac{P^c_{\perp\parallel}}{R_{\perp\parallel}} = \frac{P}{R},\tag{D.8}$$

welche zwar nicht physikalisch begründet ist, jedoch erhebliche Recheneinsparungen verursacht und nur geringfügige Abweichungen im Vergleich zur Bruchkurve bei Nicht-Kopplung erzeugt (siehe [143] und Abb. 6.10).

Berechnungen mit dem Puck'schen Bruchkriterium zeigten nun, dass im Falle eines schrägen Zwischenfaserbruchs ($\theta_{fp} \neq 0^\circ$) die Normalspannung σ_n auf der Bruchebene stets einen konstanten Wert, nämlich $\sigma_n = -R^A_{\perp\perp}$, annimmt. Am Umschlagspunkt von $\theta_{fp} = 0^\circ$ auf $\theta_{fp} \neq 0^\circ$ (Punkt C in Abb. D.1) gilt also $\sigma_2 = \sigma_n = -R^A_{\perp\perp}$. Die am Umschlagspunkt wirkende Schubspannung $\tau_{21,c}$ lässt sich durch Auflösen der Gleichung (6.38) für den Fall des Bruchs ($f_E = 1$) nach τ_{21} gemäß

$$\tau_{21,c} = R_{\perp\parallel} \sqrt{1 + 2p^c_{\perp\parallel} \cdot \frac{R^A_{\perp\perp}}{R_{\perp\parallel}}}\tag{D.9}$$

bestimmen. Wendet man die Parameterkopplung (D.8) an, so vereinfacht sich (D.9) zu

$$\tau_{21,c} = R_{\perp\perp} \sqrt{1 + 2p_{\perp\perp}^c}. \quad (\text{D.10})$$

Die schräge Gerade in Abb. D.1 kennzeichnet die Trennung der Bruchmodi B und C, und genügt offensichtlich der linearen Funktion $\tau_{21} = -\frac{\tau_{21,c}}{R_{\perp\perp}^A} \sigma_2$. Gilt also $\left| \frac{\sigma_2}{\tau_{21}} \right| \leq \left| \frac{R_{\perp\perp}^A}{\tau_{21,c}} \right|$, so tritt der Zwischenfaserbruchmodus B auf. Gilt $\left| \frac{\sigma_2}{\tau_{21}} \right| \geq \left| \frac{R_{\perp\perp}^A}{\tau_{21,c}} \right|$, so ist der Bruchwinkel $\theta_{fp} \neq 0^\circ$ und der Bruch erscheint im Modus C.

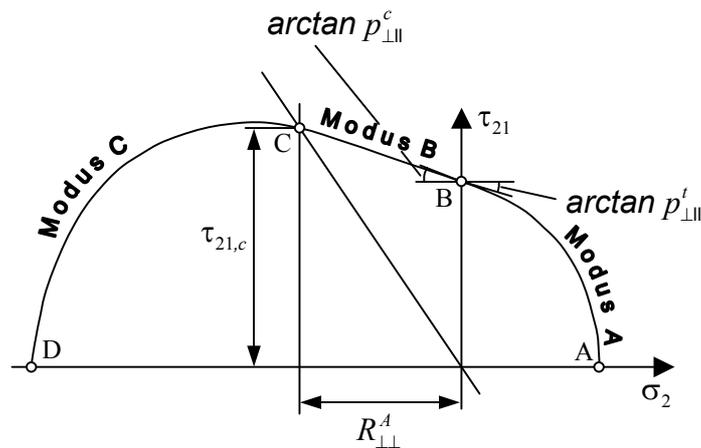


Abb. D.1 Bruchkurve im σ_2 - τ_{21} -Spannungsraum

Die Bestimmungsgleichung für die Anstrengung im Modus C erhält man nun durch Einsetzen von (D.8) und (6.36) in (6.32):

$$f_E = \cos \theta \sqrt{\left(\frac{-\sigma_2}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 (1 - \cos^2 \theta) + \left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp\perp}} \right)^2 + \left(\frac{p}{R} \right)^2 \sigma_2^2 \cos^2 \theta + \left(\frac{p}{R} \right) \sigma_2 \cos^2 \theta}. \quad (\text{D.11})$$

In (D.11) erscheint der Winkel θ noch als Unbekannte. Um diesen Winkel zu bestimmen, empfiehlt sich zunächst die Nutzung der Abkürzungen

$$a = \left[\left(\frac{p}{R} \right)^2 - \left(\frac{-1}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 \right] \sigma_2^2, \quad b = \left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp\perp}} \right)^2 + \left(\frac{-\sigma_2}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2, \quad c = \left(\frac{p}{R} \right) \sigma_2, \quad (\text{D.12})$$

womit dann (D.11) in der Form

$$f_E = \cos \theta \sqrt{a \cos^2 \theta + b} + c \cos^2 \theta \quad (\text{D.13})$$

geschrieben werden kann.

Für den Bruchwinkel $\theta = \theta_{fp}$ nimmt die Anstrengung einen Extremwert an. Somit muss gelten:

$$\begin{aligned} \frac{df_E}{d\theta_{fp}} &= 0 \\ &= -\sin\theta_{fp} \sqrt{a \cos^2 \theta_{fp} + b} + \cos\theta_{fp} (-a \sin\theta_{fp} \cdot 2 \cos\theta_{fp}) \cdot \frac{1}{2} (a \cos^2 \theta_{fp} + b)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\sin\theta_{fp} \left(\sqrt{a \cos^2 \theta_{fp} + b} + \frac{a \cos^2 \theta_{fp}}{\sqrt{a \cos^2 \theta_{fp} + b}} + 2c \cos\theta_{fp} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Für den Fall des Bruches gilt nach (D.13)

$$f_E = \cos\theta_{fp} \sqrt{a \cos^2 \theta_{fp} + b} + c \cos^2 \theta_{fp} = 1 \quad (\text{D.15})$$

und damit

$$\sqrt{a \cos^2 \theta_{fp} + b} = \frac{1}{\cos\theta_{fp}} - c \cos\theta_{fp}. \quad (\text{D.16})$$

Setzt man (D.16) in (D.14) ein, so erhält man nach einigen Umformungen folgende Möglichkeit den Bruchwinkel analytisch zu bestimmen:

$$\cos^4 \theta_{fp} = \frac{1}{c^2 - a} = \left(\frac{R_{\perp\perp}^A}{-\sigma_2} \right)^2 \quad \text{bzw.} \quad \cos\theta_{fp} = \sqrt{\frac{R_{\perp\perp}^A}{-\sigma_2}}. \quad (\text{D.17})$$

Bei σ_2 handelt es sich hierbei wegen (D.15) um eine Bruchspannung σ_{2fp} . Die zweite Lösung von (D.14) $\theta = 0^\circ$ und damit $\sin\theta = 0^\circ$ stellt ebenfalls einen Extremwert dar, gibt jedoch die minimale Anstrengung an.

Da jetzt der Bruchwinkel bekannt ist, kann eine Bruchbedingung durch Einsetzen von (D.17) in (D.11) abgeleitet werden, wobei durch die Betrachtung im Falle des Bruchs σ_2 und τ_{21} Bruchspannungen darstellen und $\sigma_2 = \sigma_{2fp}$, $\tau_{21} = \tau_{21fp}$ gilt. Unter Verwendung von $(p/R) \cdot R_{\perp\perp}^A = p_{\perp\perp}^c$ entsprechend der Parameterkopplung (D.8) und Gleichung (6.35) ergibt sich als Bruchbedingung:

$$\left[\left(\frac{-\sigma_2}{R_{\perp}^c} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{21}}{2(1+p_{\perp\perp}^c)R_{\perp\parallel}} \right)^2 \right] \frac{R_{\perp}^c}{-\sigma_2} = 1. \quad (\text{D.18})$$

Die Einführung der Anstrengung f_E in (D.18), wodurch jetzt σ_2 und τ_{21} keine Bruchspannungen mehr sind, führt über

$$\left[\left(\frac{-\sigma_2}{f_E R_{\perp}^c} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{21}}{2(1+p_{\perp\perp}^c)R_{\perp\parallel} f_E} \right)^2 \right] \frac{R_{\perp}^c f_E}{-\sigma_2} = 1 \quad (\text{D.19})$$

durch Auflösen nach f_E auf die Anstrengungsformulierung

$$f_E = \left[\left(\frac{-\sigma_2}{R_{\perp}^c} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{21}}{2(1+p_{\perp\perp}^c)R_{\perp\parallel}} \right)^2 \right] \frac{R_{\perp}^c}{-\sigma_2} \quad (\text{D.20})$$

für den Bruchmodus C.

