



Über einige Aspekte der Berechnung von Bauteilen in Composite-Bauweise

Dr.-Ing. Christian Mittelstedt

Senior Engineer Composites, ELAN GmbH

Channel Tower Harburg, Karnapp 25, D-21079 Hamburg

christian.mittelstedt@airbus.com



Gliederung

- 1. Einführung**
- 2. Klassische Laminattheorie**
- 3. Flanschbeulen dünnwandiger Composite-Träger**
- 4. Randeffekte in Laminatplatten**
- 5. Zusammenfassung und Ausblick**

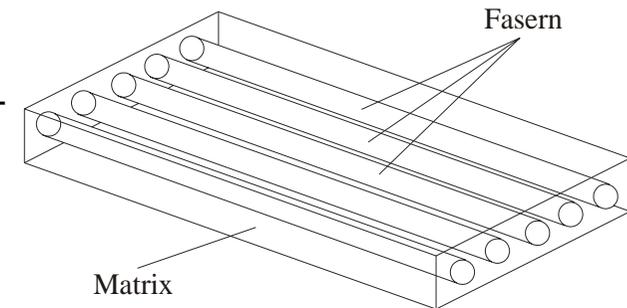
Gliederung

- 1. Einführung**
2. Klassische Laminattheorie
3. Flanschbeulen dünnwandiger Composite-Träger
4. Randeckeffekte in Laminatplatten
5. Zusammenfassung und Ausblick

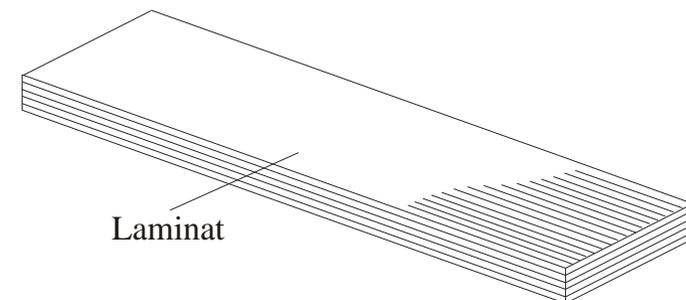
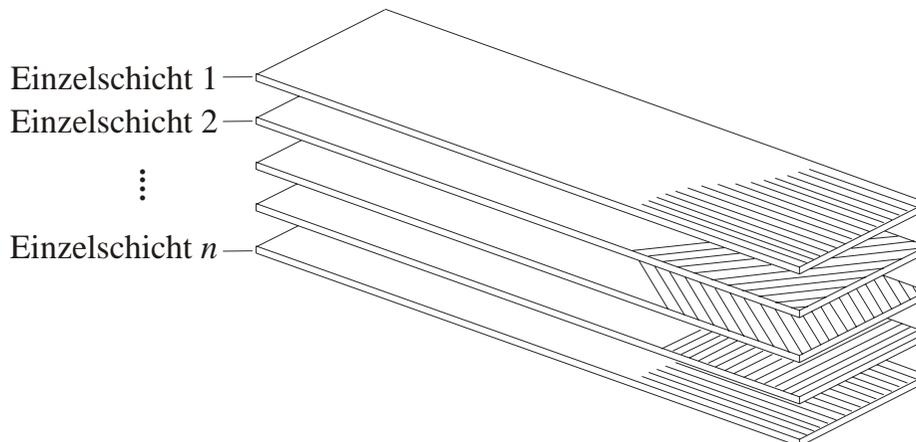
Definition

Verbundwerkstoffe / Composites: Kombination aus mindestens zwei unterschiedlichen Werkstoffen zu einem neuen Werkstoff mit neuen, meist verbesserten / optimierten Eigenschaften.

Faserverbund-Werkstoffe: Werkstoff-Verbund aus Matrixmaterial (z.B. Kunststoff, Epoxidharz etc.) und Fasermaterial (Glasfaser, Kohlefaser etc.).



Laminat: Schichtweise Anordnung von Faserverbund-Werkstofflagen.

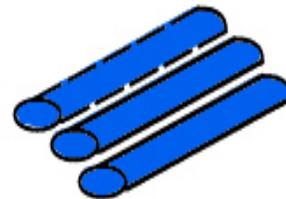


Definition

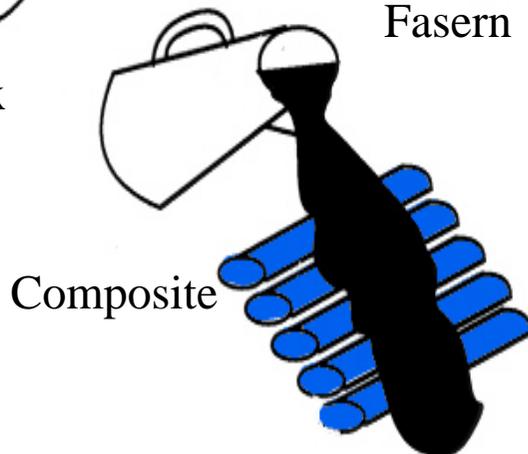
Die Bestandteile



Matrix

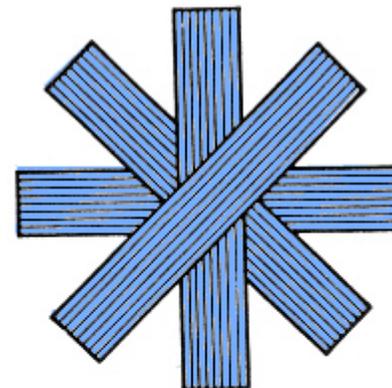


Fasern

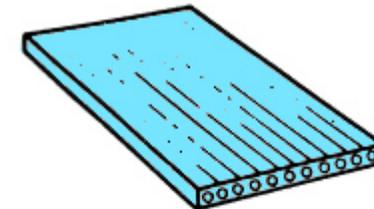


Composite

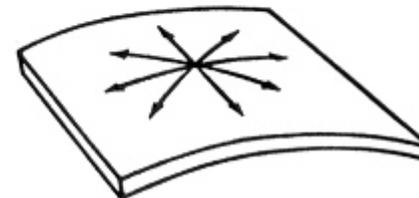
Die Composite-Struktur



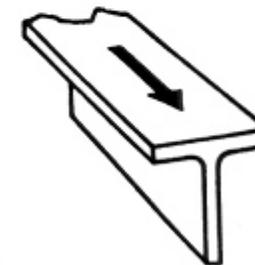
Winkelverbund



Unidirektionaler Verbund



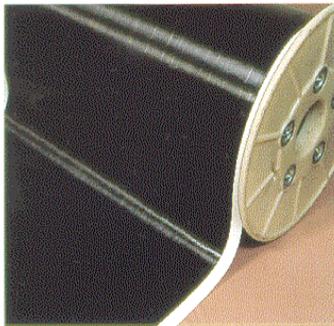
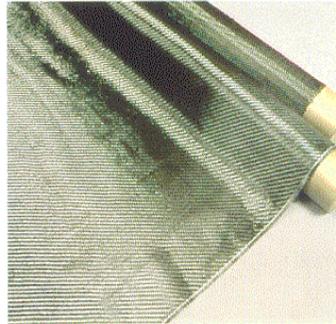
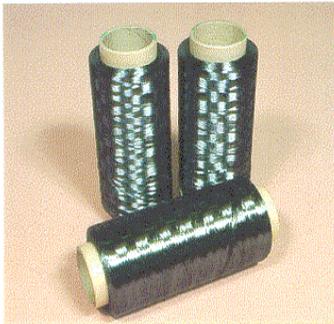
Mehrachsige
Beanspruchung



Unidirektionale
Beanspruchung

Faserhalbzeuge

Kohlefaserhalbzeuge



Glasfaserhalbzeuge

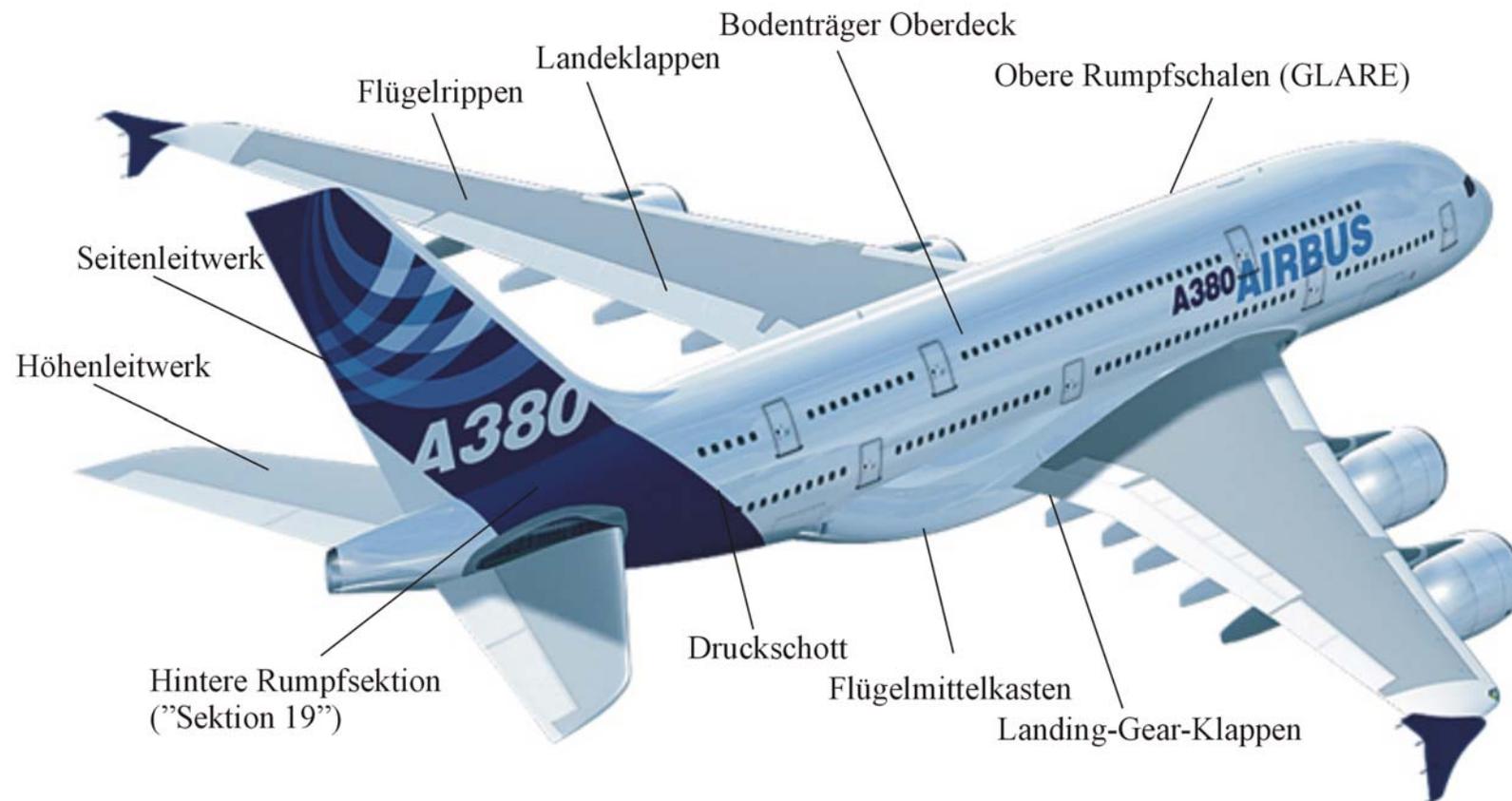


Aramidfaserhalbzeuge



Einsatz im Flugzeugbau

Einsatz in der AIRBUS A380, bestehend aus etwa 25% Composite-Materialien



Einsatz im Flugzeugbau

Einsatz in der AIRBUS A350, erstes AIRBUS-Flugzeug mit Rumpf und Flügelschalen aus Composite-Werkstoffen



Einsatz im Fahrzeugbau



Quellen: Dr.-Ing. h.c. F. Porsche AG, Porsche Öffentlichkeitsarbeit (links), ALSTOM LHB, Salzgitter (rechts)



Quelle: TTT TheTeamTechnology GmbH / Kögel Fahrzeugwerke GmbH

Einsatz im Bauingenieurwesen

Brückensanierung mit CFK



Tragfähigkeitssteigerung für Fahrzeuge mit ehemals 28 Tonnen auf nunmehr 40 Tonnen Gesamtgewicht.

Einsatz im Bauingenieurwesen

GFK und CFK-Anwendung im Off-Shore Windenergieanlagenbau



Rotorblatt: Länge: 61,5 m, Gewicht: 18 t.

Bauweise: GFK/CFK-Schalenbauweise mit Epoxidharz

Einsatz im Bauingenieurwesen

Geh- und Radwegbrücke aus GFK in Lleida / Spanien



Charakteristische Daten: Länge: 38 m, Breite: 3 m,
Aufbau aus GFK-Profilen, Auszeichnung mit dem
internationalen "Footbridge Award 2005"

Einsatz im Bauingenieurwesen

Überführung über die Ortsumgehung B 3a um das hessische Friedberg:



Charakteristische Daten: Länge: 22 m, Aufbau aus GFK-Profilen, Fertigstellung 2008

Einsatz im Bauingenieurwesen

Fußgänger- und Fahrradbrücke aus GFK-Profilen in Kolding, Dänemark (1997):



Charakteristische Daten: Länge: 40 m, Tragfähigkeit: 500 kg/m², Fahrzeuge bis 5t,
Fertigstellung: 18 Stunden in drei Nächten

Quelle: Fiberline Composites, Middelfart, Dänemark

Einsatz von CFK-Trägern im Bauingenieurwesen

Trägerartige CFK-Strukturen im Bauingenieurwesen weisen die folgenden primären Vorteile gegenüber klassischen Stahlträgern auf:

- eine große Gewichtsersparnis,
- eine deutlich bessere Schwingfestigkeit, insbesondere bei Kohlenstofffaser-Kunststoff-Verbunden (CFK),
- eine hervorragende Korrosionsbeständigkeit,
- längere Nutzungsdauer und erheblich reduzierter Wartungsaufwand, insbesondere für Brückenbauwerke äußerst wünschenswert,
- ein Online-Monitoring lässt sich einfach und zuverlässig in Laminaten integrieren.

Einsatz von CFK-Trägern im Bauingenieurwesen

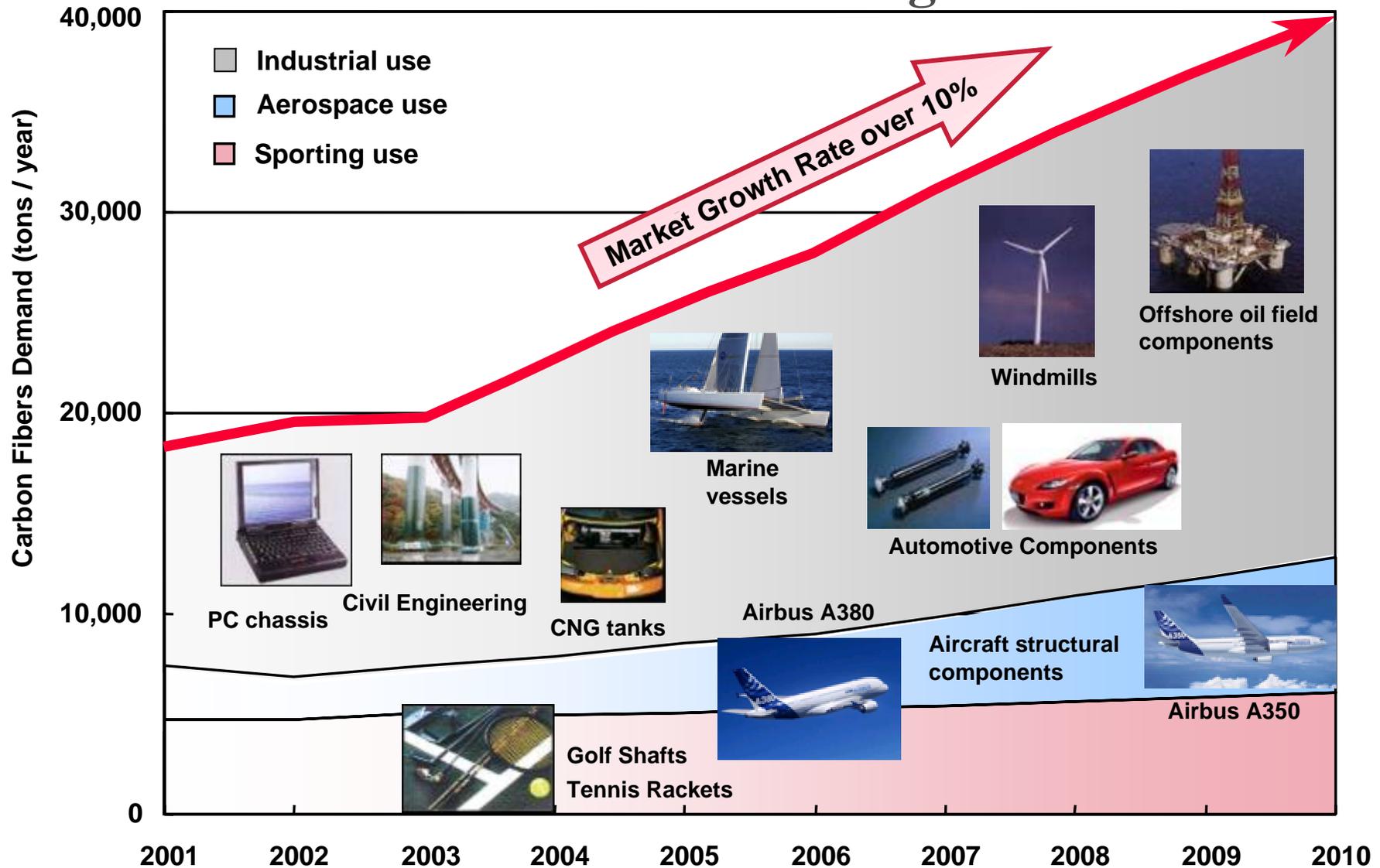
Aus dem primären Vorteil der großen Gewichtsersparnis gegenüber Stahlträgern erwachsen sekundäre Vorteile für die FKV-Variante:

- Der Aufwand bei Transport und Montage verringert sich.
- Werden Trägerstrukturen bewegt, so lässt sich mit den leichten FKV-Ausführungen erheblich Antriebsenergie einsparen.
- Resultiert ein Teil der Trägerbelastung aus seinem Eigengewicht, so lässt sich der Gewichtsvorteil der FKV-Lösung entweder in eine – aufgrund niedrigerer Belastung – weitere Gewichtsersparnis ummünzen oder es bietet sich an, die Betriebslasten um den Gewichtsvorteil zu erhöhen.

Nachteile:

- Es liegen kaum Erfahrungen, insbesondere keine Langzeiterfahrungen mit großen, hoch belasteten Biegeträgern vor.
- Der Werkstoff ist vergleichsweise teuer.
- Spezielle Fertigungsverfahren für hohe Biegeträger größerer Spannweite wurden bislang nicht entwickelt, viele konstruktive Fragen sind ungeklärt.

Marktentwicklung



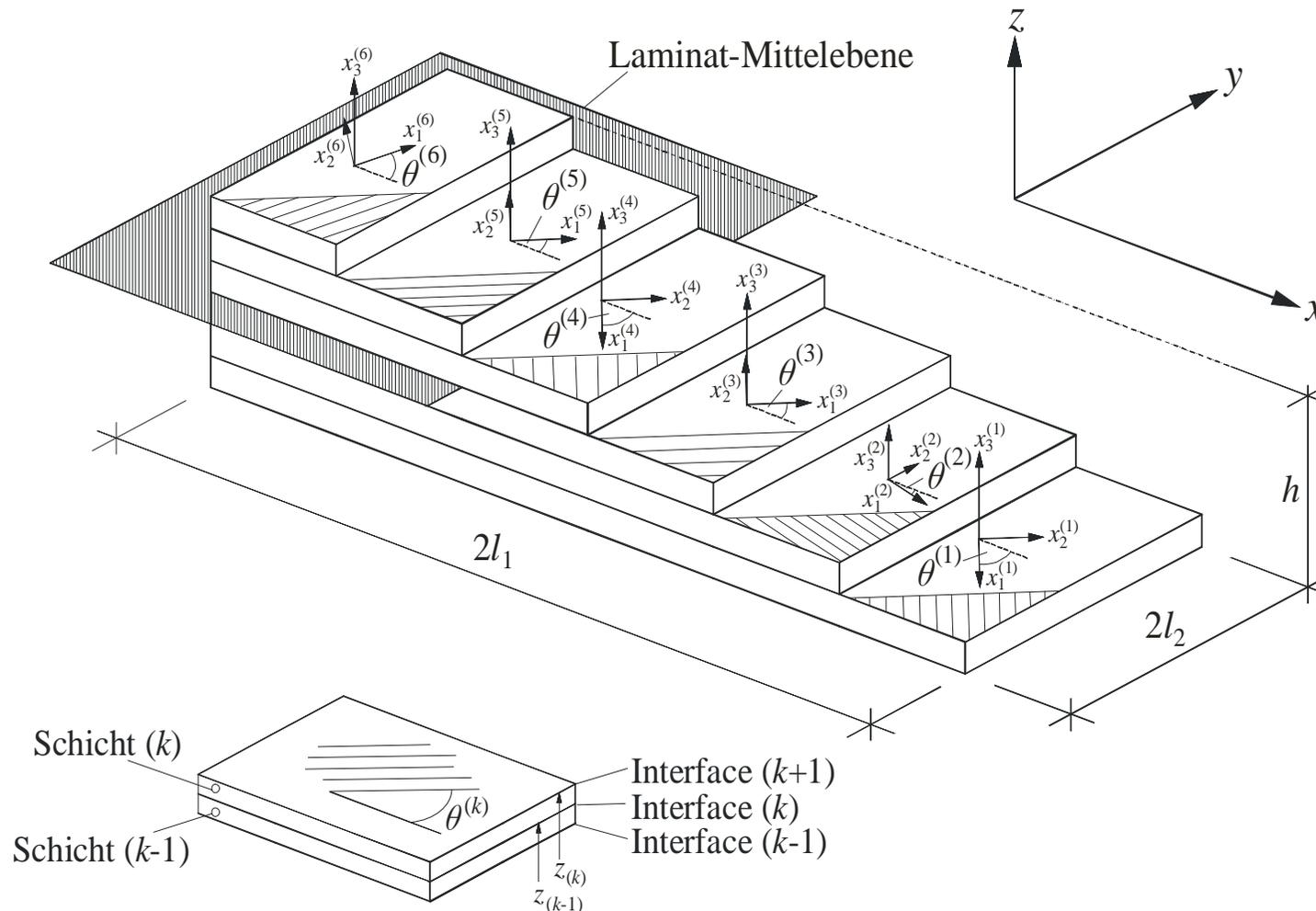
Gliederung

1. Einführung
- 2. Klassische Laminattheorie**
3. Flanschbeulen dünnwandiger Composite-Träger
4. Randeckeffekte in Laminatplatten
5. Zusammenfassung und Ausblick

Zusammensetzen eines Laminats

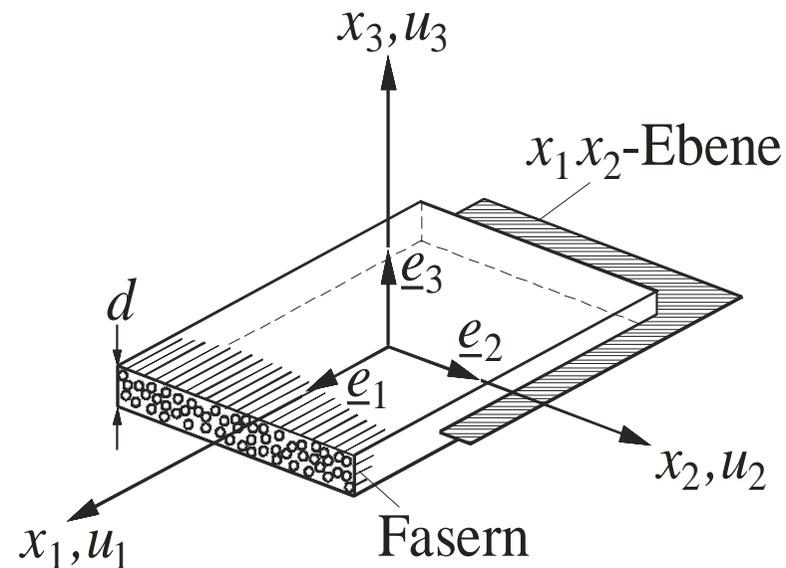
Laminat = Mehrschichtenverbund

(Material, Dicke, Orientierung, Anzahl: beliebig)



Laminat-einzelschicht

Laminat-Einzelschicht: Verbund aus Matrix und Fasern oder Faser-Gewebe.



Achsensystem: x_1, x_2, x_3 : „Materialhauptachsen“, „on-axis-System“
 x_1 verläuft parallel zur Faserrichtung.

Ebener Spannungszustand

Ebener Spannungszustand bezüglich der Dickenrichtung:

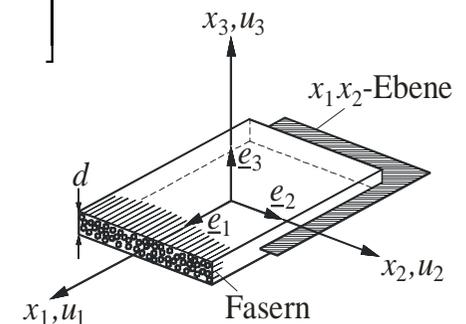
Alle Spannungs-Komponenten σ_{33} , σ_{13} , σ_{23} in Dickenrichtung x_3 sind null.

→ Plausible Annahme nur für dünne Flächentragwerke.

Materialgesetz im ebenen Spannungszustand:

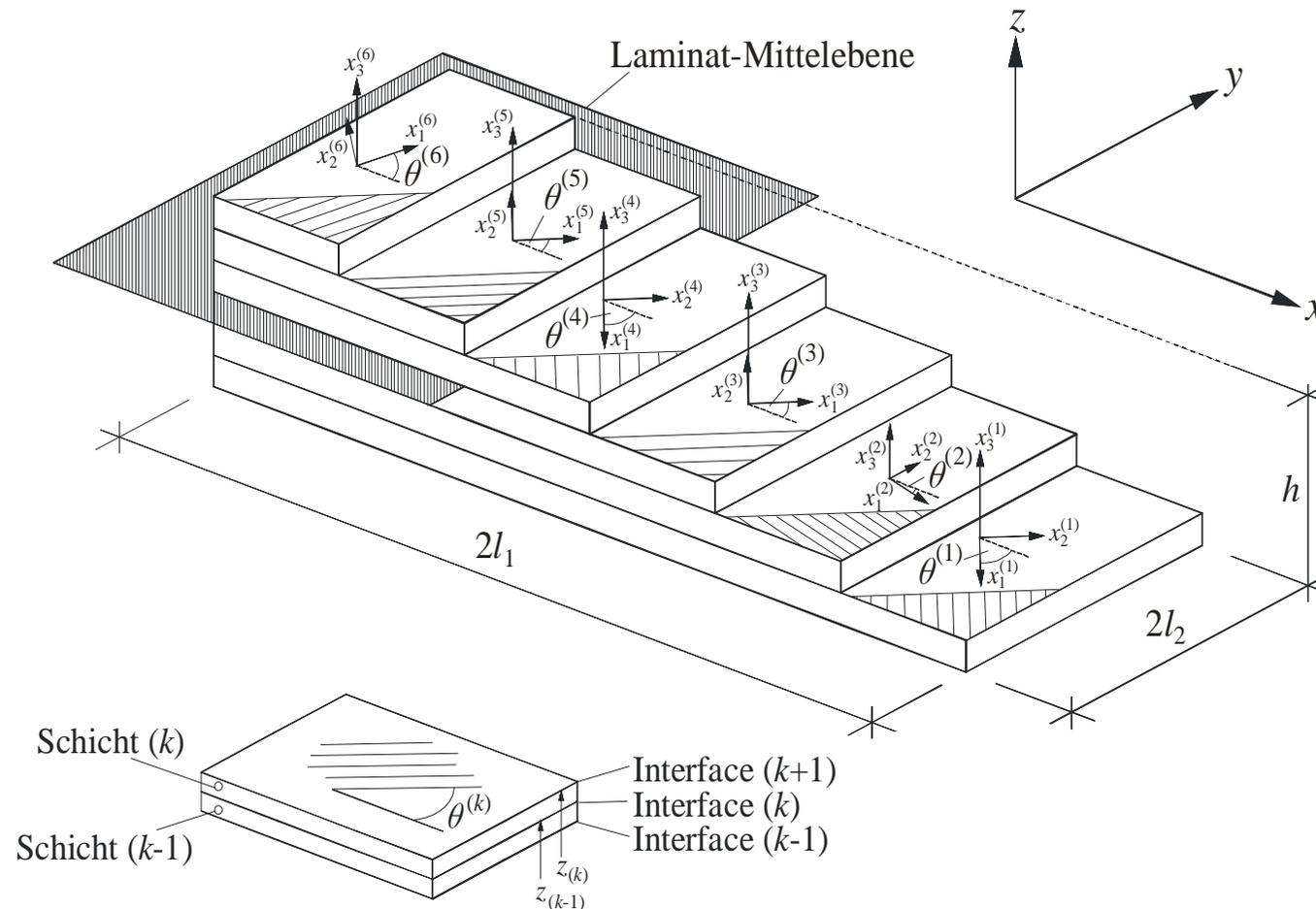
$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$$

wobei: Q_{ij} = sog. „reduzierte Steifigkeiten“



Transformationsregeln

Im allgemeinen sind Laminat-Einzelschichten um einen Winkel θ zum globalen Bezugssystem x, y, z gedreht:



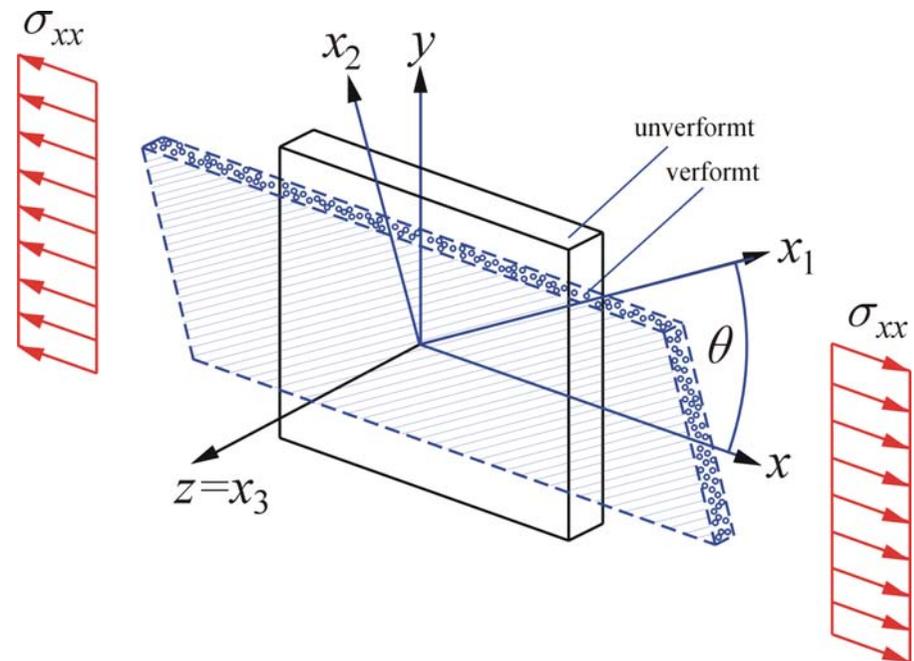
Transformationsregeln

Hookesches Gesetz für die Laminat-Einzelschicht, die um einen Winkel θ gedreht wurde:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}.$$

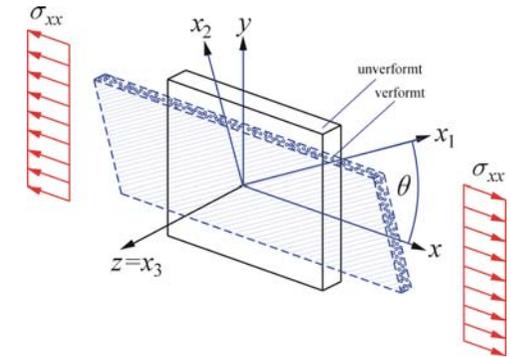
Kopplungseffekt durch die Terme $\bar{Q}_{16}, \bar{Q}_{26}$:

Eine Normalspannung σ_{xx} ruft bei $\theta \neq 0^\circ$ und $\theta \neq 0^\circ$ die Dehnungen ε_{xx} und ε_{yy} , aber auch die Gleitung γ_{xy} hervor:



Transformationsregeln

Transformationsregeln für die reduzierten Steifigkeiten:



$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta,$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta),$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta,$$

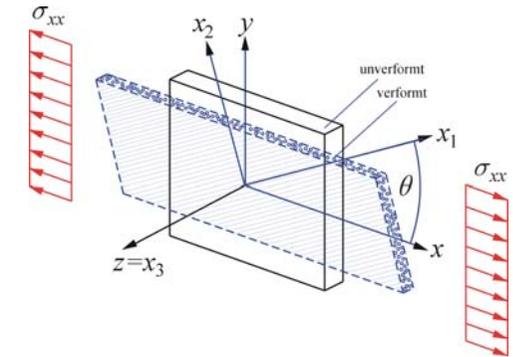
$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta,$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta,$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta).$$

Transformationsregeln

Transformationsregeln für die ebenen Ingenieurkonstanten:



$$\frac{1}{E_{xx}} = \frac{\cos^4 \theta}{E_{11}} + \frac{\sin^4 \theta}{E_{22}} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_{11}} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta,$$