Setzt man bei der Bestimmung des Bruchwinkels nicht den Fall des Bruches (D.15) voraus, sondern löst (D.14) direkt nach $\cos \theta$ auf und macht die Substitution (D.12) wieder rückgängig, so erhält man nach längerer Rechnung

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{R \cdot R_{\perp\parallel}^2 \cdot \sigma_2^2 + R \cdot R_{\perp\perp}^A \cdot \tau_{21}^2}{2R \cdot R_{\perp\parallel}^2 \cdot \sigma_2^2 + 2pR_{\perp\parallel}^2 \sigma_2^2 R_{\perp\perp}^A}} = \sqrt{\frac{R}{2(R + pR_{\perp\perp}^A)} \left(1 + \frac{R_{\perp\perp}^A \cdot \tau_{21}^2}{R_{\perp\parallel}^2 \cdot \sigma_2^2}\right)} \quad (\text{D.21})$$

und mit (D.8) schließlich

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1}{2(1 + p_{\perp\perp}^c)} \left(1 + \frac{R_{\perp\perp}^A \cdot \tau_{21}^2}{R_{\perp\parallel}^2 \cdot \sigma_2^2}\right)}. \quad (\text{D.22})$$

Sowohl mit Gleichung (D.22), als auch mit Gleichung (D.17) ist es möglich den Bruchwinkel zu bestimmen. Jedoch besitzt Gleichung (D.22) gegenüber (D.17) den Vorteil, dass hier nicht die Bruchspannung $\sigma_2 = \sigma_{2fr}$ bekannt sein muss, sondern der Bruchwinkel lediglich vom Verhältnis der Spannungen τ_{21}/σ_2 abhängt.

D.2 Zusammenstellung der Gleichungen für das Puck'sche Bruchkriterium

Für die Bewertung eines Spannungszustandes mit Hilfe des Bruchkriteriums nach Puck, sind die in Tabelle D.1 zusammengefassten Gleichungen zu nutzen. Erweiterungen zu den hier aufgeführten Gleichungen sowie Vereinfachungen für den ebenen Spannungszustand können den Abschnitten 6.2.4.1.4 bzw. 6.2.4.1.3 entnommen werden.

Tabelle D.1 Gleichungen für das Puck'sche Bruchkriterium

Faserbruchanstrengungen:	
$\sigma_1 > 0$:	$f_E = \frac{\sigma_1}{R_{\parallel}^t}$
$\sigma_1 < 0$:	$f_E = \frac{\sigma_1}{-R_{\parallel}^c}$
Zwischenfaserbruchanstrengungen:	
$\sigma_n \geq 0$:	$f_E(\theta) = \sqrt{\left[\left(\frac{1}{R_{\perp}^t} - \frac{p_{\perp\psi}^t}{R_{\perp\psi}^A}\right) \cdot \sigma_n(\theta)\right]^2 + \left(\frac{\tau_{nt}(\theta)}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}(\theta)}{R_{\perp\parallel}}\right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^t}{R_{\perp\psi}^A} \cdot \sigma_n(\theta)$
$\sigma_n < 0$:	$f_E(\theta) = \sqrt{\left(\frac{\tau_{nt}(\theta)}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}(\theta)}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 + \left(\frac{p_{\perp\psi}^c}{R_{\perp\psi}^A} \cdot \sigma_n(\theta)\right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^c}{R_{\perp\psi}^A} \cdot \sigma_n(\theta)$
σ_n, τ_{n1} und τ_{nt} nach den Gleichungen (6.23)	
$\frac{p_{\perp\psi}^{t,c}}{R_{\perp\psi}^A} = \frac{p_{\perp\perp}^{t,c}}{R_{\perp\perp}^A} \cdot \cos^2 \psi + \frac{p_{\perp\parallel}^{t,c}}{R_{\perp\parallel}} \cdot \sin^2 \psi \quad \text{mit} \quad \cos^2 \psi = \frac{\tau_{nt}^2}{\tau_{nt}^2 + \tau_{n1}^2}, \quad \sin^2 \psi = \frac{\tau_{n1}^2}{\tau_{nt}^2 + \tau_{n1}^2},$ $R_{\perp\perp}^A = \frac{R_{\perp}^c}{2 \cdot (1 + p_{\perp\perp}^c)}$	

E Ergänzungen zum LaRC04-Bruchkriterium

Die Einbeziehung des In-situ-Effektes bei der Bruchvorhersage mehrschichtiger Lamine erfolgt über die Korrektur der Basisfestigkeiten. Nachfolgend wird gezeigt, wie man zu einer derartigen Korrektur sowohl für ein linear-elastisches als auch nichtlineares Schubverhalten gelangt. Darüber hinaus werden in den weiteren Abschnitten die für die Vorhersage des Bruchversagens unter Druck in Faserrichtung notwendigen Gleichungen zur Bestimmung des Kinking-Winkels und der Kinking-Ebene hergeleitet und abschließend die wichtigsten Gleichungen zum LaRC04-Bruchkriterium noch einmal zusammengefasst.

E.1 Bestimmung der In-situ-Festigkeiten für das LaRC04-Bruchkriterium

Bei der Bestimmung der In-situ-Festigkeiten ist zwischen dünnen und dicken Schichten zu unterscheiden.

a) Dicke Schichten:

Bei dicken Schichten wird davon ausgegangen, dass die Rissbreite wesentlich kleiner als die Schichtdicke ist ($2a_0 \ll t$), so dass der Riss ähnlich wie bei einer Einzelschicht ungehindert in longitudinaler und transversaler Richtung wachsen kann. Da die Energiefreisetzungsrate für ein Risswachstum in transversaler Richtung doppelt so hoch wie für ein Wachstum in longitudinaler Richtung ist, vgl. Gl. (6.71) und (6.72), wird der Riss zunächst in transversaler Richtung wachsen bis er die angrenzenden Schichten erreicht hat, um dann in longitudinaler Richtung weiter zu wachsen und eine Delamination zu verursachen. Nach [44] liegt die Grenze zwischen einer dünnen und einer dicken Schicht bei etwa $t = 0,7 \text{ mm}$. Die Ermittlung der In-situ-Querzugfestigkeit für eine dicke Schicht erfolgt durch Umstellung von (6.75) für den Modus I nach $R'_{\perp|is}$:

$$R'_{\perp|is} = \sqrt{\frac{2G_{Ic}^T}{\pi a_0 \Lambda_{22}^o}} \quad (\text{E.1})$$

und anschließendem Einsetzen von (6.79) für den Modus I in (E.1), wodurch man für die In-situ-Querzugfestigkeit einer dicken Schicht

$$R'_{\perp|is} = 1,12\sqrt{2}R'_{\perp} \quad (\text{E.2})$$

erhält.

Die Bestimmung der In-situ-Schubfestigkeit ist aufgrund des nichtlinearen Schubverhaltens, für welches das nichtlineare Schubgesetz

$$\gamma_{12} = \frac{1}{G_{12}} \tau_{12} + \beta \tau_{12}^3 \quad (\text{E.3})$$

angenommen wird (siehe auch Abb. E.1), etwas komplizierter. Hier beträgt die kritische Energiefreisetzungsrate für den kombinierten Schubmodus nach Gl. (6.75)

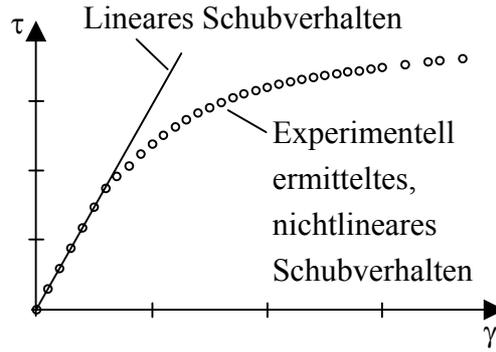


Abb. E.1 Lineares und nichtlineares Schubverhalten (nach [139])

$$G_{SHc}^T = \frac{\pi a_0}{2} \chi(\varepsilon R_{\perp\parallel is}) \quad \text{mit} \quad \chi(\gamma_{12}) = 2 \int_0^{\gamma_{12}} \tau_{12} d\gamma_{12} . \quad (\text{E.4})$$

Aus (E.3) folgt

$$\frac{d\gamma_{12}}{d\tau_{12}} = \frac{1}{G_{12}} + 3\beta\tau_{12}^2 \quad \Rightarrow \quad d\gamma_{12} = \left(\frac{1}{G_{12}} + 3\beta\tau_{12}^2 \right) d\tau_{12} . \quad (\text{E.5})$$