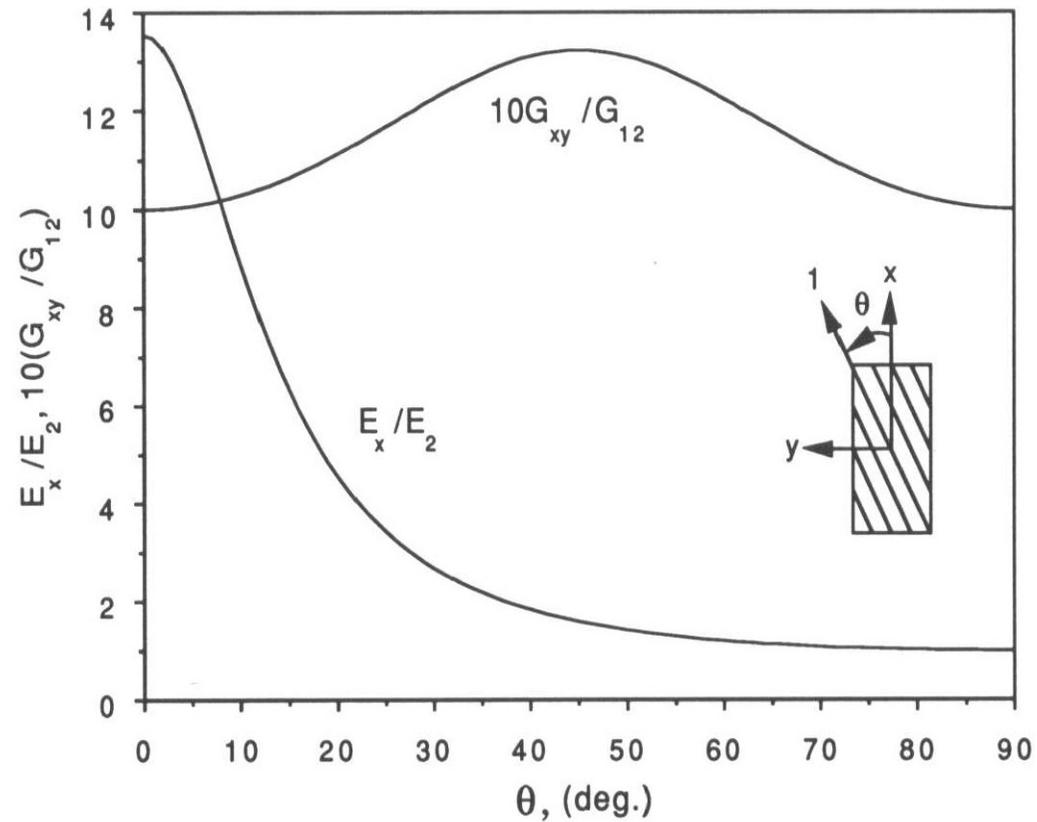
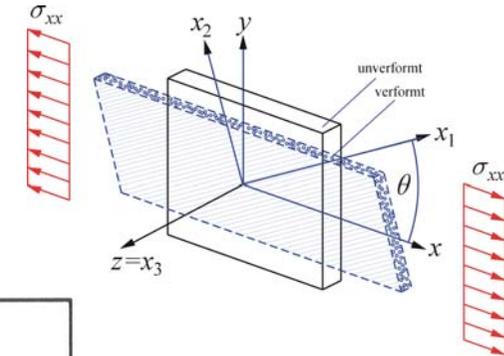
$$\frac{1}{E_{yy}} = \frac{\sin^4 \theta}{E_{11}} + \frac{\cos^4 \theta}{E_{22}} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_{11}} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta,$$

$$\frac{1}{G_{xy}} = \left(\frac{4}{E_{11}} + \frac{4}{E_{22}} + \frac{8\nu_{12}}{E_{11}} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \frac{1}{G_{12}} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2,$$

$$\nu_{xy} = \frac{\frac{\nu_{12}}{E_{11}} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) - \left(\frac{1}{E_{11}} + \frac{1}{E_{22}} - \frac{1}{G_{12}} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\frac{\cos^4 \theta}{E_{11}} + \frac{\sin^4 \theta}{E_{22}} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_{11}} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta}.$$

Transformationsregeln

Einfluss der Winkeländerung auf elastische Eigenschaften:

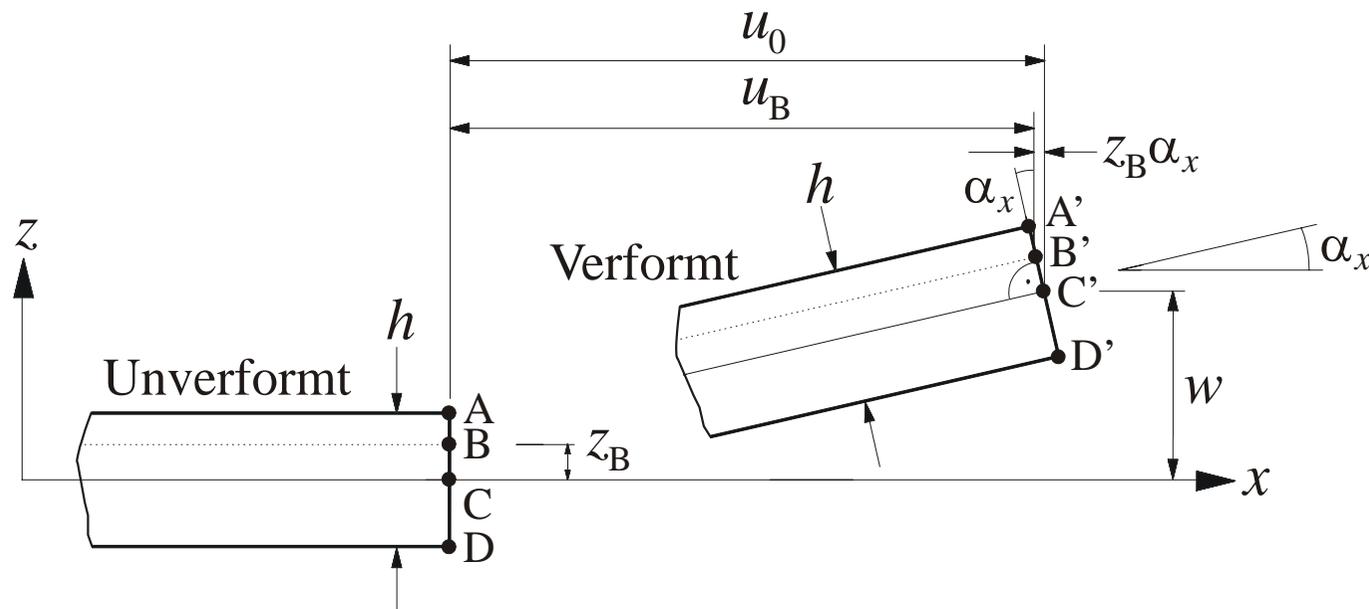


Annahmen zur Kinematik einer Laminatplatte

Annahmen:

- 1) Perfekter Verbund zwischen den Laminat-Einzelschichten
- 2) Kinematik einer Kirchhoff-Platte (Ebenbleiben der Querschnitte, Normalenhypothese, rechnerisches Reduzieren auf die Mittelebene)
- 3) Ebener Spannungszustand

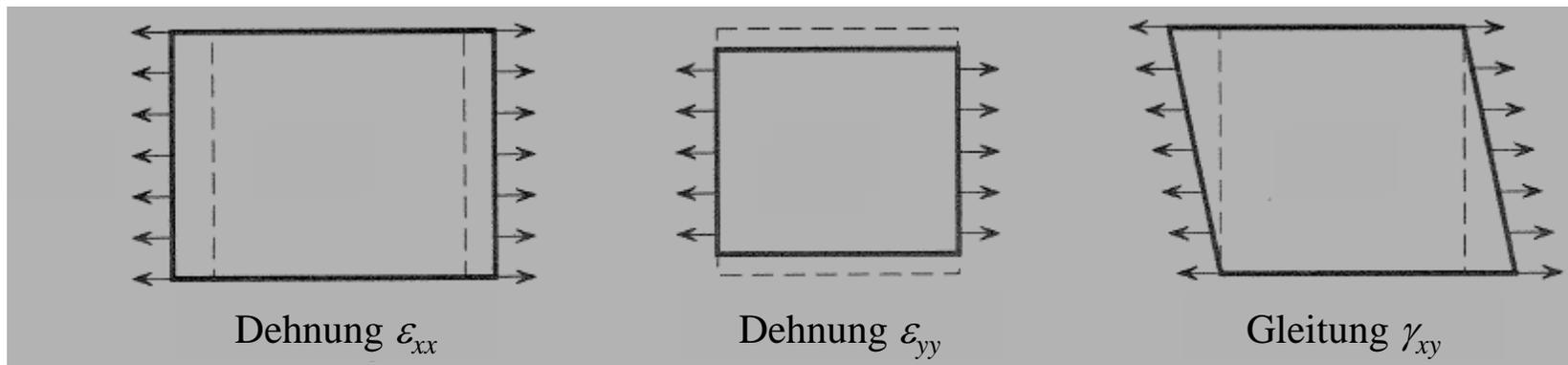
Betrachte deformiertes Plattensegment:



Verzerrungsfeld im Laminat

In Vektor-Form:

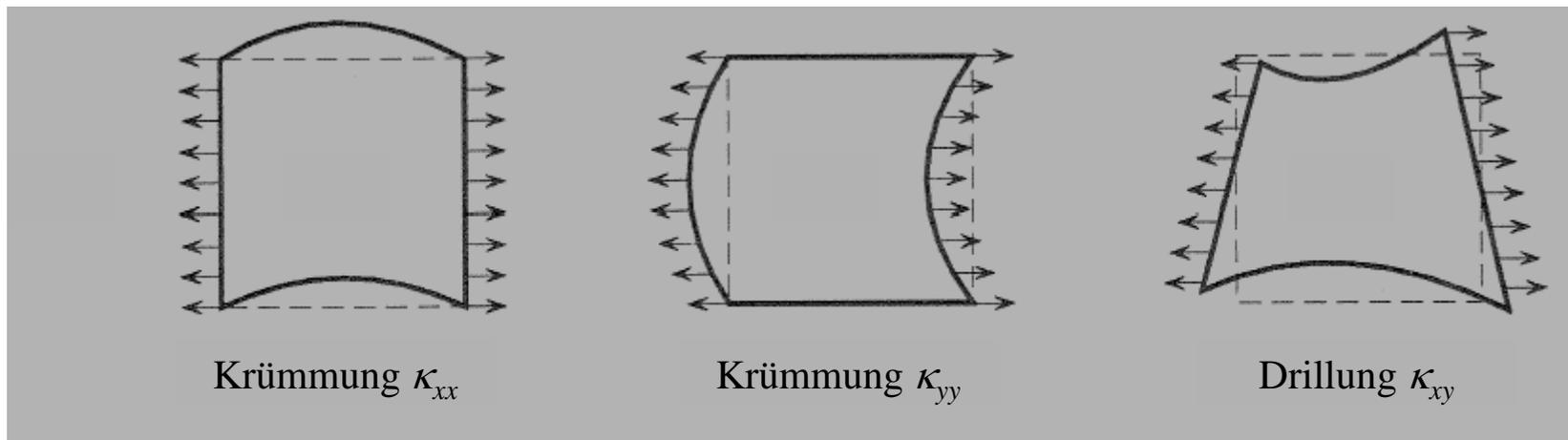
$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix}} \right\} \text{Verzerrungen der Laminat-Mittelebene.}$$



Verzerrungsfeld im Laminat

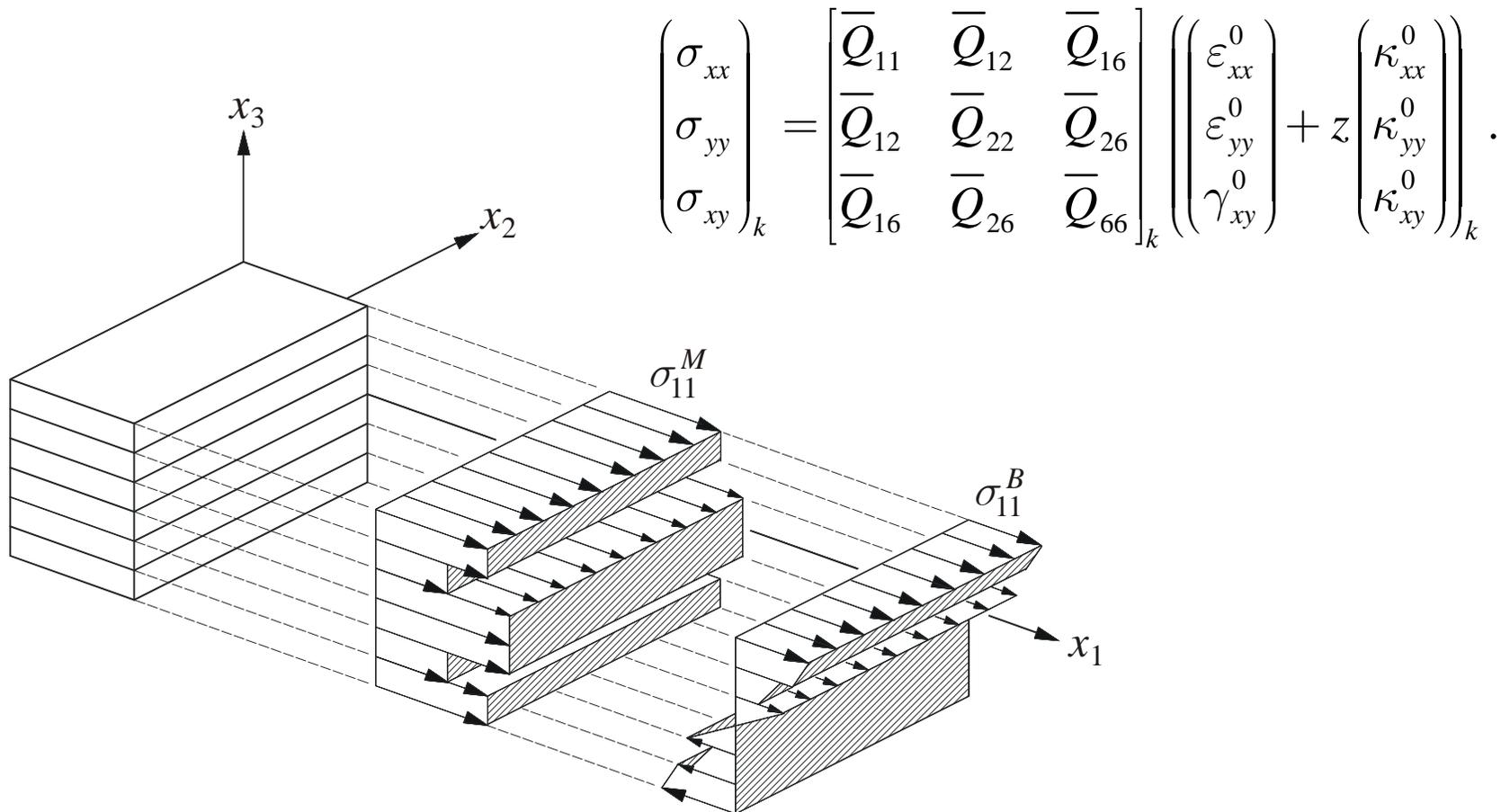
In Vektor-Form:

$$\begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix} = - \left[\begin{array}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix}} \right\} \text{Verkrümmungen der Laminat-Mittelebene.}$$



Lagenweise Spannungen

Aufteilen in Membran- und Biegeanteil:



$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left(\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix} \right)$$

Konstitutives Laminat-Gesetz

Konstitutives Laminat-Gesetz:

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix},$$

wobei:

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} dz = \sum_{k=1}^{k=n} \bar{Q}_{ij,k} (z_k - z_{k-1}), \quad \text{"Dehnsteifigkeiten"}$$

$$B_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} \bar{Q}_{ij,k} (z_k^2 - z_{k-1}^2), \quad \text{"Koppelsteifigkeiten"}$$

$$D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{k=n} \bar{Q}_{ij,k} (z_k^3 - z_{k-1}^3). \quad \text{"Plattensteifigkeiten"}$$

Konstitutives Laminat-Gesetz

Konstitutives Laminat-Gesetz:

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{ABD-Matrix,} \\ \text{Laminat-Steifigkeitsmatrix}}} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix},$$

Sprachgebrauch:

$$\begin{pmatrix} \underline{N} \\ \underline{M} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} = \text{Scheiben-Quadrant} & \underline{\underline{B}} = \text{Koppel-Quadrant} \\ \underline{\underline{B}} = \text{Koppel-Quadrant} & \underline{\underline{D}} = \text{Platten-Quadrant} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{\kappa} \end{pmatrix}.$$

Vergleich Laminat – isotrope Platte

Laminat:

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix}$$

Isotrope Platte:

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}h & Q_{12}h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12}h & Q_{22}h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12}Q_{11}h^3 & \frac{1}{12}Q_{12}h^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12}Q_{12}h^3 & \frac{1}{12}Q_{22}h^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12}Q_{66}h^3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix}$$

Kopplungseffekte

Konstitutives Laminat-Gesetz:

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{ABD-Matrix,} \\ \text{Laminat-Steifigkeitsmatrix}}} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix},$$

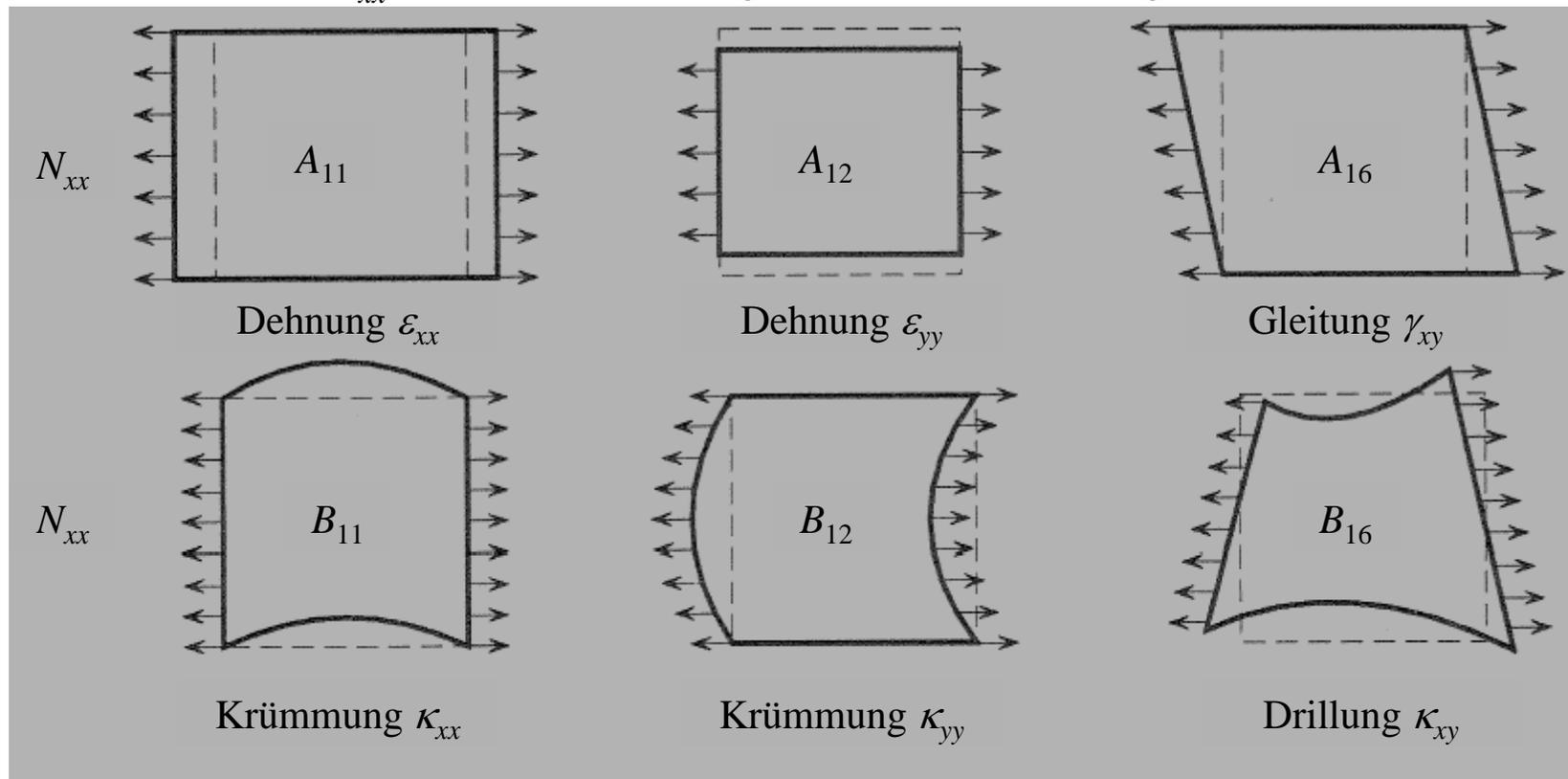
Kopplungseffekte: Eine beliebige Schnittgröße ruft alle Verzerrungen und Verkrümmungen hervor (!)

Kopplungseffekte

1. Gleichung ausschreiben:

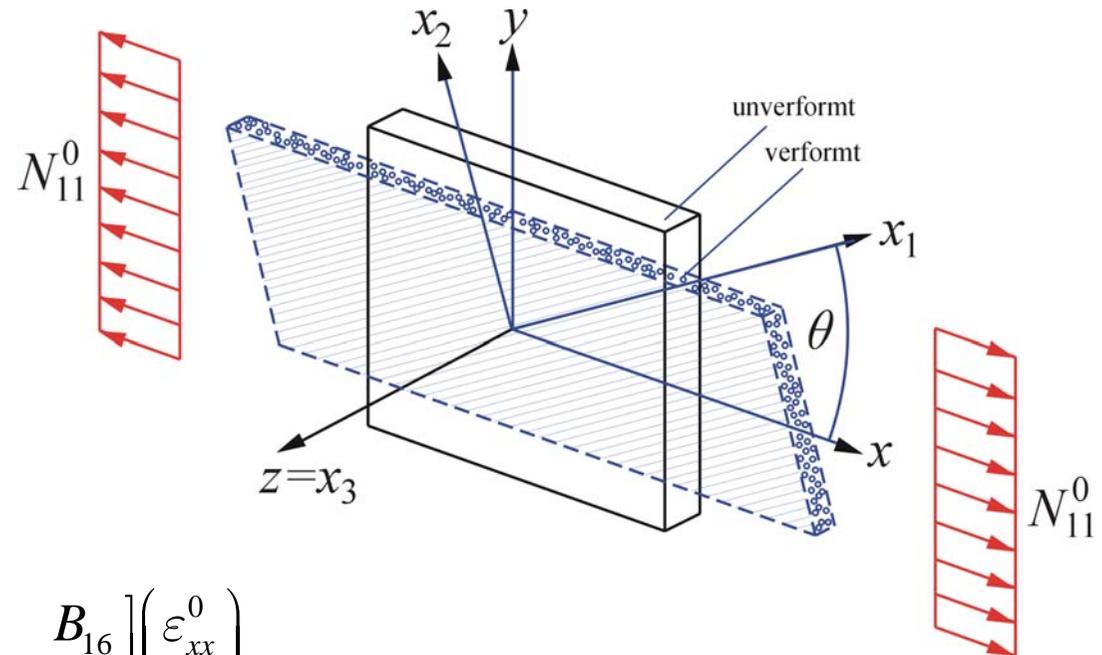
$$N_{xx} = A_{11}\varepsilon_{xx}^0 + A_{12}\varepsilon_{yy}^0 + A_{16}\gamma_{xy}^0 + B_{11}\kappa_{xx}^0 + B_{12}\kappa_{yy}^0 + B_{16}\kappa_{xy}^0.$$

Die Normalkraft N_{xx} ruft alle Verzerrungen und Verkrümmungen hervor:



Schubkopplung

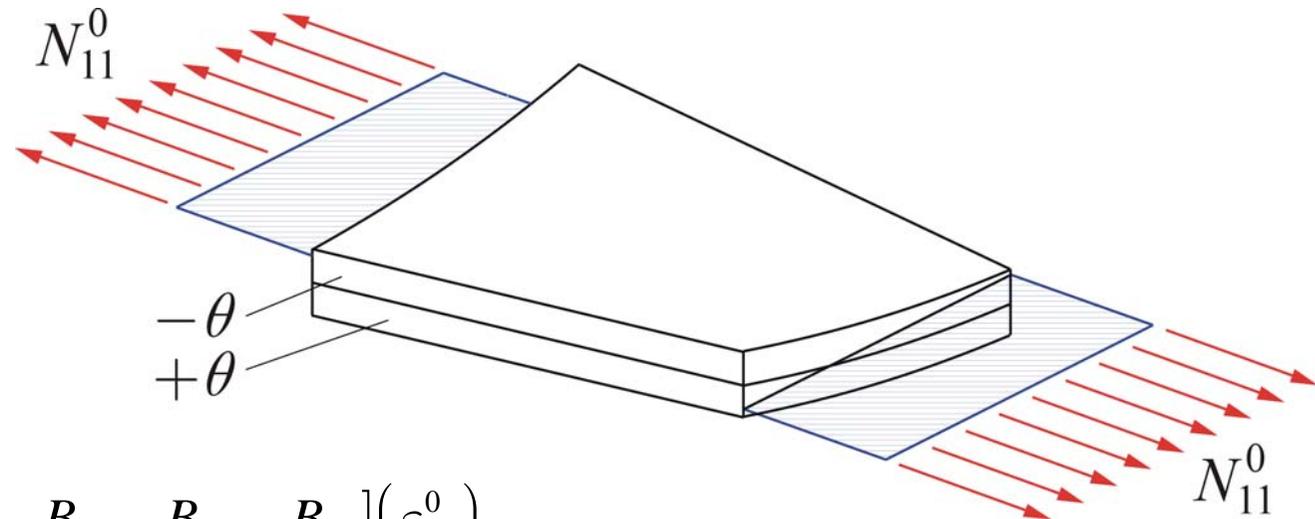
Schubkopplung infolge A_{16} , A_{26} :



$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix}$$

Dehnungs-Torsions-Kopplung

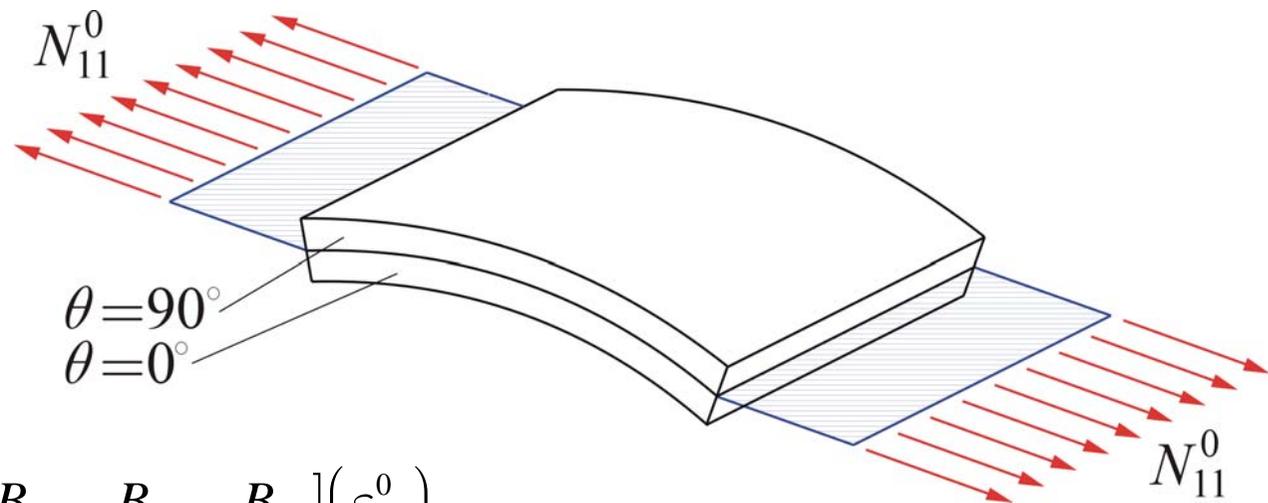
Dehnungs-Torsions-Kopplung infolge B_{16} , B_{26} :



$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix}$$

Biege-Dehnungs-Kopplung

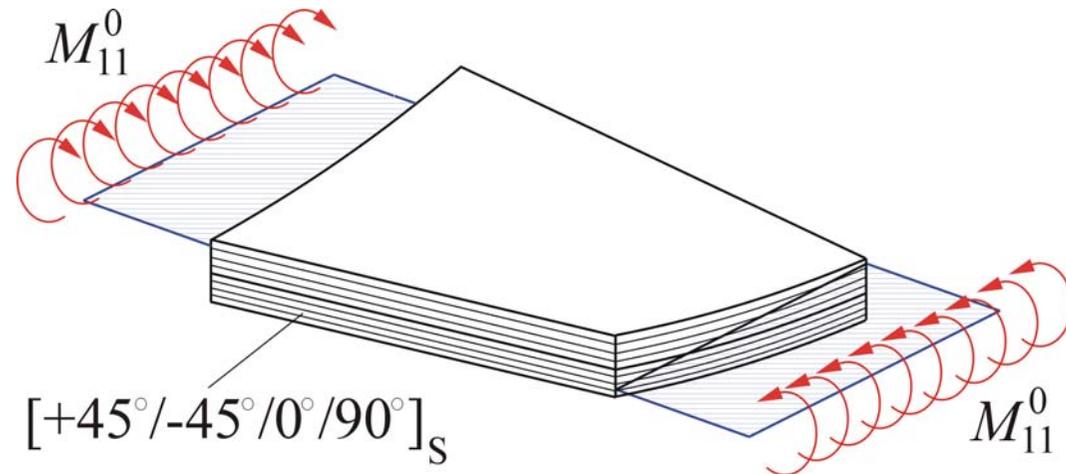
Biege-Dehnungs-Kopplung infolge B_{11} , B_{22} , B_{12} :



$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix}$$

Biege-Torsions-Kopplung

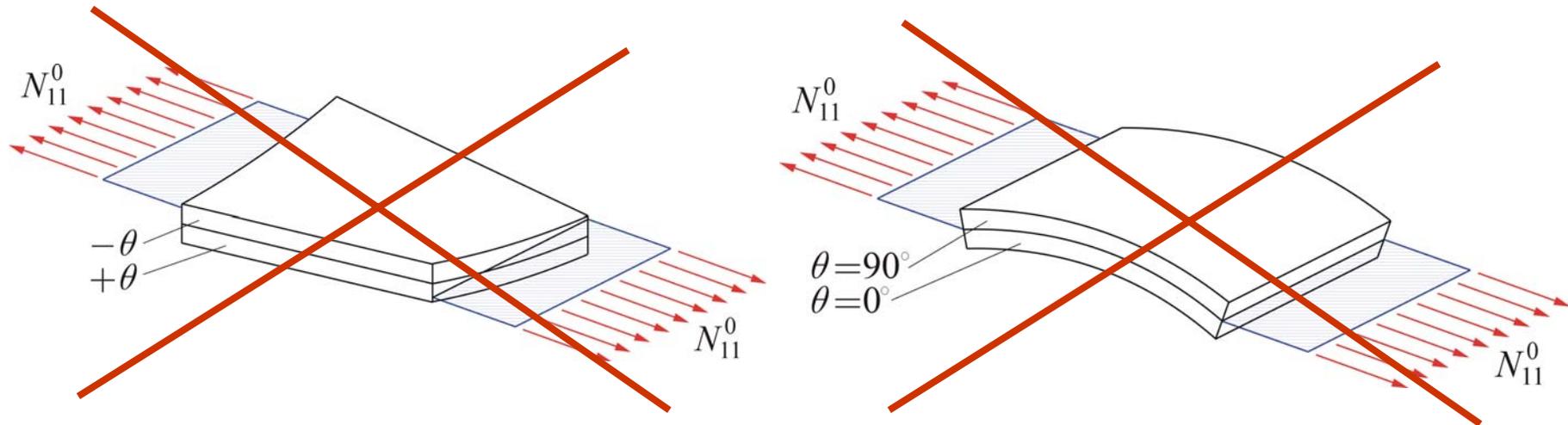
Biege-Dehnungs-Kopplung infolge D_{16} , D_{26} :



$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix}$$

Symmetrische Laminat

Viele Kopplungseffekte sind durch symmetrische Laminataufbauten vermeidbar:

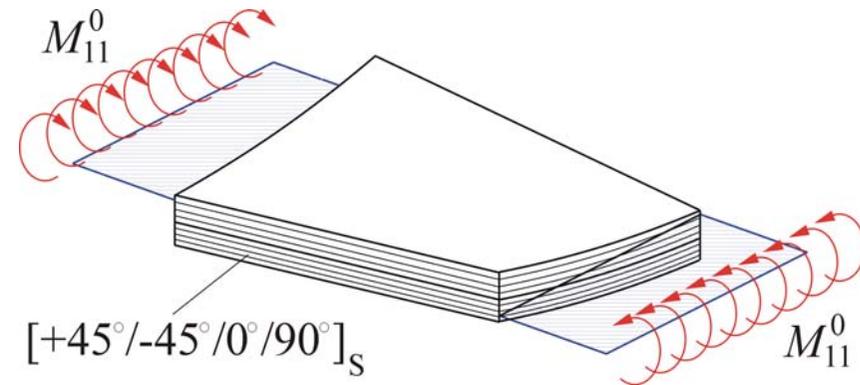
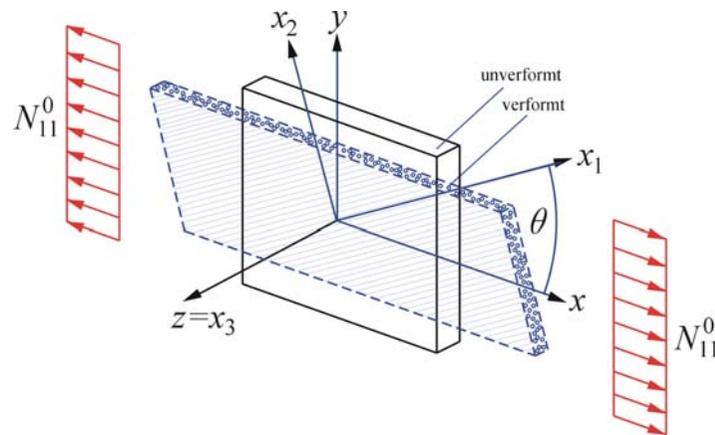


$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix}$$

Entkopplung von Scheiben- und Plattenverhalten bei symmetrischen Lagenaufbauten.