Weiterhin erhält man mit (E.5)

$$\chi(\varepsilon R_{\perp\parallel is}) = 2 \int_0^{R_{\perp\parallel is}} \tau_{12} \left(\frac{1}{G_{12}} + 3\beta\tau_{12}^2 \right) d\tau_{12} = \frac{R_{\perp\parallel is}^2}{G_{12}} + \frac{3}{2} \beta R_{\perp\parallel is}^4 \quad (\text{E.6})$$

und damit für (E.4)

$$G_{SHc}^T = \pi a_0 \left[\frac{R_{\perp\parallel is}^2}{2G_{12}} + \frac{3}{4} \beta R_{\perp\parallel is}^4 \right] \quad (\text{E.7})$$

bzw. für unidirektionales Laminate unter Verwendung von (6.79)

$$G_{SHc}^T = 2\pi a_0 \left[\frac{R_{\perp\parallel}^2}{2G_{12}} + \frac{3}{4} \beta R_{\perp\parallel}^4 \right] . \quad (\text{E.8})$$

Das Gleichsetzen von (E.7) und (E.8) liefert schließlich die In-situ-Schubfestigkeit einer dicken, eingebetteten Schicht:

$$R_{\perp\parallel is} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{1 + \beta \left(\frac{12R_{\perp\parallel}^2}{G_{12}} + 18\beta R_{\perp\parallel}^4 \right) G_{12}^2 - 1}}{3\beta G_{12}}} , \quad (\text{E.9})$$

wobei sich (E.9) für ein lineares Schubverhalten ($\beta = 0$ in (E.7) und (E.8)) auf

$$R_{\perp\parallel is} = \sqrt{2} R_{\perp\parallel} \quad (\text{E.10})$$

vereinfacht.

b) Dünne Schichten:

Bei dünnen Schichten geht man davon aus, dass Risse nur in longitudinaler Richtung wachsen können, da die typische Defektgröße größer/gleich der Schichtdicke ist ($t \leq 2a_0$). Die In-situ-Querzugfestigkeit kann mit Hilfe von Gleichung (6.74) und der initialen Defektgröße $2a_0 = t$ bestimmt werden:

$$R_{\perp\parallel is}^t = \sqrt{\frac{8G_{Ic}^L}{\pi t \Lambda_{22}^o}}. \quad (E.11)$$

Für die Bestimmung der In-situ-Schubfestigkeit geht man analog zur Festigkeitsbestimmung bei dicken Schichten vor: Man setzt (E.6) und $2a_0 = t$ in (6.74) für den Schubmodus ein und erhält

$$G_{SHc}^L = \frac{\pi t}{8} \left[\frac{R_{\perp\parallel is}^2}{G_{12}} + \frac{3}{2} \beta R_{\perp\parallel is}^4 \right], \quad (E.12)$$

woraus sich durch Auflösen nach $R_{\perp\parallel is}$ die Schubfestigkeit einer dünnen, eingebetteten Schicht

$$R_{\perp\parallel is} = \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \beta \frac{48G_{SHc}^L}{\pi t} G_{12}^2} - 1}{3\beta G_{12}}} \quad (E.13)$$

ergibt, welche sich für ein lineares Schubgesetz wiederum zu

$$R_{\perp\parallel is} = \sqrt{\frac{8G_{12} G_{SHc}^L}{\pi t}} \quad (E.14)$$

vereinfacht.

Die Bestimmung der benötigten kritischen Energiefreisetzungsraten bzw. Bruchzähigkeiten G_{Ic}^L und G_{SHc}^L erfolgt durch die entsprechenden standardisierten bruchmechanischen Versuche.

E.2 Bestimmung des Fehlstellungswinkels φ^c für das Kinking-Modell des LaRC04-Kriteriums

Um eine Bestimmungsgleichung für den Fehlstellungswinkel φ^c zu bekommen, geht man wie folgt vor. Teilt man Gl. (6.90) durch R_{\parallel}^c und multipliziert den linken Teil mit 1 und den rechten Teil mit $\cos^2 \varphi^c + \sin^2 \varphi^c = 1$, so erhält man

$$\sin \varphi^c \cos \varphi^c - \eta_{n1} \sin^2 \varphi^c = \frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\parallel}^c} (\cos^2 \varphi^c + \sin^2 \varphi^c). \quad (E.15)$$

Division durch $\cos^2 \varphi^c$ führt auf die quadratische Gleichung

$$\tan \varphi^c - \eta_{n1} \tan^2 \varphi^c = \frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\parallel}^c} (1 + \tan^2 \varphi^c), \quad (\text{E.16})$$

welche die Lösungen

$$\tan \varphi^c = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \left(\frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\parallel}^c} + \eta_{n1} \right) \frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\parallel}^c}}}{2 \left(\frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\parallel}^c} + \eta_{n1} \right)} \quad (\text{E.17})$$

besitzt. Da das Versagen bereits beim kleineren der beiden sich aus (E.17) ergebenden Winkel einstellt, verbleibt als Lösung

$$\varphi^c = \arctan \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4 \left(\frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\parallel}^c} + \eta_{n1} \right) \frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\parallel}^c}}}{2 \left(\frac{R_{\perp\parallel}}{R_{\parallel}^c} + \eta_{n1} \right)} \right). \quad (\text{E.18})$$

E.3 Bestimmung der Kinking-Ebene

Gemäß (B.16) lassen sich die Spannungen in einem um die Achse der Faserrichtung um den Winkel ψ gedrehten Koordinatensystem mit der Drehmatrix (B.17) transformieren. Damit erhält man für die Spannungskordinaten im gedrehten Koordinatensystem

$$\begin{aligned} \sigma_{2\psi} &= \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \cos 2\psi + \tau_{23} \sin 2\psi \\ \sigma_{3\psi} &= \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_{2\psi} \\ \tau_{2\psi 1} &= \tau_{12} \cos \psi + \tau_{13} \sin \psi \\ \tau_{3\psi 1} &= \tau_{13} \cos \psi - \tau_{12} \sin \psi \\ \tau_{2\psi 3\psi} &= \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2} \sin 2\psi + \tau_{23} \cos 2\psi. \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

Nach Annahme 2 in Abschnitt 6.2.4.2.4 muss gelten

$$\frac{\partial \sigma_{2\psi}}{\partial \psi} = -(\sigma_2 - \sigma_3) \sin 2\psi + 2\tau_{23} \cos 2\psi = 0, \quad (\text{E.20})$$

woraus sofort Gleichung (6.99) als Bestimmungsgleichung für ψ folgt. Zur Klärung der Frage, ob es sich bei der aus (E.20) bzw. (6.99) ermittelten Lösung

$$\psi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\tau_{23}}{\sigma_2 - \sigma_3} \right) \quad (\text{E.21})$$

des Extremwertproblems um ein Maximum handelt, wird die zweite Ableitung herangezogen:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \sigma_{2\psi}}{\partial \psi^2} &= -2(\sigma_2 - \sigma_3) \cos 2\psi - 4\tau_{23} \sin 2\psi \\
 &= -2(\sigma_2 - \sigma_3) \cos \left[\arctan \left(\frac{2\tau_{23}}{\sigma_2 - \sigma_3} \right) \right] - 4\tau_{23} \sin \left[\arctan \left(\frac{2\tau_{23}}{\sigma_2 - \sigma_3} \right) \right] \\
 &= -2(\sigma_2 - \sigma_3) \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 4\tau_{23} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.
 \end{aligned} \tag{E.22}$$

Handelt es sich bei dem gefundenen Winkel ψ um ein Maximum, so muss gelten:

$$\begin{aligned}
 -2(\sigma_2 - \sigma_3) &< 4\tau_{23}x \\
 -2(\sigma_2 - \sigma_3) &< \frac{8\tau_{23}^2}{\sigma_2 - \sigma_3}.
 \end{aligned} \tag{E.23}$$

Dies ist offensichtlich für $(\sigma_2 - \sigma_3) \geq 0$ immer erfüllt. Gilt hingegen $(\sigma_2 - \sigma_3) < 0$, so kehrt sich das Verhältniszeichen in (E.23) um und der gefundene Winkel ψ stellt ein Minimum dar. Das Maximum für diesen Fall (also $(\sigma_2 - \sigma_3) < 0$) lässt sich dann aufgrund der 90°-Periodizität der Funktion $\tan 2\psi$ bezüglich ψ durch Addition von 90° zum Minimumwinkel ψ bestimmen. Auf diese Weise erhält man den zweiten Extremwert für ψ , welcher durch die Anwendung der Arcus-Funktion auf den Tangens „unterschlagen“ wurde. Somit gilt für den gesuchten Winkel ψ :

$$\psi = \begin{cases} \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\tau_{23}}{\sigma_2 - \sigma_3} \right) & \text{für } \sigma_2 - \sigma_3 > 0 \\ \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\tau_{23}}{\sigma_2 - \sigma_3} \right) + 90^\circ & \text{für } \sigma_2 - \sigma_3 < 0 \end{cases} \tag{E.24}$$

Aus Annahme 1 lässt sich Gleichung (6.99) analog wie aus Annahme 2 herleiten. Geht man von Annahme 3, also $\tau_{2\psi 3\psi} = 0$ aus, so folgt (6.99) sofort aus der Transformationsgleichung für $\tau_{2\psi 3\psi}$ in (E.19).