Symmetrische Laminat

Aber: Viele Kopplungseffekte sind durch symmetrische Laminataufbauten nicht vermeidbar:



$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix}$$

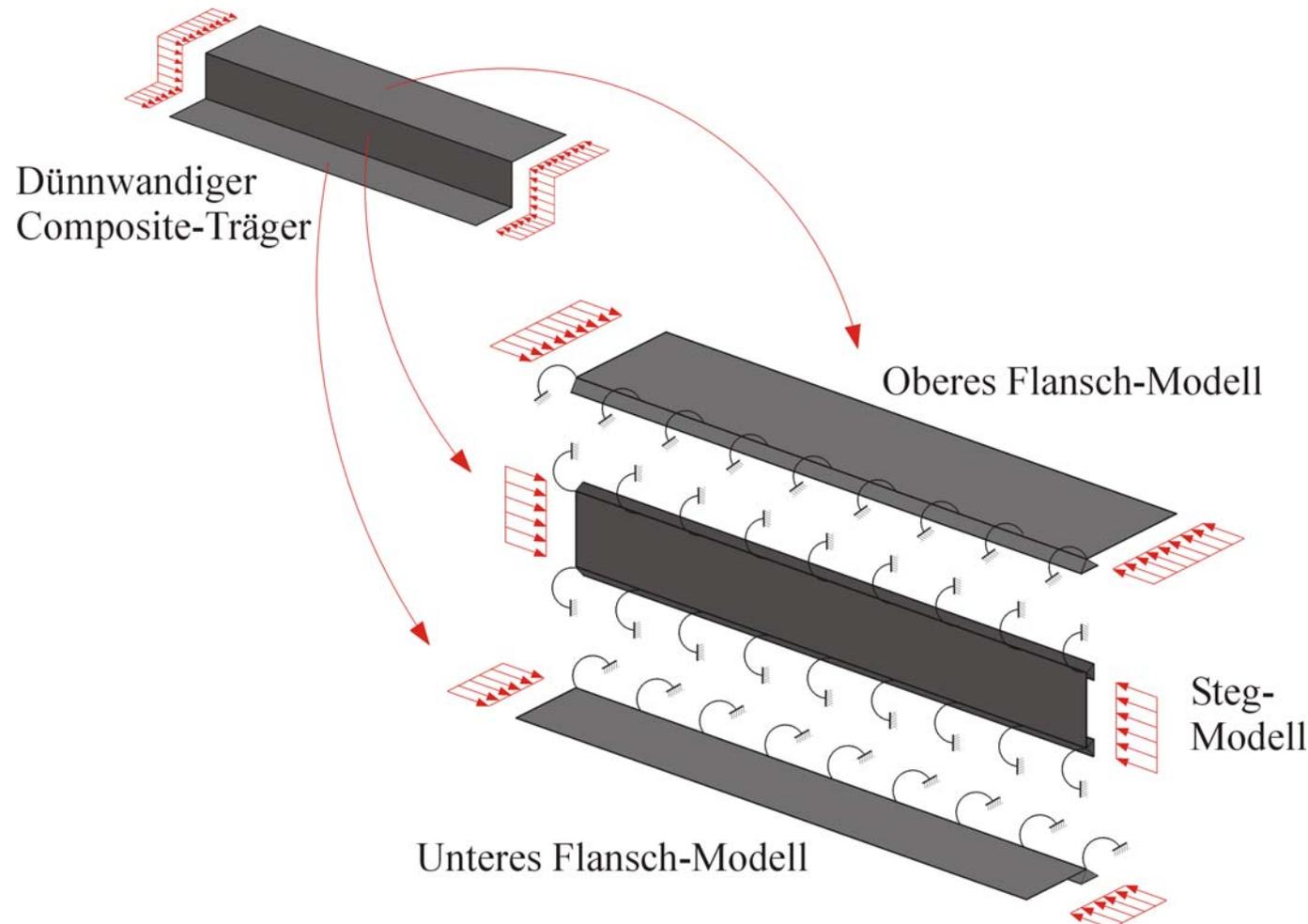
Schubkopplung und Biege-Torsions-Kopplung sind auch in symmetrischen Laminaten möglich!

Gliederung

1. Einführung
2. Klassische Laminattheorie
- 3. Flanschbeulen dünnwandiger Composite-Träger**
4. Randeckeffekte in Laminatplatten
5. Zusammenfassung und Ausblick

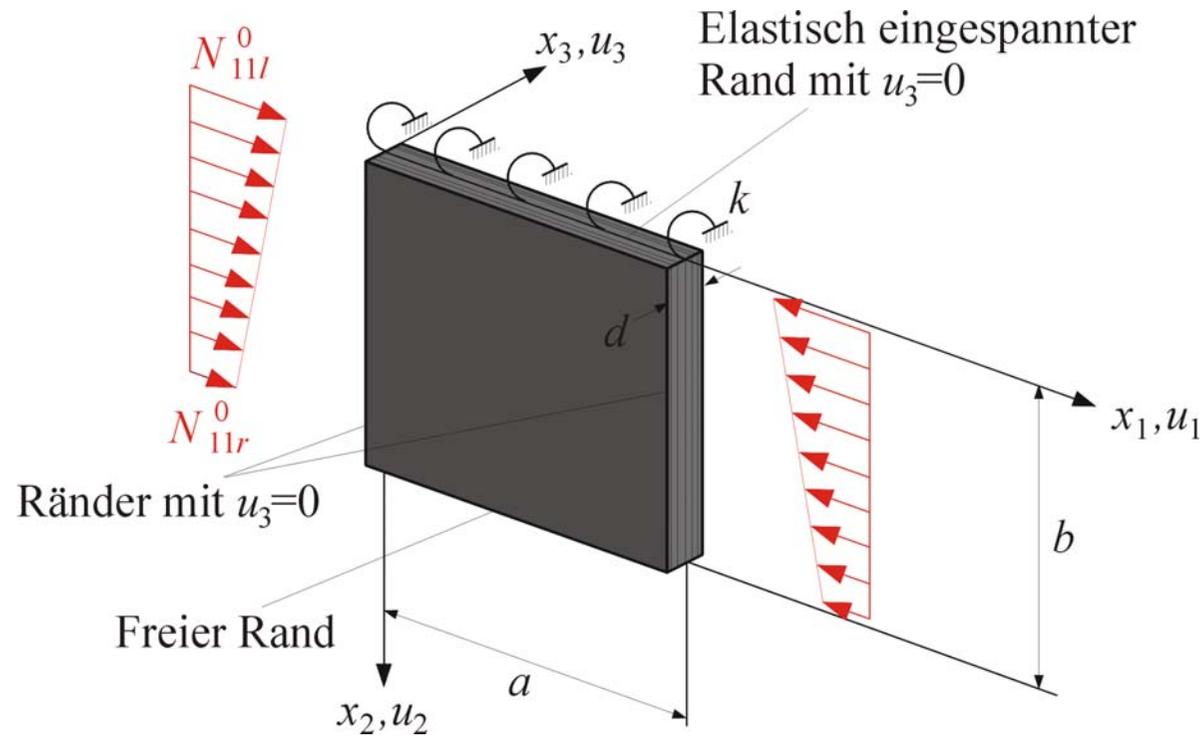
Behandlung lokaler Beulprobleme dünnwandiger Träger

Separate Betrachtung von Trägersteg und Trägerflanschen:



Flanschbeulen eines anisotropen Composite-Trägers

Ersatzmodell:



Grundlegendes

Beulbedingung:

$$\delta\Pi = 0.$$

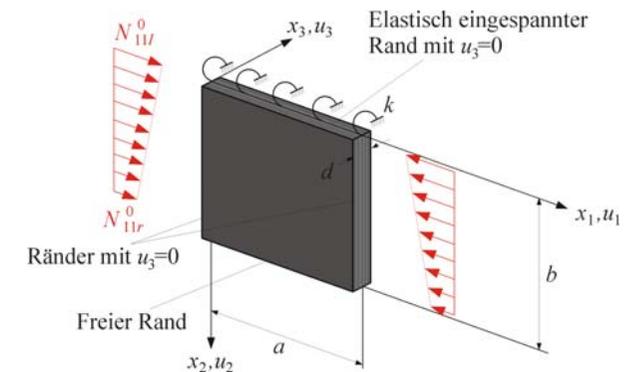
Potentialformulierung im gebeulten Zustand:

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_f + \Pi_a.$$

Beuldifferentialgleichung für symmetrische Lamine:

$$D_{11} \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^4} + D_{22} \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_2^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^3 \partial x_2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1 \partial x_2^3} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \lambda N_{11}^0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} = 0.$$

Problem: Praktisch brauchbare geschlossen-analytische Lösungen sind nur in wenigen Sonderfällen möglich.



Das Ritz-Verfahren

Klassischer Ritz-Ansatz für die Beulform:

$$u_3(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{n=1}^{n=N} W_{mn} w_{1m}(x_1) w_{2n}(x_2).$$

Beulbedingung:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial W_{mn}} = 0.$$

Gegenwärtiger Ansatz:

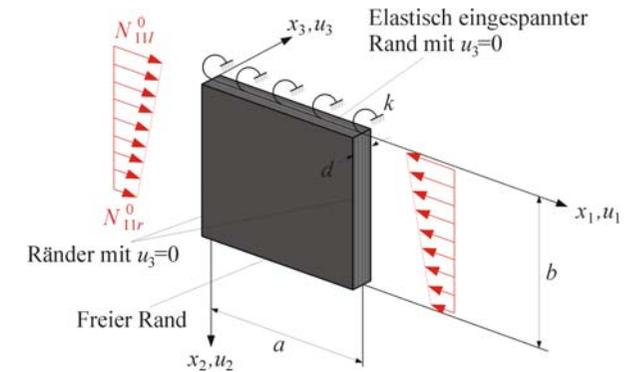
$$u_3(x_1, x_2) = w_2(x_2) \sum_{m=1}^{m=M} W_m w_{1m}(x_1).$$

Reduzierte Beulbedingung:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial W_m} = 0.$$

Resultierendes Eigenwertproblem:

$$\underline{\underline{K}} + \underline{\underline{S}} - N_{11}^0 \underline{\underline{F}} = 0.$$



Randbedingungen und Ansatz

Randbedingungen an belasteten Rändern:

$$u_3(x_1 = 0, x_2) = 0, \quad u_3(x_1 = a, x_2) = 0.$$

Randbedingungen am elastisch eingespannten Rand:

$$u_3(x_1, x_2 = 0) = 0, \quad M_{22}(x_1, x_2 = 0) = -k \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0}.$$

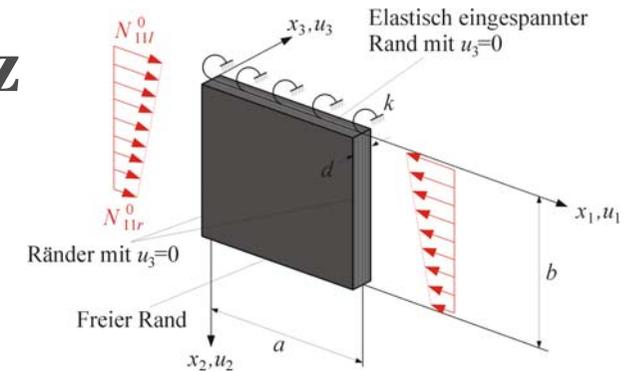
Randbedingungen am freien Rand:

$$M_{22}(x_1, x_2 = b) = 0, \quad V_2(x_1, x_2 = b) = 0.$$

Gegenwärtiger Ansatz für die Beulform:

$$u_3(x_1, x_2) = \left(\frac{x_2}{b} + \psi_1 \left(\frac{x_2}{b} \right)^2 + \psi_2 \left(\frac{x_2}{b} \right)^3 + \psi_3 \left(\frac{x_2}{b} \right)^4 \right) \sum_{m=1}^{m=M} W_m \sin \left(\frac{m\pi x_1}{a} \right).$$

Freie Konstanten bestimmbar aus den Randbedingungen.



Analytische Lösung für $D_{16} = D_{26} = 0$

Gegenwärtiger Ansatz:

$$u_3(x_1, x_2) = W w_1(x_1) w_2(x_2).$$

Wahl der Ansatzfunktionen:

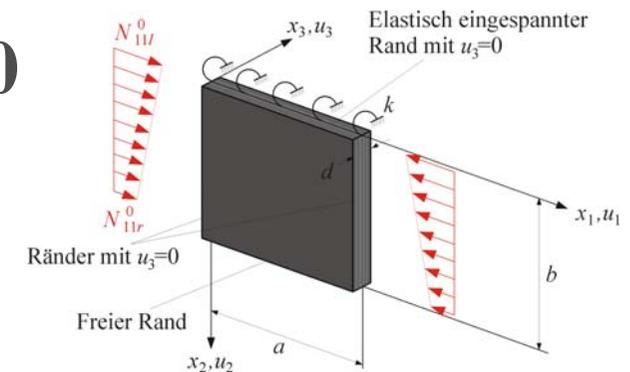
$$u_3(x_1, x_2) = W \sin\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \left(\frac{x_2}{b} + \psi_1 \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 + \psi_2 \left(\frac{x_2}{b}\right)^3 + \psi_3 \left(\frac{x_2}{b}\right)^4 \right).$$

Beullast:

$$N_{11}^0 = \frac{1}{R_{11} S_{00}} (D_{11} R_{22} S_{00} + D_{22} R_{00} S_{22} + 2D_{12} R_{02} S_{02} + 4D_{66} R_{11} S_{11} + 2R_{00} F)$$

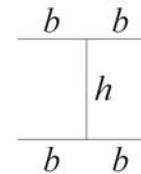
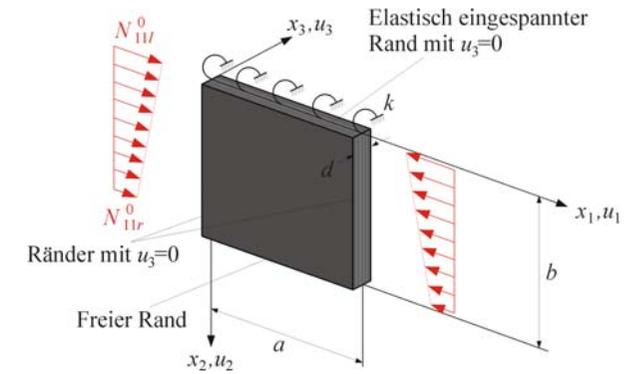
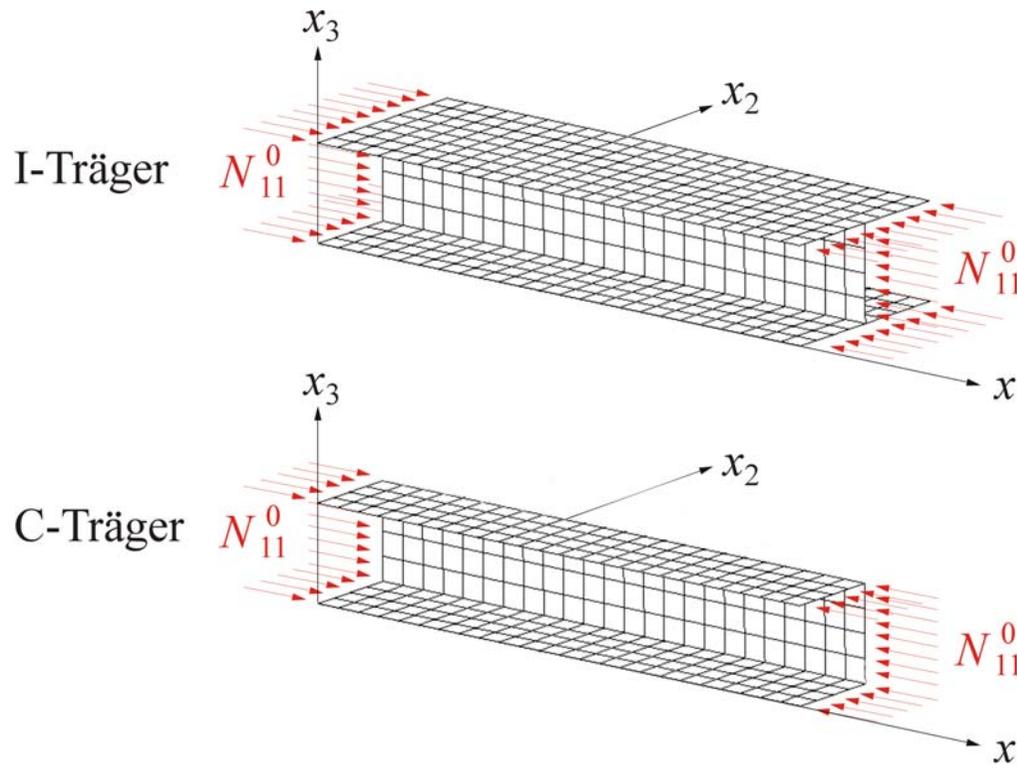
Resultierende Integrale der Ansatzfunktionen:

$$R_{ij} = \int_0^a \frac{\partial^i w_1}{\partial x_1^i} \frac{\partial^j w_1}{\partial x_1^j} dx_1, \quad S_{ij} = \int_0^b \frac{\partial^i w_2}{\partial x_2^i} \frac{\partial^j w_2}{\partial x_2^j} dx_2.$$