E.4 Zusammenstellung der Gleichungen für das LaRC04-Bruchkriterium

In Tabelle E.1 sind die wichtigsten Gleichungen für das LaRC04-Bruchkriterium zusammengestellt. Für die Bewertung eines Spannungszustandes bei mehrschichtigen Laminaten werden hier die In-situ-Festigkeiten benötigt, deren Berechnung im Abschnitt E.1 erläutert ist. Weiterhin ist für die Bewertung der Versagensgefahr unter Druckbelastung in Faserrichtung die Transformation der Spannungen in ein fehlgerichtetes Koordinatensystem notwendig. Die Gleichungen hierzu finden sich in Abschnitt 6.2.4.2.4.

Tabelle E.1 Gleichungen für das LaRC04-Bruchkriterium

Faserbruchbedingungen:		
$\sigma_1 > 0:$		$\frac{\sigma_1}{R_{\parallel}'} = 1$
$\sigma_1 < 0:$	$\sigma_{2m} < 0:$	$\left(\frac{\tau_{1m2m}}{R_{\perp\parallel is} - \eta_{n1} \sigma_{2m}} \right)^2 = 1$
	$\sigma_{2m} \geq 0:$	$(1-g) \frac{\sigma_{2m}}{R_{\perp\parallel is}'} + g \left(\frac{\sigma_{2m}}{R_{\perp\parallel is}'} \right)^2 + \frac{\Lambda_{23}^o \tau_{2m3\psi}^2 + \chi(\gamma_{1m2m})}{\chi(\varepsilon R_{\perp\parallel is})} = 1$
Zwischenfaserbruchbedingungen:		
$\sigma_2 > 0:$		$(1-g) \frac{\sigma_2}{R_{\perp\parallel is}'} + g \left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp\parallel is}'} \right)^2 + \frac{\Lambda_{23}^o \tau_{23}^2 + \chi(\gamma_{12})}{\chi(\varepsilon R_{\perp\parallel is})} = 1$
$\sigma_2 < 0:$	$\sigma_1 < -R_{\perp}^c:$	$\left(\frac{\tau_{nt}^m}{R_{\perp\perp}^A - \eta_{nt} \sigma_n^m} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}^m}{R_{\perp\parallel is} - \eta_{n1} \sigma_n^m} \right)^2 = 1$
	$\sigma_1 \geq -R_{\perp}^c:$	$\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A - \eta_{nt} \sigma_n} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel is} - \eta_{n1} \sigma_n} \right)^2 = 1$
mit $g = \frac{\Lambda_{22}^o R_{\perp\parallel is}'^2}{\chi(\varepsilon R_{\perp\parallel is})}$ und $\sigma_n^m, \tau_{nt}^m, \tau_{n1}^m$ nach den Gleichungen (6.103)		

F Auswahl eines geeigneten Elementtyps für Vergleich zwischen optimalitätskriterien- und sensitivitätsbasiertem Topologieoptimierungsalgorithmus

Um den in Abschnitt 7.1.1 vorgestellten Topologieoptimierungsalgorithmus sinnvoll mit einem kommerziellen Algorithmus vergleichen zu können, bedarf es für beide Problemstellungen der Verwendung derselben bzw. einer möglichst ähnlichen Finite-Element-Formulierung. Da diese bei den genutzten Programmsystemen nicht genau bekannt sind, soll im Folgenden durch einen Vergleich der mit den verschiedenen Elementformulierungen erzielten Ergebnisse bei einem Beispielproblem eine entsprechende Elementauswahl getroffen werden.

Wie in Abschnitt 7.1.2 erläutert, werden für das Topologieoptimierungsproblem der „Brückenstruktur“ finite Elemente mit quadratischer Ansatzfunktion verwendet, um das Auftreten von Checkerboarding zu vermeiden. Nachfolgend sind der Vollständigkeit halber jedoch auch finite Elemente mit linearer Ansatzfunktion berücksichtigt.

Die zur Lösung dieses ebenen Problems in Frage kommenden Elementtypen sind Scheiben- und Schalenelemente. Zum Vergleich wird das in Abb. 7.4 definierte Brückenproblem als Vollmodell, bei dem alle Elemente die Dichte 1 besitzen, gerechnet und die maximale Verschiebung in Belastungsrichtung, die maximale von Mises-Spannung und die Verzerrungs-

energie der gesamten Struktur für jeden Elementtyp ausgewertet. In Tabelle F.1 und Tabelle F.2 sind zunächst die Ergebnisse der Rechnungen mit den verschiedenen Elementtypen dargestellt. Die Nomenklatur der Elemente folgt im FE-System Abaqus entsprechend der Elementeneigenschaften. Ebene Elemente, die einen ebenen Spannungszustand voraussetzen und nur Verschiebungsfreiheitsgrade in der Elementebene besitzen (Scheibenelemente), tragen die Bezeichnung „CPS...“ für **C**ontinuum **P**lane **S**tress, räumliche Schalenelemente, die auch Verschiebungsfreiheitsgrade in Elementdickenrichtung sowie Rotationsfreiheitsgrade aufweisen, werden mit „S...“ benannt. Die darauf folgende Ziffer gibt die Anzahl der Knoten des Elements an, wobei „4“ für ein Rechteckelement mit linearer Ansatzfunktion und „8“ für ein Rechteckelement mit quadratischer Ansatzfunktion und entsprechenden Zwischenknoten steht. Hiernach folgt bei einigen Elementen noch der Buchstabe „I“ für „Inkompatible Moden“ oder „R“ für „Reduzierte Integration“. Folgt darauf noch die Ziffer „5“, so bedeutet dies, dass das entsprechende Element nur 5 Freiheitsgrade pro Knoten besitzt, wobei der Rotationsfreiheitsgrad um die Elementnormale fehlt.

Das im kommerziellen, sensitivitätsbasierten Topologieoptimierungsprogramm Altair Optistruct integrierte FE-Paket bietet lediglich zwei viereckige Elementtypen an, die für ebene Probleme geeignet sind. Dies sind Schalenelemente mit linearer (CQUAD4) und quadratischer (CQUAD8) Ansatzfunktion, wobei, wie schon erwähnt, nur nach einem dem CQUAD8-Element entsprechenden Abaqus-Element gesucht wird.

Zunächst würde man erwarten, dass die Ergebnisse eines der Abaqus-Schalenelemente denen des CQUAD8-Elementes des sensitivitätsbasierten Algorithmus am nächsten kommen. Es fällt auch auf, dass das S8R-Element hier sehr ähnliche Resultate erzielt. Allerdings handelt es sich beim S8R-Element um ein Schalenelement mit sechs Freiheitsgraden pro Knoten, wohingegen das CQUAD8-Element nur 5 Freiheitsgrade pro Knoten besitzt (kein „Drillfreiheitsgrad“). Die Ergebnisse des CPS8R-Elementes stimmen noch genauer mit denen des CQUAD8 Elementes überein. Beim CPS8-Element handelt es sich zwar um ein Scheibenelement, welches nur Verschiebungsfreiheitsgrade in der Ebene besitzt, jedoch kommt dessen Formulierung aufgrund des ebenfalls fehlenden Drillfreiheitsgrades der des CQUAD8-Elementes am nächsten, da dessen Plattenfreiheitsgrade bei diesem ebenen Problem nicht aktiviert werden. Somit wird für die vergleichende Betrachtung des sensitivitätsbasierten und des selbst entwickelten optimalitätskriterienbasierten Topologieoptimierungsalgorithmus für das Brückenproblem das CPS8R-Element ausgewählt.

Abschließend sei noch ausdrücklich erwähnt, dass es bei dieser Untersuchung nicht darum ging einen Elementtyp auszuwählen, dessen Ergebnisse möglichst nah an der exakten Lösung des Problems liegen, vielmehr sollte nur die Vergleichbarkeit der Topologieoptimierungsergebnisse bei Nutzung verschiedener FE-Systeme sichergestellt werden. Detailliertere Informationen zu den hier genutzten Elementtypen kann man [37] bzw. [1] entnehmen.

Tabelle F.1 Berechnungsergebnisse mit verschiedenen finite Elementtypen in Abaqus

Finite Elementtypen des FE-Systems Abaqus										
	Scheibenelemente					Schalenelemente				
Ansatzfunktion	linear			quadratisch		linear			quadratisch	
Elementbezeichnung	CPS4	CPS4R	CPS4I	CPS8R	CPS8	S4R	S4	S4R5	S8R5	S8R
Max. Verschiebung [mm]	7,033	8,656	7,137	7,705	7,538	8,652	7,137	8,656	8,455	7,651
Max. von Mises-Spannung [N/mm^2]	646,7	962,5	693,6	553,1	607,5	962,5	693,6	962,5	516,0	562,9
Verzerrungsenergie [Nm]	251,1	317,8	256,2	284,6	276,3	317,6	256,2	317,8	309,7	280,4

Tabelle F.2 Berechnungsergebnisse mit den finite Elementtypen in Altair Optistruct

Finite Elementtypen des sensitivitätsbasierten Algorithmus in Altair Optistruct		
	Schalenelemente	
Ansatzfunktion	linear	quadratisch
Elementbezeichnung	CQUAD4	CQUAD8
Max. Verschiebung [mm]	7,12	7,7
Max. von Mises-Spannung [N/mm^2]	690,3	553,7
Verzerrungsenergie [Nm]	255,5	284,0

Literaturverzeichnis

- [1] Altair HyperWorks (2009): Optistruct Reference Guide, Version 10.0.
- [2] Altenbach, J. und Altenbach, H. (1994): Einführung in die Kontinuumsmechanik. Teubner-Verlag, Stuttgart.
- [3] Altenbach, H., Altenbach, J. und Kissing, W. (2004): Mechanics of Composite Structural Elements. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg.
- [4] Argon, A. S. (1972): Fracture of Composites. In: Herman, H., Treatise on Materials Science and Technology, Volume 1, Academic Press, New York, S. 79-114.
- [5] Avriel, M. (2003): Nonlinear Programming: Analysis and Methods. Dover Publications, Mineola/New York.
- [6] Azzi, V. D. und Tsai, S. W. (1965): Anisotropic Strength of Composites. Experimental Mechanics, Volume 5, Number 9, S. 283-288.
- [7] Balabanov, V. O. und Venter, G. (2004): Response Surface Optimization with Discrete Variables. 10th AIAA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, 30. August - 1. September 2004, Albany, NY.
- [8] Balas, E. (1965): An Additive Algorithm for Solving Linear Programs with Zero-One Variables. Operations Research, Volume 13, Number 4, S. 517-546.
- [9] Balas, E. (1967): Discrete Programming by the Filter Method. Operations Research, Volume 15, Number 5, S. 915-957.
- [10] Bathe, K.-J. (2002): Finite-Elemente-Methoden, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg.
- [11] Bauer, M., Wurzel, R., Klauke, K. und Höppner, T. (2009): (Neue) Recyclingfähige Luftfahrtharze. Vortrag 15. Nationales Symposium SAMPE Deutschland e.V., 18. und 19. Februar 2009, Berlin.

- [12] Becker, W. und Gross, D. (2002): *Mechanik elastischer Körper und Strukturen*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg.
- [13] Bendsøe, M. P. (1989): Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Volume 1, Number 4, S. 193-202.
- [14] Bendsøe, M. P. (1995): *Optimization of Structural Topology, Shape, and Material*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg.
- [15] Bendsøe, M. P. und Diaz, A. R. (1992): Shape Optimization of Structures for Multiple Loading Conditions Using a Homogenization Method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Volume 4, Number 1, S. 17-22.
- [16] Bendsøe, M. P., Diaz, A. R. und Kikuchi, N. (1993): Topology and Generalized Layout Optimization of Elastic Structures. In: M. P. Bendsøe und C. A. Mota Soares, *Topology Design of Structures*, Kluwer Academic Publishers, S. 159-206.
- [17] Bendsøe, M. P. und Sigmund, O. (2003): *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg.
- [18] Bennett, J. A. und Botkin, M. E. (1985): Structural Shape Optimization with Geometric Problem Description and Adaptive Mesh Refinement. *AIAA Journal*, Volume 23, Number 3, S. 458-464.
- [19] Bernoulli, Jakob (1697): Lösung der Aufgaben meines Bruders, dem ich dafür andere vorlege. In: Stäckel, P., *Abhandlungen über Variationsrechnung*, Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1894.
- [20] Bernoulli, Johann (1696): Einladung zur Lösung eines neuen Problems. In: Stäckel, P., *Abhandlungen über Variationsrechnung*, Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1894.
- [21] Bernoulli, Johann (1697): Die Krümmung eines Lichtstrahls in ungleichförmigen Medien und die Lösung des Problems, die Brachistochrone zu finden, das heisst, die Curve, auf welcher ein schwerer Punkt von einer gegebenen Stelle zu einer anderen gegebenen Stelle auf kürzester Zeit herabläuft, sowie über die Construction der Synchrone oder der Welle der Strahlen. In: Stäckel, P., *Abhandlungen über Variationsrechnung*, Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1894.

- [22] Bestle, D. (1994): Analyse und Optimierung von Mehrkörpersystemen. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg.
- [23] Betten, J. (2001): Kontinuumsmechanik: Elastisches und inelastisches Verhalten isotroper und anisotroper Stoffe. 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
- [24] Braess, D. (2007): Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie. 4. Auflage, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg.
- [25] Broyden, C.G. (1965): A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equations. *Math. Comp.* 19, S. 577-593.
- [26] Broyden, C.G. (1970): The Convergence of a Class of Double-Rank Minimization Algorithms. *Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications*, Volume 6, S. 222-231.
- [27] Bruggi, M. (2008): On an Alternative Approach to Stress Constraints Relaxation in Topology Optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Volume 36, Number 2, S. 125-141.
- [28] Bruyneel, M. und Duysinx P. (2006): Note on Singular Optima in Laminate Design Problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Volume 31, Number 2, S. 156-159.
- [29] Cervellera, P., Zhou, M. und Schramm, U. (2005): Optimization Driven Design of Shell Structures under Stiffness, Strength and Stability Requirements. 6th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, 30 May - 03 June 2005, Rio de Janeiro, Brazil.
- [30] Chang, F. K. und Chen, M. H. (1987): The In Situ Ply Shear Strength Distributions in Graphite/Epoxy Laminated Composites. *Journal of Composite Materials*, Volume 21, S. 708-733.
- [31] Cheng, G. D. und Guo, X. (1997): ε -Relaxed Approach in Structural Topology Optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Volume 13, Number 4, S. 258-266.
- [32] Choi, S.-K., Grandhi, R. V. und Canfield, R. A. (2007): Reliability-Based Structural Design. Springer-Verlag, London.

- [33] Cuntze, R., Deska, R., Szelinski, B., Jeltsch-Fricker, R., Meckbach, S., Huybrechts, D., Kopp, J., Kroll, L., Gollwitzer, S. und Rackwitz, R. (1997): Neue Bruchkriterien und Festigkeitsnachweise für unidirektionalen Faserkunststoffverbund unter mehrachsiger Beanspruchung – Modellbildung und Experimente. Fortschrittsberichte VDI, Reihe 5, Nr. 506, Düsseldorf.
- [34] Dalton, R. E. und Llewellyn, R. W. (1966): An Extension of the Gomory Mixed-Integer Algorithm to Mixed-Discrete Variables. *Management Science*, Volume 12, Number 7, S. 569-575.
- [35] Daniel, I. M. und Ishai, O. (2006): *Engineering Mechanics of Composite Materials*. 2. Auflage, Oxford University Press, New York/Oxford.
- [36] Dantzig, G. B. (1966): *Lineare Programmierung und Erweiterungen*. Deutsche Übersetzung von A. Jaeger, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
- [37] Dassault Systèmes (2007): *Abaqus Online Documentation*, Version 6.7.
- [38] Davidon, W. C. (1959): Variable Metric Method for Minimization. Argonne National Laboratory, Rept. ANL-5990 (Rev.).
- [39] Davidon, W. C. (1975): Optimally Conditioned Optimization Algorithms without Line Searches. *Mathematical Programming*, Vol. 9, S. 1-30.
- [40] Díaz, A. und Sigmund, O. (1995): Checkerboard Patterns in Layout Optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Volume 10, Number 1, S. 40-45.
- [41] Du, X. und Chen, W. (2004): Sequential Optimization and Reliability Assessment Method for Efficient Probabilistic Design. *Journal of Mechanical Design*, Volume 126, Issue 2, S. 225-233.
- [42] Du, X., Guo, J. und Beeram, H. (2008): Sequential Optimization and Reliability Assessment for Multidisciplinary Systems Design. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Volume 35, Number 2, S. 117-130.
- [43] Duysinx, P. und Bendsøe, M. P. (1998): Topology Optimization of Continuum Structures with Local Stress Constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 43, Issue 8, S.1453-1478.