Validierung

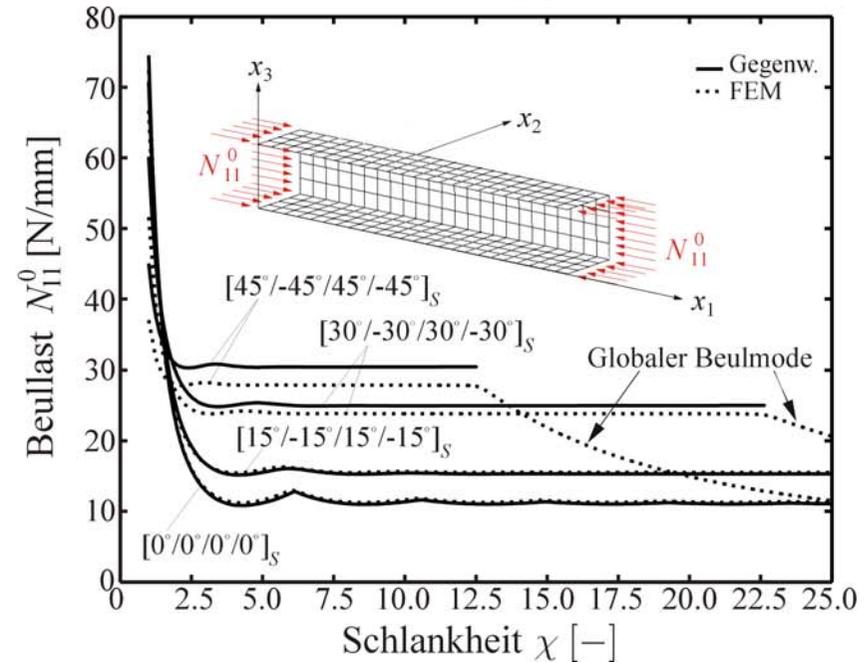
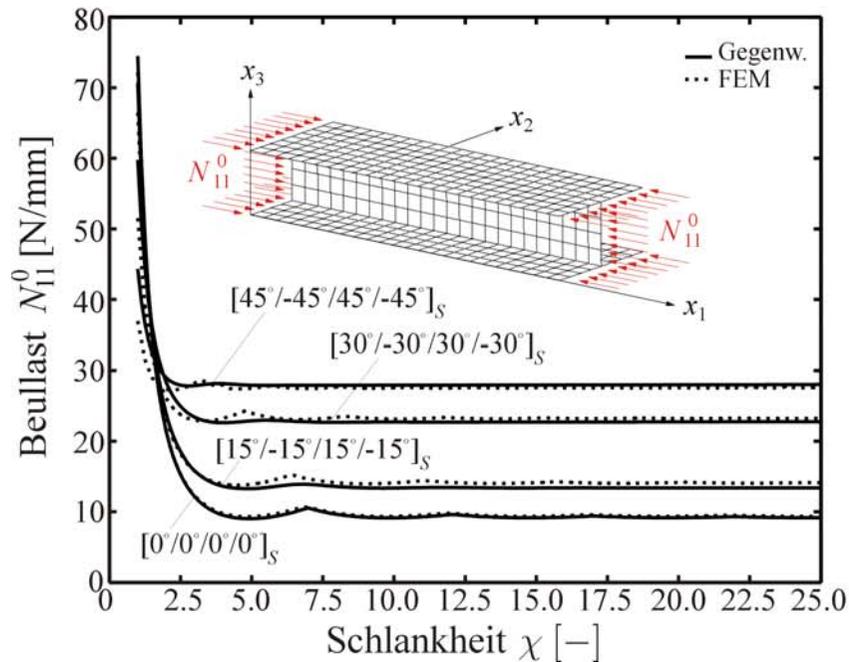
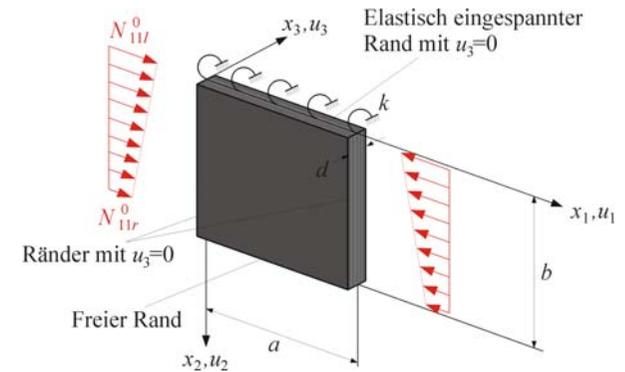
FEM-Netze für anisotrope Composite-Träger:



I- und C-Träger aus Winkel-Verbund-Laminaten $[+\theta/-\theta/+ \theta/-\theta]_S$.

Validierung

Gegenüberstellung der Ergebnisse:

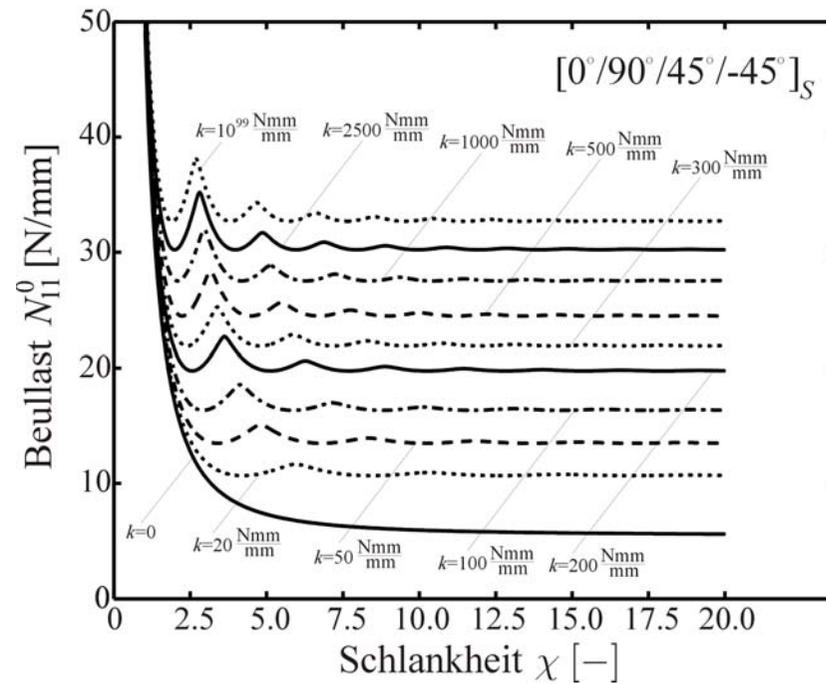
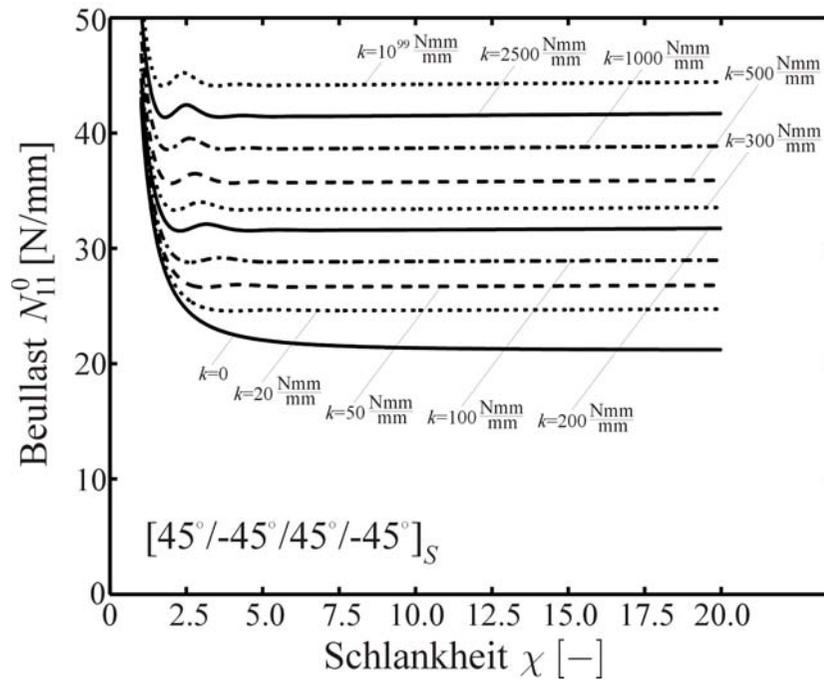
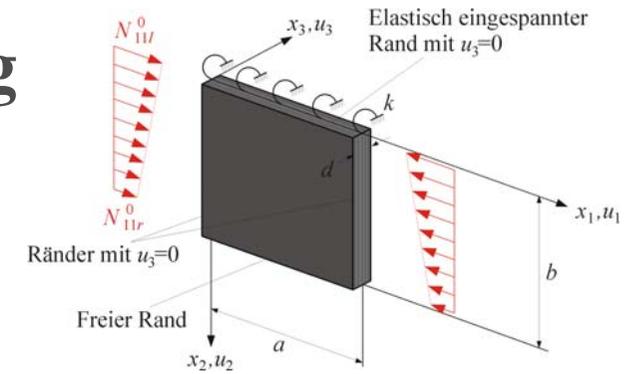


Exzellente Übereinstimmung, aber:

- Finite-Elemente-Ergebnisse in mehreren Stunden,
- Gegenwärtige Ergebnisse in wenigen Sekunden!

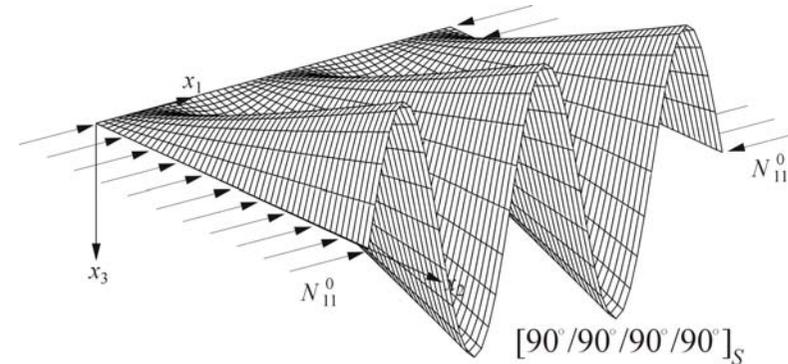
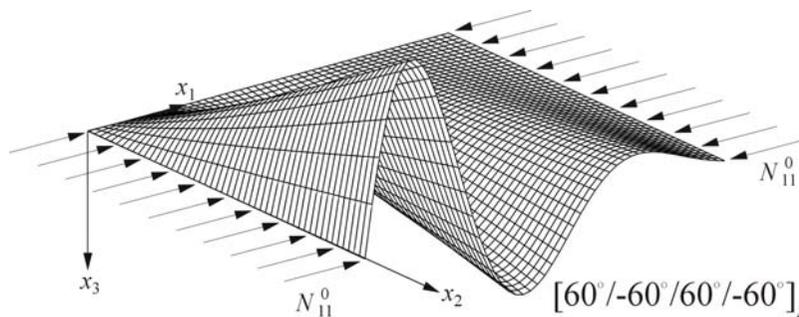
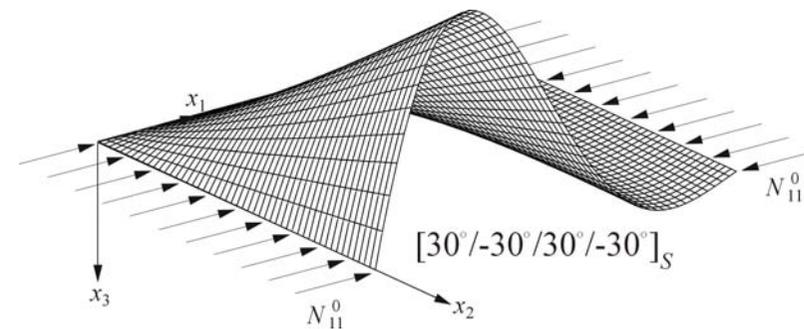
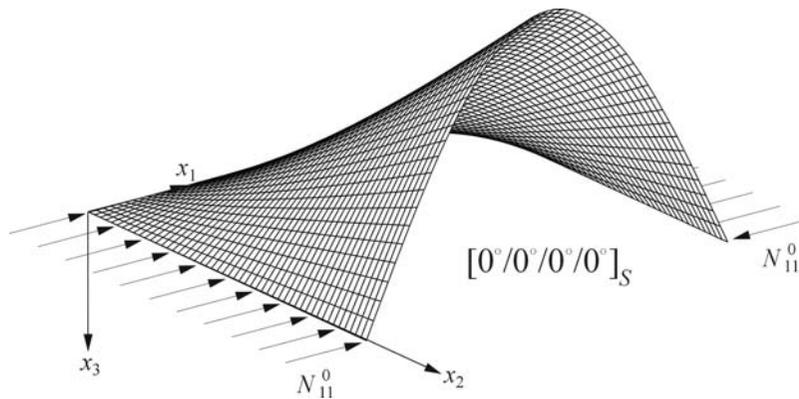
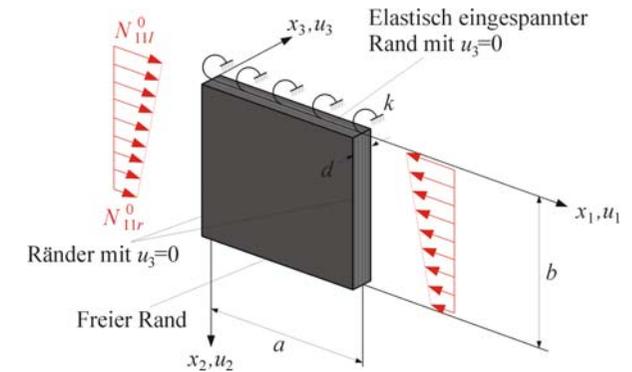
Einfluss der Randeinspannung

Signifikanter Einfluss der elastischen Randeinspannungen:



Beulmoden

Allgemein unsymmetrische Beulmoden, hervorgerufen durch Biege-Torsions-Kopplung:

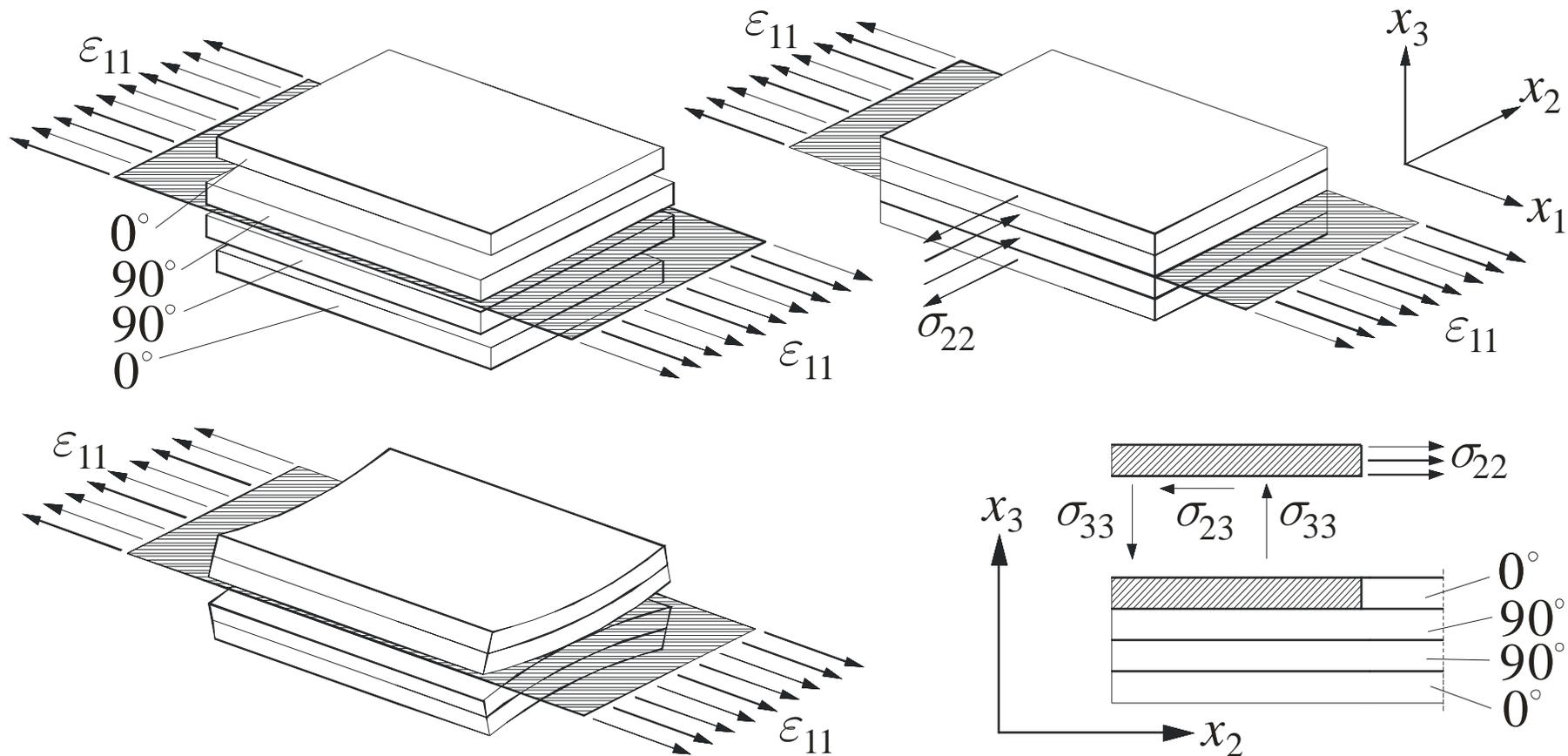


Gliederung

1. Einführung
2. Klassische Laminattheorie
3. Flanschbeulen dünnwandiger Composite-Träger
- 4. Randeckeffekte in Laminatplatten**
5. Zusammenfassung und Ausblick