- [44] Dvorak, G. J. und Laws, N. (1987): Analysis of Progressive Matrix Cracking in Composite Laminates II. First Ply Failure. *Journal of Composite Materials*, Volume 21, S. 309-329.
- [45] Edwards, C. S., Kim, H. A. und Budd, C. J. (2007): An Evaluative Study on ESO and SIMP for Optimising a Cantilever Tie-Beam. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Volume 34, Number 5, S. 403-414.
- [46] Eshelby, J. D. (1957): The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems. *Proceedings of the Royal Society A*, Volume 241, Number 1226, S. 376-396.
- [47] Euler, L. (1744): Methode Curven zu finden, denen eine Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade zukommt oder Lösung des isoperimetrischen Problems wenn es im weitesten Sinne des Wortes aufgefasst wird. In: Stäckel, P., *Abhandlungen über Variationsrechnung*, Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1894.
- [48] Fermat, P. de (1629): *Abhandlungen über Maxima und Minima*. In: Ostwald's *Klassiker der exakten Wissenschaften*, Akademische Verlagsanstalt, Leipzig, 1934.
- [49] Fiacco, A. V. und McCormick, G. P. (1968): *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. John Wiley and Sons, New York.
- [50] Flemming, M., Ziegmann, G. und Roth, S. (1995): *Faserverbundbauweisen: Fasern und Matrices*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg.
- [51] Fletcher, R. und Powell, M. J. D. (1963): A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization. *The Computer Journal*, Volume 6, Number 2, S. 163-168.
- [52] Fletcher, R. (1970): A New Approach to Variable Metric Algorithms. *The Computer Journal*, Volume 13, Number 3, S. 317-322.
- [53] Fletcher, R. (1987): *Practical Methods of Optimization*. 2nd Edition, John Wiley & Sons, Chichester/New York/Brisbane/Toronto/Singapore.
- [54] Fleury, C. und Braibant, V. (1986): Structural Optimization: A New Dual Method Using Mixed Variables. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 23, S. 409-428.

- [55] Föllinger, O. (1994): *Optimale Regelung und Steuerung*. 3. Auflage, Oldenbourg-Verlag, München.
- [56] Garnich, M. R. und Akula, V. M. K. (2009): Review of Degradation Models for Progressive Failure Analysis of Fiber Reinforced Polymer Composites. *Applied Mechanics Reviews*, Volume 62, Issue 1, S. 010801-1 – 010801-33.
- [57] Gärtner, B., Henk, M. und Ziegler, G. M. (1998): Randomized Simplex Algorithms on Klee-Minty Cubes. *Combinatorica*, Volume 18, Number 3, S. 349-372.
- [58] Gay, D., Hoa, S. V. und Tsai, S. W. (2003): *Composite Materials: Design and Applications*. CRC Press, Boca Raton.
- [59] Geiger, C. und Kanzow, Ch. (2002): *Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
- [60] Ghiasi, H., Pasini, D. und Lessard, L. (2009): Optimum Stacking Sequence Design of Composite Materials Part I: Constant Stiffness Design. *Composite Structures*, Volume 90, Issue 1, S. 1-11.
- [61] Ghiasi, H., Fayazbakhsh, K., Pasini, D. und Lessard, L. (2010): Optimum Stacking Sequence Design of Composite Materials Part II: Variable Stiffness Design. *Composite Structures*, Volume 93, Issue 1, S. 1-13.
- [62] Ghugal, Y. M. und Shimpi, R. P. (2002): A Review of Refined Shear Deformation Theories of Isotropic and Anisotropic Laminated Plates. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Volume 21, Number 9, S. 775-813.
- [63] Girkmann, K. (1956): *Flächentragwerke*. 4. Auflage, Springer-Verlag, Wien.
- [64] Glover, F. (1989): Tabu Search – Part I. *ORSA Journal on Computing*, Volume 1, Number 3, S. 190-206.
- [65] Glover, F. (1990): Tabu Search – Part II. *ORSA Journal on Computing*, Volume 2, Number 1, S. 4-32.
- [66] Goldfarb, D. (1970): A Family of Variable Metric Updates Derived by Variational Means. *Mathematics of Computation*, Volume 24, S. 23-26.

- [67] Gol'denblat, I. I. und Kopnov, V. A. (1965): Strength of Glass-Reinforced Plastics in the Complex Stress-State. *Mekhanika Polimerov*, Volume 1, Number 2, S. 70-78.
- [68] Gomory, R. E. (1958): Outline of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs. *Bulletin of the American Mathematical Society* 64, S. 275-278.
- [69] Gomory, R. E. (1960): An Algorithm for the Mixed Integer Problem. *Notes on Linear Programming and Extensions – Part 54*, Rand Report, RM-2597.
- [70] Gross, D., Hauger, W., Schnell, W. und Wriggers, P. (2002): *Technische Mechanik 4: Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. 4. Auflage, Springer-Verlag, Berlin.
- [71] Gross, D. und Seelig, T. (2007): *Bruchmechanik*. 4. Auflage, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg.
- [72] Großmann, Ch. und Terno, J. (1993): *Numerik der Optimierung*. Teubner-Verlag, Stuttgart.
- [73] Guilherme, C. E. M. und Fonseca, J. S. O. (2007): Topology Optimization of Continuum Structures with ε -Relaxed Stress Constraints. *Mechanics of Solids in Brazil* 2007, S. 239-250.
- [74] Haftka, R. T. und Gürdal, Z. (1993): *Elements of Structural Optimization*. Third revised and expanded edition, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.
- [75] Halpin, J. C. (1969): Effects of Environmental Factors on Composite Materials. Technical Report AFML-TR-67-423, Air Force Materials Laboratory.
- [76] Halpin, J. C. und Kardos, J. L. (1976): The Halpin-Tsai Equations: A Review. *Polymer Engineering and Science*, Volume 16, Number 5, S. 344-352.
- [77] Han, S. P. (1976): Superlinearly Convergent Variable Metric Algorithms for General Nonlinear Programming Problems. *Mathematical Programming*, Volume 11, S. 263-282.
- [78] Hart-Smith, L. J. (2004): Predictions of the Original and Truncated Maximum-Strain Failure Models for Certain Fibrous Composite Laminates. In: Hinton, M. J., Kaddour, A. S. und Soden, P. D., *Failure Criteria in Fibre Reinforced Polymer Composites: The World-Wide Failure Exercise*, Elsevier, Amsterdam, S. 179-218.

- [79] Harzheim, L. (2008): *Strukturoptimierung: Grundlagen und Anwendungen*. 1. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main.
- [80] Hashin, Z. (1980): Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites. *Journal of Applied Mechanics*, Volume 47, Issue 2, S. 329-334.
- [81] Hashin, Z. und Rotem, A. (1973): A Fatigue Failure Criterion for Fibre Reinforced Materials. *Journal of Composite Materials*, Volume 7, S. 448-464.
- [82] Hemp, W. S. (1973): *Optimum Structures*. Clarendon Press, Oxford.
- [83] Hill, R. (1948): A Theory of Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Materials. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Volume 193, Issue 1033, S. 281-297.
- [84] Hill, R. (1998): *The Mathematical Theory of Plasticity*. New Edition, Clarendon Press, Oxford.
- [85] Hinton, M. J., Kaddour, A. S. und Soden, P. D. (2004): *Failure Criteria in Fibre Reinforced Polymer Composites: The World-Wide Failure Exercise*. A Composite Science and Technology Compendium. Elsevier-Verlag, Amsterdam.
- [86] Hitchcock, F. L. (1941): The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities. *Journal of Mathematics and Physics*, Volume 20, S. 224-230.
- [87] Hoffman, O. (1967): The Brittle Strength of Orthotropic Materials. *Journal of Composite Materials*, Volume 1, Number 2, S. 200-206.
- [88] Holzapfel, G. A. (2000): *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. Wiley & Sons, Chichester.
- [89] Imam, M. H. (1982): Three-Dimensional Shape Optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 18, S. 661-673.
- [90] Jog, C. S. und Haber, R. B. (1996): Stability of Finite Element Models for Distributed-Parameter Optimization and Topology Design. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 130, S. 203-226.
- [91] Jones, R. M. (1999): *Mechanics of Composite Materials*. 2nd Edition, Taylor & Francis, Philadelphia.