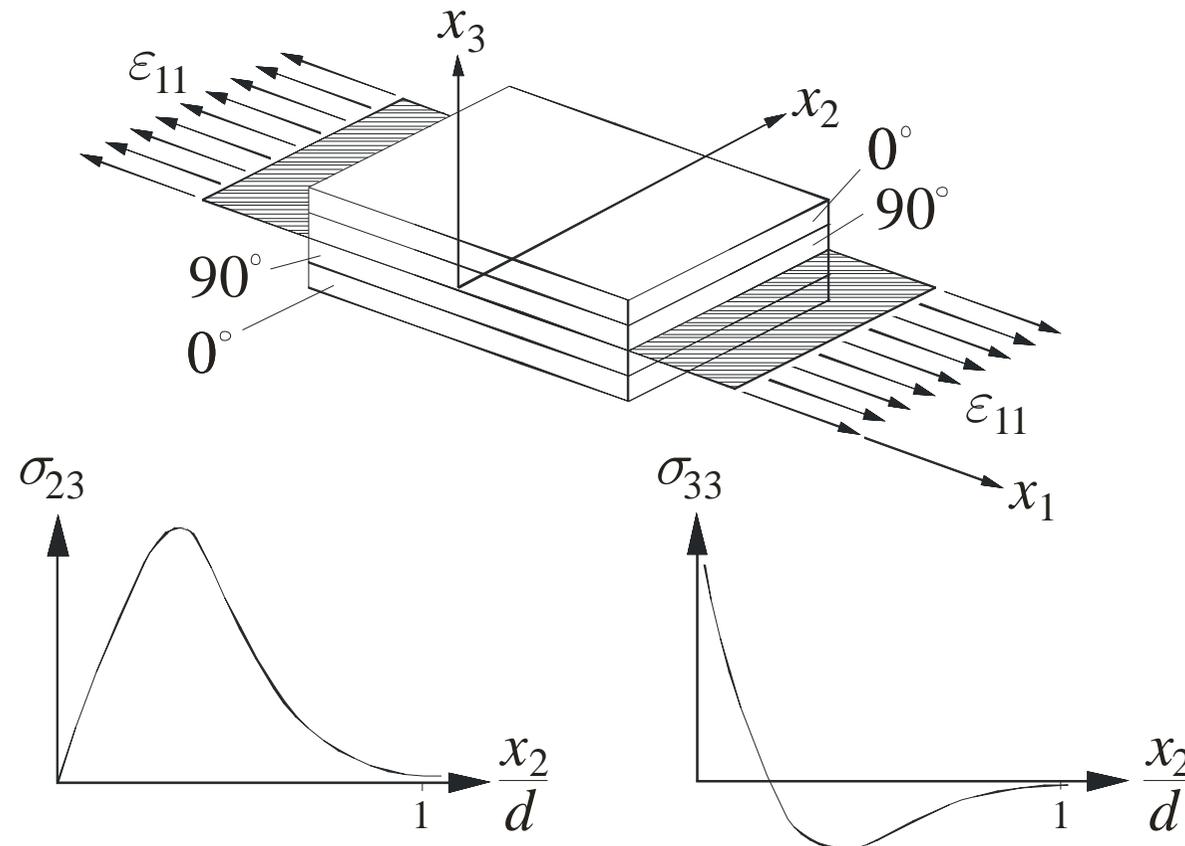
Randeffekte in Composite-Laminaten

Begründung durch unterschiedliches Querdehnungsverhalten der Schichten und einfachem Gleichgewicht:



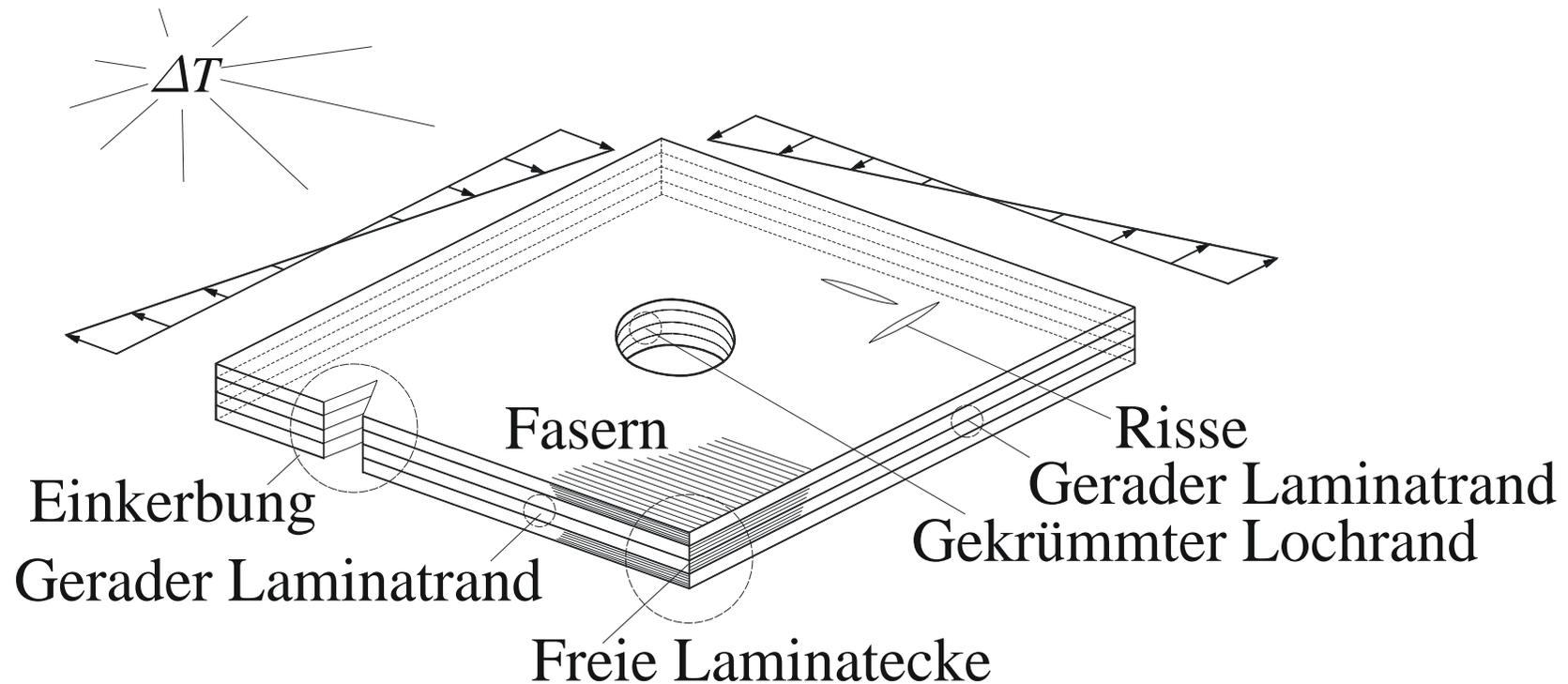
Schädigungs-Potential durch Delaminationen am freien Rand.

Interlaminare Spannungen als Folge des Randeckeffektes

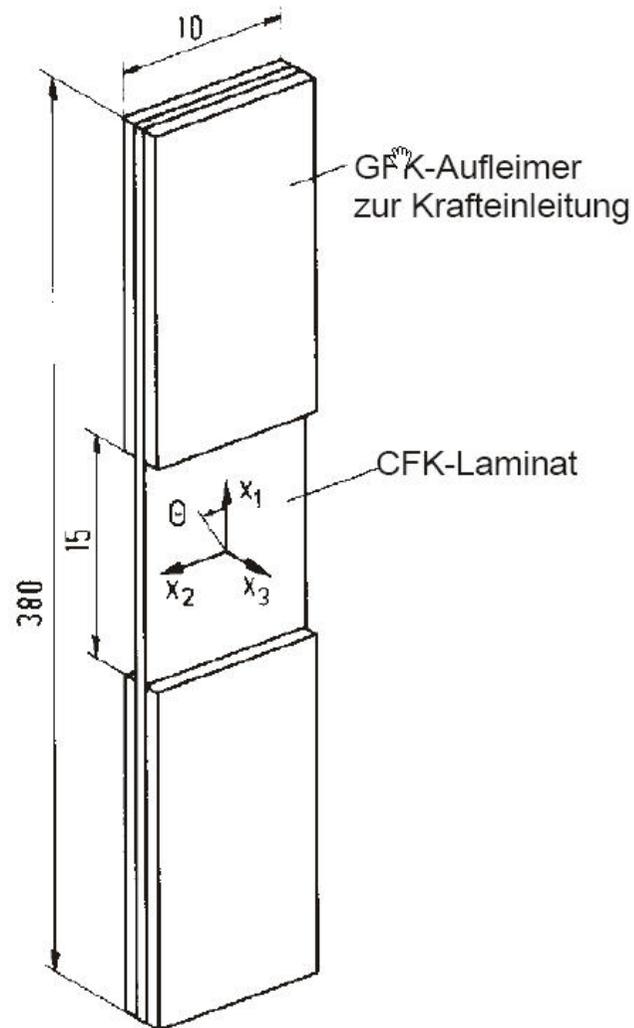


Kompliziertes und praktisch relevantes Problem, das mit potentiell singulären interlaminaren Randspannungen einhergeht.

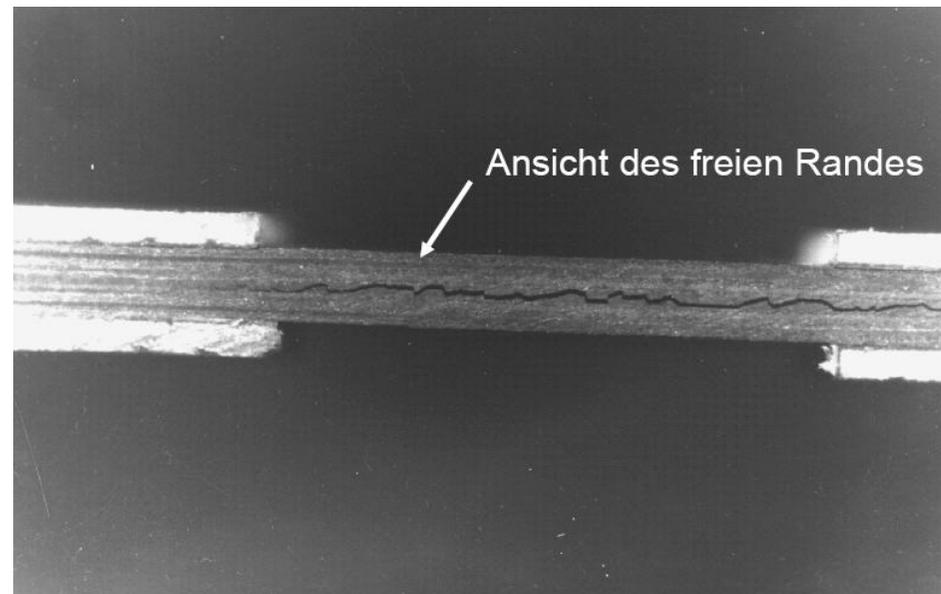
Verwandte Probleme



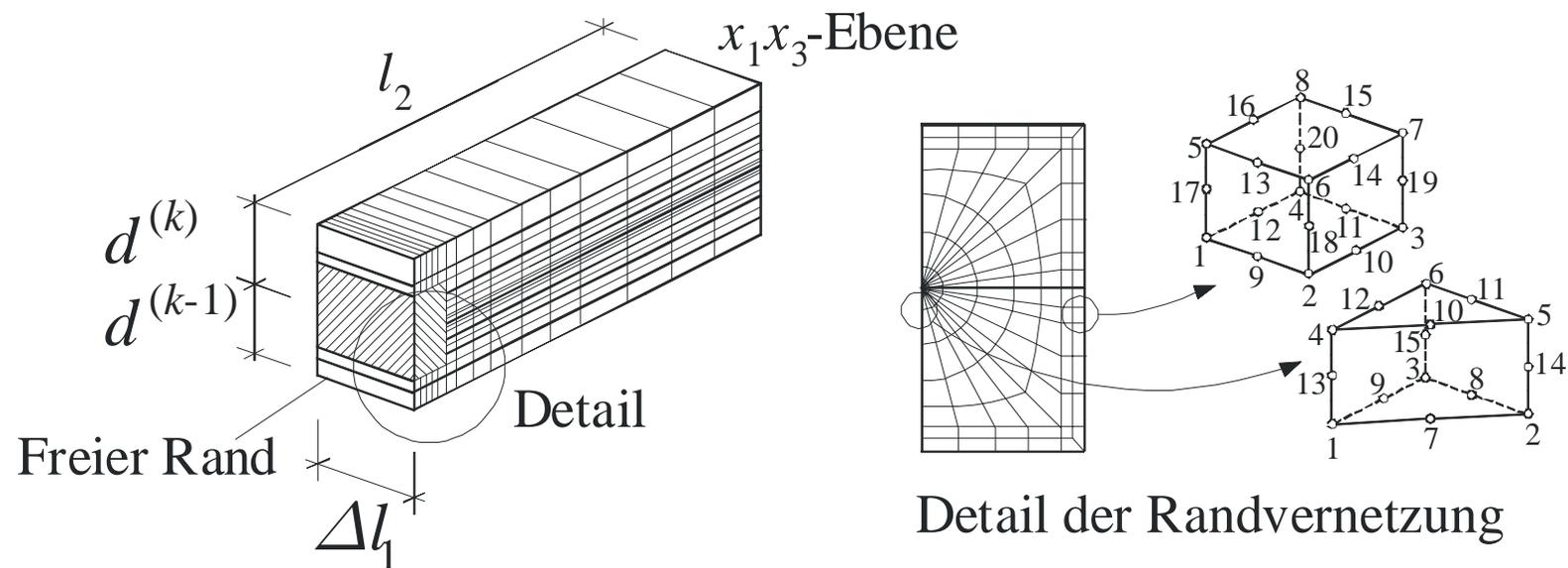
Experimentelle Befunde



Laminat-Zugprobe zur Abschätzung von Festigkeiten und Steifigkeiten, rasches Auftreten von Delaminationen am Rand.



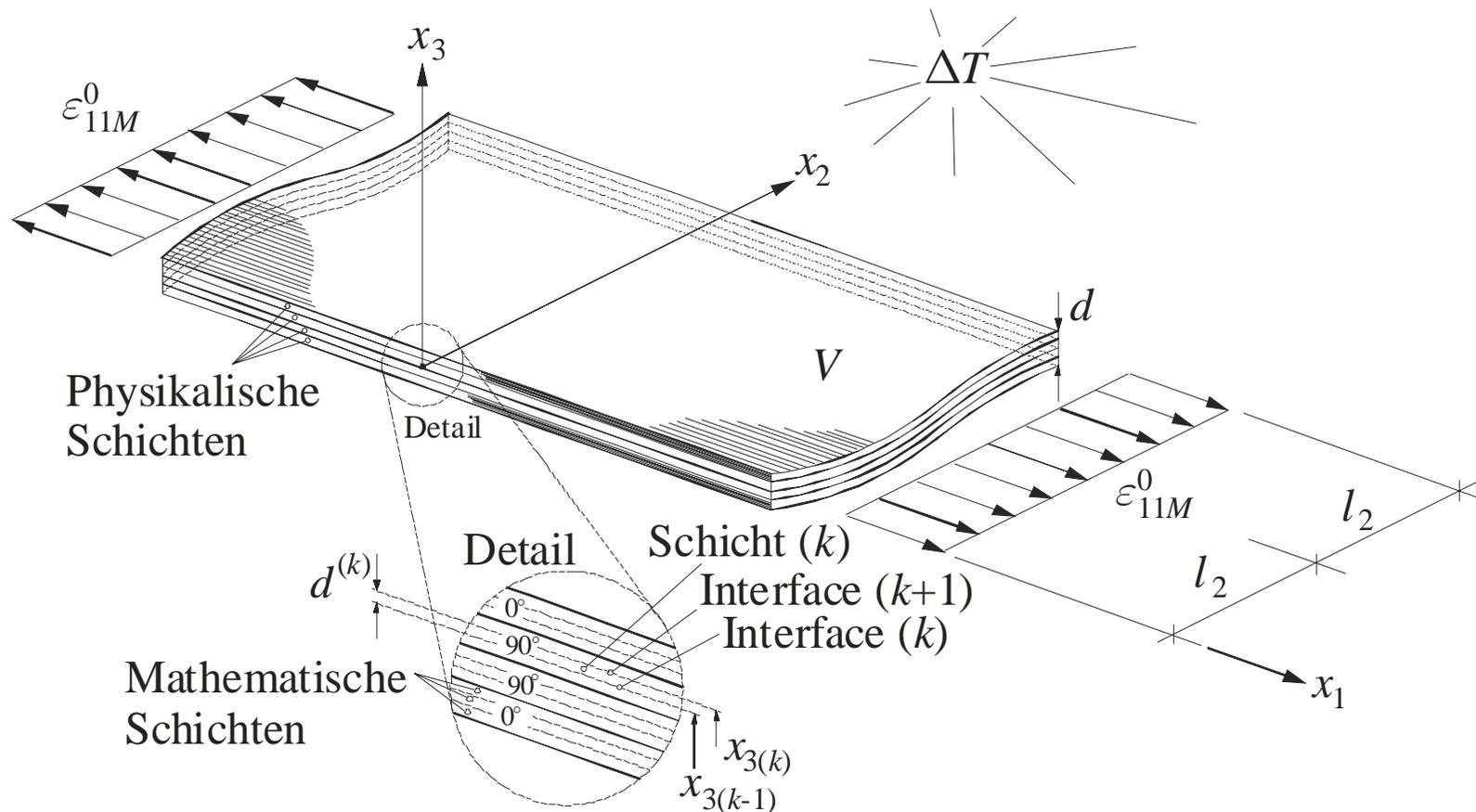
Probleme bei der numerischen Umsetzung



Analyse mittels FEM erfordert einen extrem hohen Berechnungsaufwand
 → Notwendigkeit effizienter geschlossen-analytischer Berechnungsverfahren.