- [92] Karmarkar, N. (1984): A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming. *Combinatorica*, Volume 4, Number 4, S. 373-395.
- [93] Karush, W. (1939): Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints. M.Sc. Dissertation, Dept. of Mathematics, Univ. of Chicago, Chicago, Illinois.
- [94] Keskin, A. (2006): Process Integration and Automated Multi-Objective Optimization Supporting Aerodynamic Compressor Design. Dissertation, Brandenburgische Technische Universität Cottbus.
- [95] Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D. und Vecchi, M. P. (1983): Optimization by Simulated Annealing. *Science*, Volume 220, Number 4598, S. 671-680.
- [96] Klauke, T. (2003): Neuere Bruchkriterien für den Zwischenfaserbruch und FE-Anwendung auf reale CFK-Bauteile. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Strukturmechanik und Fahrzeugschwingungen, Brandenburgische Technische Universität Cottbus.
- [97] Klee, V. und Minty, G. J. (1972): How good is the simplex algorithm? Inequalities III, edited by O. Shisha, Academic Press, S. 159-175.
- [98] Knops, M. (2008): Analysis of Failure in Fiber Polymer Laminates: The Theory of Alfred Puck. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
- [99] Kober, M. (2005): Strukturoptimierung von Triebwerksbauteilen. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Strukturmechanik und Fahrzeugschwingungen, Brandenburgische Technische Universität Cottbus.
- [100] Kober, M. und Kühhorn, A. (2010): Development of Optimized Washer-Shape for Damage-Free Load Application to Composites. *Composite Structures*, Volume 92, Issue 8, S.1985-1991.
- [101] Kober, M., Kühhorn, A., Klauke, K. und Lenk, O. (2006): Integration of an Advanced Fracture Plane Based Failure Criterion into a Parameter Optimisation with Altair HyperStudy. 1st Altair HyperWorks Users Meeting, 28. November 2006, Böblingen.
- [102] Koschnick, F. (2004): Geometrische Locking-Effekte bei Finiten Elementen und ein allgemeines Konzept zu ihrer Vermeidung. Dissertation, Technische Universität München.

- [103] Kroll, L. (2005): Berechnung und technische Nutzung von anisotropiebedingten Werkstoff- und Struktureffekten für multifunktionale Leichtbauanwendungen. Habilitationsschrift, Technische Universität Dresden.
- [104] Kuhn, H. W. und Tucker, A. W. (1951): Nonlinear Programming. In: Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley, California, S. 481-492.
- [105] Kurnatowski, B. (2009): Zweiskalensimulation von mikroheterogenen Strukturen aus spröden Faserverbundwerkstoffen. Dissertation, Universität Kassel.
- [106] Lankford, J. (1995): Compressive Failure of Fibre-Reinforced Composites: Buckling, Kinking and the Role of the Interphase. *Journal of Materials Science*, Volume 30, Number 17, S. 4343-4348.
- [107] Laws, N. (1977): A Note on Interaction Energies Associated with Cracks in Anisotropic Solids. *Philosophical Magazine*, Volume 36, Issue 2, S. 367-372.
- [108] Le, C., Bruns, T. und Tortorelli, D. (2011): A Gradient-Based, Parameter-Free Approach to Shape Optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 200, Issues 9-12, S. 985-996.
- [109] Lempke, J. (2010): Recycling von großflächigen FKV-Bauteilen. Vortrag Internationale AVK-Tagung, Essen, 14.09.2010.
- [110] Liu, H., Chen, W., Sheng, J. und Gea, H. C. (2003): Application of the Sequential Optimization and Reliability Assessment Method to Structural Design Problems. *ASME Conference Proceedings*, Volume 2: 29th Design Automation Conference, Parts A and B / Design Automation, Paper no. DETC2003/DAC-48710, S. 63-72.
- [111] Liu, K.-S. und Tsai, S. W. (2004): A Progressive Quadratic Failure Criterion for a Laminate. In: Hinton, M. J., Kaddour, A. S. und Soden, P. D., *Failure Criteria in Fibre Reinforced Polymer Composites: The World-Wide Failure Exercise*, A Composite Science and Technology Compendium. Elsevier-Verlag, Amsterdam, S.334-351.
- [112] Lopez, R. H., Luersen, M. A. und Cursi, E. S. (2009): Optimization of Laminated Composites Considering Different Failure Criteria. *Composites Part B: Engineering*, Volume 40, Issue 8, S. 731-740.

- [113] Maimí, P., Camanho, P. P., Mayugo, J.-A. und Dávila, C. G. (2006): A Thermodynamically Consistent Damage Model for Advanced Composites. NASA/TM-2006-214282.
- [114] Makky, S. M. und Ghalib, M. A. (1979): Design for Minimum Deflection. *Engineering Optimization*, Volume 4, Number 1, S. 9-13.
- [115] Mattheck, C. (1990): Engineering Components Grow Like Trees. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*, Volume 21, Issue 4, S. 143-168.
- [116] Mattheck, C. (1990): Design and Growth Rules for Biological Structures and their Application to Engineering. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Volume 13, Issue 5, S. 535-550.
- [117] Mattheck, C. und Bethge, K. (1998): The Structural Optimization of Trees. *Naturwissenschaften*, Volume 85, Number 1, S. 1-10.
- [118] Mattheck, C. und Burkhardt, S. (1990): A New Method of Structural Shape Optimization Based on Biological Growth. *International Journal of Fatigue*, Volume 12, Number 3, S. 185-190.
- [119] Matzenmiller, A., Lubliner, J. und Taylor, R. L. (1995): A Constitutive Model for Anisotropic Damage in Fiber-Composites. *Mechanics of Materials*, Volume 20, Issue 2, S. 125-152.
- [120] McKay, M. D., Beckman, R. J. und Conover, W. J. (1979): A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code. *Technometrics*, Volume 21, Number 2, S. 239-245.
- [121] Meske, R., Lauber, B. und Schnack, E. (2006): A New Optimality Criteria Method for Shape Optimization of Natural Frequency Problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Volume 31, Number 4, S. 295-310.
- [122] Meske, R., Sauter, J. und Schnack, E. (2005): Nonparametric Gradient-Less Shape Optimization for Real-World Applications. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Volume 30, Number 3, S. 201-218.
- [123] Michaeli, W., Huybrechts, D. und Wegener M. (1994): Dimensionieren von Faser-verbundkunststoffen: Einführung und praktische Hilfen. Hanser Fachbuchverlag, München.

- [124] Michell, A. G. M. (1904): The Limits of Economy of Material in Frame-Structures. *Philosophical Magazine*, Volume 8, S. 589-597.
- [125] Mohr, Ch. O. (1900): Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials. *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*, Band 24, Heft 45, S. 1524-1530, Heft 46, S. 1572-1577.
- [126] Moser, K. (1992): *Faser- Kunststoff- Verbund: Entwurfs- und Berechnungsgrundlagen*. VDI-Verlag, Düsseldorf.
- [127] MSC.Software (2005): *MSC.Nastran 2005 – Quick Reference Guide: Volume II*. MSC.Software Cooperation.
- [128] Nelder, J. A. und Mead, R. A. (1965): A Simplex Method for Function Minimization. *Computer Journal* 7, S. 308-313.
- [129] Neumann, J. von (1928): Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*, Volume 100, Nummer 1, S. 295-320, Springer, Berlin/Heidelberg.
- [130] Nocedal, J. und Wright, S. J. (1999): *Numerical Optimization*. Springer-Verlag, New York.
- [131] *Non-Linear Optimization & Reliability Workshop, 1st European HyperWorks Technology Conference*, Berlin, 2007.
- [132] Olsen, G. R. und Vanderplaats, G. N. (1989): Method for Nonlinear Optimization with Discrete Design Variables. *AIAA Journal*, Volume 27, Number 11, S. 1584-1589.
- [133] Othmer, C. (2005): *Black Box, Adjoint and Topology: CFD-Optimization in the Car Development Process*, Vortrag AK Strukturoptimierung, Stuttgart-Untertürkheim, 18.10.2005.
- [134] París, J., Navarrina, F., Colominas, I., Casteleiro, M. (2008): Topology Optimization of Continuum Structures with Local and Global Stress Constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Volume 39, Number 4, S. 419-437.
- [135] Parvizi, A., Garrett, K. W. und Bailey, J. E. (1978): Constrained Cracking in Glass Fibre-Reinforced Epoxy Cross-Ply Laminates. *Journal of Materials Science*, Volume 13, Number 1, S. 195-201.

- [136] Pedersen, P. (1998): Some General Optimal Design Results Using Anisotropic, Power Law Nonlinear Elasticity. *Structural Optimization*, Volume 15, S. 73-80.
- [137] Pedersen, P. (2000): On Optimal Shapes in Materials and Structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Volume 19, Number 3, S. 169-182.
- [138] Pinho, S. T. (2005): Modelling Failure of Laminated Composites Using Physically-Based Failure Models. PhD-Thesis, Department of Aeronautics, Imperial College London.
- [139] Pinho, S. T., Dávila, C. G., Camanho, P. P., Iannucci, L. und Robinson, P. (2005): Failure Models and Criteria for FRP under In-Plane or Three-Dimensional Stress States Including Shear Non-Linearity. NASA/TM-2005-213530.
- [140] Prager, W. und Rozvany, G. I. N. (1977): Optimal Layout of Grillages. *Journal of Structural Mechanics*, Volume 5, S. 1-18.
- [141] Powell, M. J. D. (1978): A Fast Algorithm for Nonlinearly Constrained Optimization Calculations. *Lecture Notes in Mathematics*, Volume 630, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, S. 144-157.
- [142] Puck, A. (1969): Festigkeitsberechnung an Glasfaser/Kunststoff-Laminaten bei zusammengesetzter Beanspruchung. *Kunststoffe*, Band 59, Nummer 11, S. 780-787.
- [143] Puck, A. (1996): Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten: Modelle für die Praxis. Carl Hanser Verlag, München/Wien.
- [144] Rao, S. S. (1996): *Engineering Optimization*. John Wiley & Sons, Chichester/New York/Brisbane/Toronto/Singapore.
- [145] Rohwer, K., Friedrichs, S. und Wehmeyer C. (2005): Analyzing Laminated Structures from Fibre-Reinforced Composite Material – An Assessment. *Technische Mechanik*, Band 25, Heft 1, S. 59-79.
- [146] Rosato, D. V. (1997): *Designing with Reinforced Composites: Technology - Performance - Economics*. Hanser-Verlag, München/Wien/New York.
- [147] Roos, E. und Maile K. (2008): *Werkstoffkunde für Ingenieure: Grundlagen, Anwendung, Prüfung*. 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg.

- [148] Rozvany, G. I. N. (1972): Grillages of Maximum Strength and Maximum Stiffness. *International Journal of Mechanical Science*, Volume 14, S. 651-666.
- [149] Rozvany, G. I. N. (1996): Some Shortcomings in Michell's Truss Theory. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Volume 12, Number 4, S. 244-250.
- [150] Rozvany, G. I. N. (1997): Some Shortcomings in Michell's Truss Theory (Authors Reply and Corrigendum). *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Volume 13, Number 2-3, S. 203-204.
- [151] Rozvany, G. I. N. (2001): Aims, Scope, Methods, History and Unified Terminology of Computer-Aided Topology Optimization in Structural Mechanics. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Volume 21, Number 2, S. 90-108.
- [152] Rozvany, G. I. N. (2001): Stress Ratio and Compliance Based Methods in Topology Optimization – A Critical Review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Volume 21, Number 2, S. 109-119.
- [153] Rozvany, G. I. N. (2009): A Critical Review of Established Methods of Structural Topology Optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Volume 37, Number 9, S. 217-237.
- [154] Sauter, J., Häußler, P. und Weißert, I. (2006): Topologieoptimierung von CFD Strukturen und Einbindung in den Konstruktionsprozess. Vortrag IAK Strukturoptimierung, 07.10.2006.
- [155] Save, M. und Prager, W. (1985): *Structural Optimization*. Volume 1, Optimality Criteria, Plenum Press, New York.
- [156] Schade, H. und Neemann, K. (2006): *Tensoranalysis*. 2., überarbeitete Auflage, de Gruyter, Berlin/NewYork.
- [157] Schmit, L. A. Jr. (1971): Structural Synthesis 1959-1969: A Decade of Progress. In: *Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design*, University of Alabama Press, Huntsville, S.565-634.
- [158] Schumacher, A. (2005): *Optimierung mechanischer Strukturen*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.

- [159] Schürmann, H. (2005): Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg.
- [160] Shanno, D. F. (1970): Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization. *Mathematics of Computation*, Volume 24, S. 647-656.
- [161] Sigmund, O. und Petersson, J. (1998): Numerical Instabilities in Topology Optimization: A Survey on Procedures Dealing with Checkerboards, Mesh-Dependencies and Local Minima. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Volume 16, Number 1, S. 68-75.
- [162] Stolpe, M. und Svanberg, K. (2001): On the Trajectories of Penalization Methods for Topology Optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Volume 21, Number 2, S. 128-139.
- [163] Sukumar, N. und Malsch, E. A. (2006): Recent Advances in the Construction of Polygonal Finite Element Interpolants. *Archives of Computational Methods in Engineering*, Volume 13, Number 1, S. 129-163.
- [164] Svanberg, K. (1984): On local and global minima in structural optimization. In: Atrek, A., Gallager, R. H., Ragsdell, K. M., Zienkiewicz, O. C., *New Directions in Optimum Structural Design*, John Wiley and Sons, New York, S. 327-341.
- [165] Svanberg, K. (1987): The Method of Moving Asymptotes – A new Method for Structural Optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 24, S. 359-373.
- [166] Szabó, I. (2001): *Höhere Technische Mechanik: Nach Vorlesungen (Klassiker der Technik)*. 6. Auflage, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
- [167] Talischi, C., Pereira, A., Menezes, I. F. M. und Paulino, G. H. (2008): Topology Optimization with Wachspress and Voronoi Finite Elements. *EngOpt 2008 - International Conference on Engineering Optimization*, Rio de Janeiro (Brasilien), 01. - 05. Juni 2008.
- [168] TOSCA 6.0 General Documentation. FE-Design GmbH, Karlsruhe, 2006.
- [169] Tsai, S. W. und Wu, E. M. (1971): A General Theory of Strength for Anisotropic Materials. *Journal of Composite Materials*, Volume 5, S. 58-80.

- [170] Valdebenito, M. A. und Schuëller, G. I. (2010): A Survey on Approaches for Reliability-Based Optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Volume 42, Number 5, S. 645-663.
- [171] Vallée Poussin, Ch.-J. de la (1911): Sur la méthode de l'approximation minimum. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, Bd.35 B, S. 1-16.
- [172] Vanderplaats, G. N. (1997): Structural Optimization: Where We've Been and Where We're Going. *Computer Aided Optimum Design of Structures*, Volume 5, S. 45-54.
- [173] VDI-Richtlinie 2014 Blatt 3 (2006): Entwicklung von Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbunden: Berechnungen. Verein Deutscher Ingenieure.
- [174] Voigt, M. (2008): Grundlagen der Probabilistik. Vortrag 1. Dresdner Probabilistik Workshop, 9.-10. Oktober 2008, Dresden.
- [175] Wang, G. G. (2003): Adaptive Response Surface Method Using Inherited Latin Hypercube Design Points. *Journal of Mechanical Design*, Volume 125, S. 210-220.
- [176] Wronski, A. S. und Parry, T. V. (1982): Compressive Failure and Kinking in Uniaxially Aligned Glass-Resin Composite under Superposed Hydrostatic Pressure. *Journal of Materials Science*, Volume 17, Number 12, S. 3656-3662.
- [177] Xie, Y. M. und Steven, G. P. (1992): Shape and Layout Optimization via an Evolutionary Procedure. In: *Proceedings of International Conference on Computational Engineering Science*, Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong, S. 471.
- [178] Xie, Y. M. und Steven, G. P. (1993): A Simple Evolutionary Procedure for Structural Optimization, *Computers & Structures*, Volume 49, Number 5, S. 885-896.
- [179] Xie, Y. M. und Steven, G. P. (1997): *Evolutionary Structural Optimization*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
- [180] Yang, R. J. und Chen, C. J. (1996): Stress-Based Topology Optimization. *Structural Optimization*, Volume 12, S. 98-105.
- [181] Yang, R. J., Lee, A. und McGeen, D. T. (1992): Application of Basis Function Concept to Practical Shape Optimization Problems. *Structural Optimization*, Volume 5, S. 55-63.

- [182] Zakharov, K. V. (1963): On the Strength of Laminated Plastics. *Plasticheskiye Massy (Plastics)*, Number 6, S. 47-50.

- [183] Zhou, M. und Rozvany, G. I. N. (2001): On the Validity of ESO Type Methods in Topology Optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Volume 21, Number 1, S. 80-83.

- [184] Zoutendijk, G. (1960): *Methods of Feasible Directions*. Elsevier, Amsterdam.