Einteilung des Laminats in mathematische Schichten

Randeffekte in einer symmetrischen Laminatplatte unter thermomechanischer Beanspruchung, Einteilung der Schichten in n_L mathematische Schichten:



Lagenweiser Verschiebungsansatz

Lagenweises Verschiebungsfeld in mathematischer Schicht (k):

$$u_i^{(k)} = U_i^{0(k)} + U_i^{1(k)}, \quad (i = 1, 2, 3).$$

$U_i^{0(k)}$ ← Lagenweiser Verschiebungsterm nach
 Klassischer Laminattheorie
 $U_i^{1(k)}$ ← Lagenweiser Randstörungsterm mit
 linearer Interpolation in Dickenrichtung

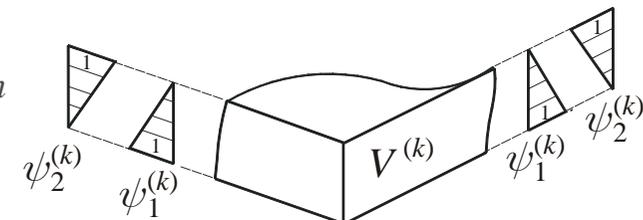
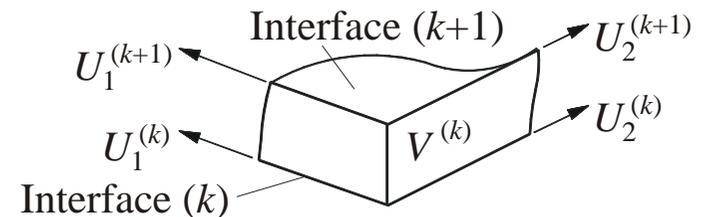
Lagenweise Randstörungsterme mit linearer Interpolation in Dickenrichtung zwischen unbekanntem Verschiebungsfunktionen in den Interfaces (k) and ($k+1$):

Lineares Interpolationspolynom,
ausgehend vom unteren Interface

Lineares Interpolationspolynom,
ausgehend vom oberen Interface

$$U_i^{1(k)} = U_i^{(k)}(x_2)\psi_1^{(k)}(x_3) + U_i^{(k+1)}(x_2)\psi_2^{(k)}(x_3).$$

$U_i^{(k)}$ ← Verschiebungsfunktion
 im unteren Interface
 $U_i^{(k+1)}$ ← Verschiebungsfunktion
 im oberen Interface



Euler-Lagrange-Gleichungen

Ermittlung der unbekanntenen Verschiebungsfunktionen aus dem Prinzip vom Minimum des elastischen Potentials:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r=n_L} \left[\iiint_{V^{(r)}} \underline{\underline{\varepsilon}}^{(r)T} \underline{\underline{C}}^{(r)} \underline{\underline{\varepsilon}}^{(r)} dV^{(r)} \right] - \sum_{r=1}^{r=n_L} \left[\iiint_{V^{(r)}} \underline{\underline{\sigma}}^{(r)T} \underline{\underline{\alpha}}_t^{(r)} \Delta T^{(r)} dV^{(r)} \right] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r=n_L} \left[\iiint_{V^{(r)}} \underline{\underline{\alpha}}_t^{(r)T} \Delta T^{(r)} \underline{\underline{C}}^{(r)} \underline{\underline{\alpha}}_t^{(r)} \Delta T^{(r)} dV^{(r)} \right] \stackrel{!}{=} \text{Min.} \end{aligned}$$

Euler-Lagrange-Gleichungen für das gegebene Laminatproblem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial U_1^{(k)}} - \frac{d}{dx_2} \left(\frac{\partial F}{\partial U_{1,2}^{(k)}} \right) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial U_2^{(k)}} - \frac{d}{dx_2} \left(\frac{\partial F}{\partial U_{2,2}^{(k)}} \right) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial U_3^{(k)}} - \frac{d}{dx_2} \left(\frac{\partial F}{\partial U_{3,2}^{(k)}} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Beschreibendes Differentialgleichungssystem

Verschiebungs-Differentialgleichungen für das gesamte Laminat:

$$\underline{\underline{K}}_1 \underline{U}_1 + \underline{\underline{K}}_2 \frac{\partial^2 \underline{U}_1}{\partial x_2^2} + \underline{\underline{K}}_3 \underline{U}_2 + \underline{\underline{K}}_4 \frac{\partial^2 \underline{U}_2}{\partial x_2^2} + \underline{\underline{K}}_5 \frac{\partial \underline{U}_3}{\partial x_2} = \underline{0},$$

$$\underline{\underline{K}}_6 \underline{U}_1 + \underline{\underline{K}}_7 \frac{\partial^2 \underline{U}_1}{\partial x_2^2} + \underline{\underline{K}}_8 \underline{U}_2 + \underline{\underline{K}}_9 \frac{\partial^2 \underline{U}_2}{\partial x_2^2} + \underline{\underline{K}}_{10} \frac{\partial \underline{U}_3}{\partial x_2} = \underline{0},$$

$$\underline{\underline{K}}_{11} \frac{\partial \underline{U}_1}{\partial x_2} + \underline{\underline{K}}_{12} \frac{\partial \underline{U}_2}{\partial x_2} + \underline{\underline{K}}_{13} \underline{U}_3 + \underline{\underline{K}}_{14} \frac{\partial^2 \underline{U}_3}{\partial x_2^2} = \underline{0}.$$

Zusammengefasste Schreibweise:

$$\underline{\underline{\tilde{K}}}_1 \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial x_2^2} + \underline{\underline{\tilde{K}}}_2 \frac{\partial \underline{U}}{\partial x_2} + \underline{\underline{\tilde{K}}}_3 \underline{U} = \underline{0}, \quad \text{with } \underline{U} = (\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3)^T.$$

Verschiebungslösung und Randbedingungen

Verschiebungsansatz in exponentieller Form:

$$\underline{U} = \underline{A} e^{\lambda x_2}.$$

Resultierendes quadratisches Eigenwertproblem:

$$\left(\lambda^2 \underline{\tilde{K}}_1 + \lambda \underline{\tilde{K}}_2 + \underline{\tilde{K}}_3 \right) \underline{A} = \underline{0}.$$

Gesamtlösung aus der Summation aller Eigenwerte und Eigenvektoren:

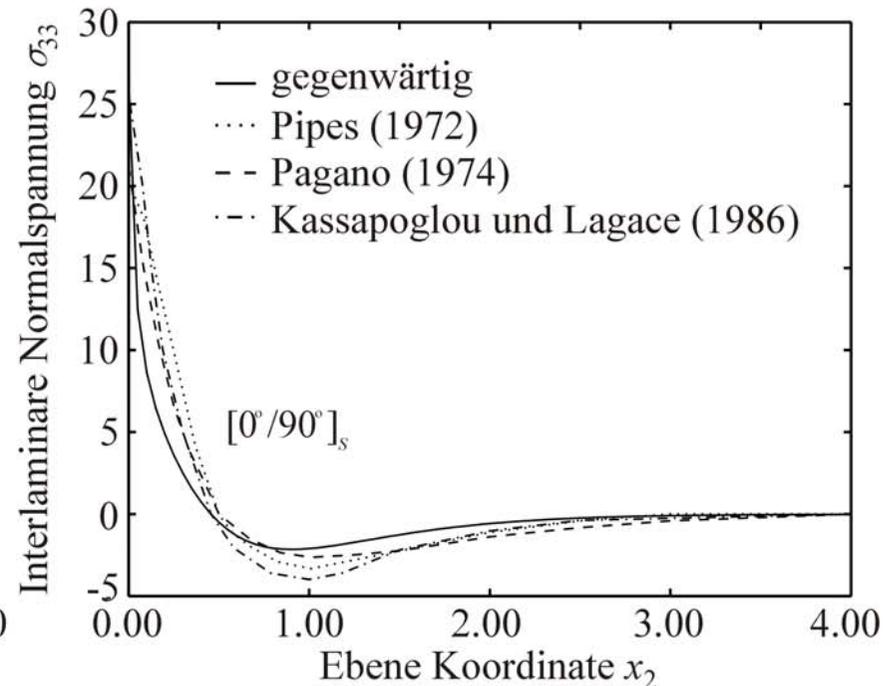
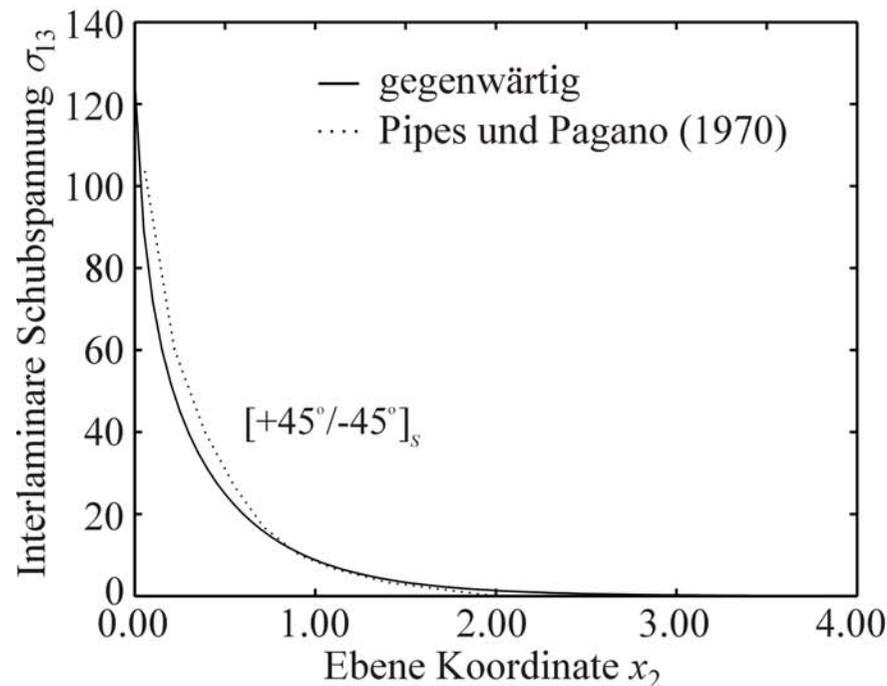
$$\underline{U} = \sum_{r=1}^{r=3(n_L+1)} b_r \underline{A}_r e^{\lambda_r x_2}.$$

Randbedingungen am freien Rand werden im integralen Mittel erfüllt:

$$\int_{x_{3(k-2)}}^{x_{3(k-1)}} \sigma_{i2}^{(k-1)}(x_2 = 0) \psi_2^{(k-1)} dx_3 + \int_{x_{3(k-1)}}^{x_{3(k)}} \sigma_{i2}^{(k)}(x_2 = 0) \psi_1^{(k)} dx_3 = 0.$$

Vergleich mit den Ergebnissen anderer Autoren

Vergleich mit klassischen Referenzergebnissen, interlaminare Spannungen in physikalischen Interfaces, Lamine unter Zugbeanspruchung:



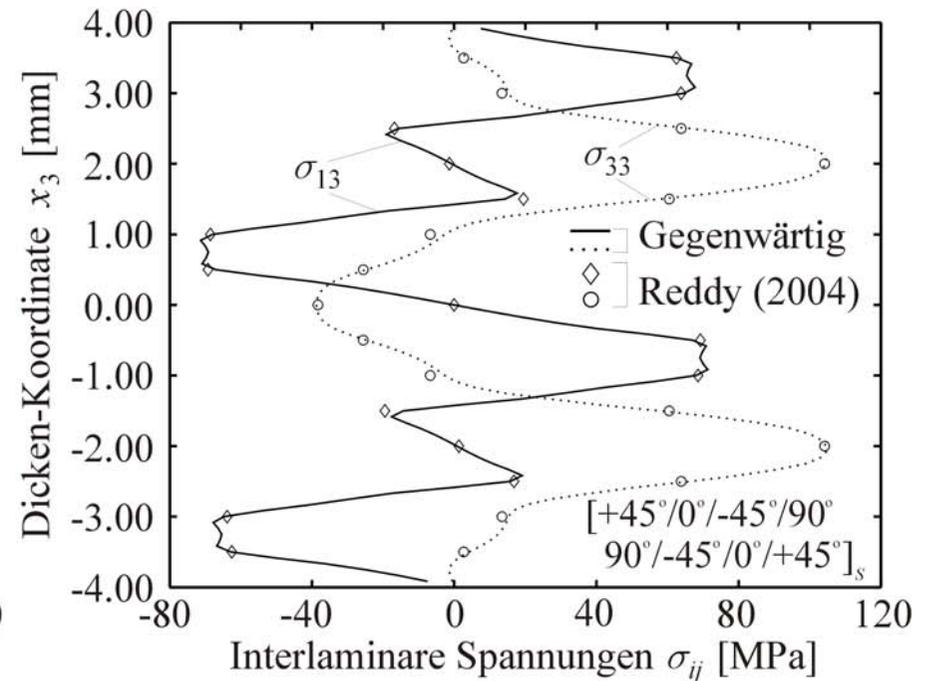
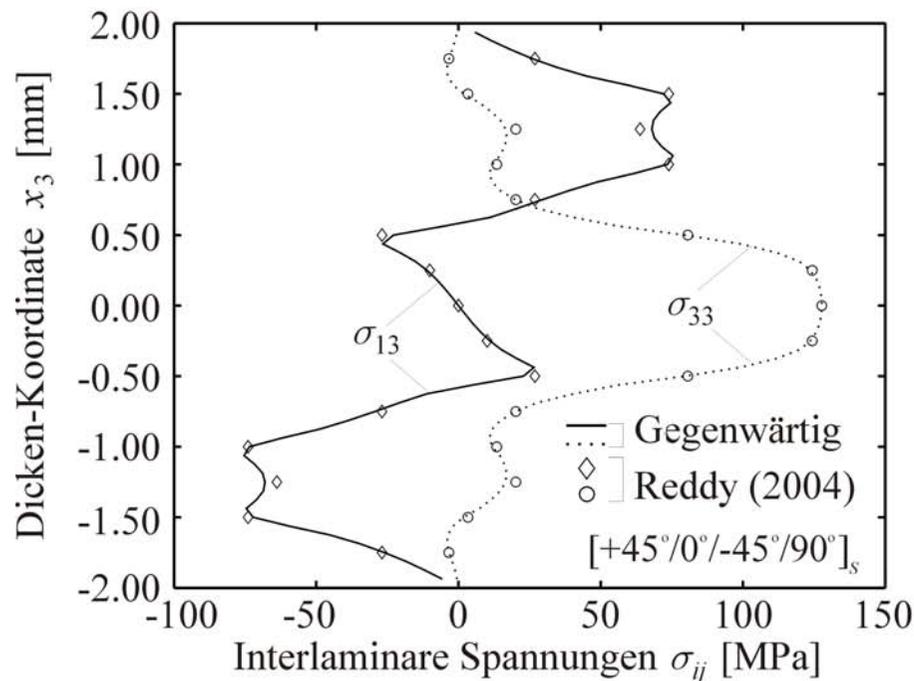
Hervorragende Übereinstimmung bei vernachlässigbarem Rechenaufwand (< 1s).

Pipes RB and Pagano NJ (1970), *Journal of Composite Materials* 4:538-48
 Pipes RB (1972), *Dissertation Thesis*, University of Texas, Arlington
 Pagano NJ (1974), *Journal of Composite Materials* 8:65-81
 Kassapoglou C and Lagace PA (1986), *Journal of Applied Mechanics* 53:744-50

(Finite-Differenzen-Methode)
 (Finite-Differenzen-Methode)
 (Platten-Theorie vom Mindlin-Typ)
 (Lagenweiser Spannungsansatz)

Vergleich mit FEM-Berechnungen nach Reddy (2004)

Interlaminare Spannungen nach der Verschiebungsmethode an freien Rändern
 typischer Flugzeugbau-Laminare:



Die Übereinstimmung ist exzellent mit geringem Berechnungsaufwand:

- Reddys FEM-Berechnungen benötigen mindestens einige Minuten,
- die gegenwärtige Methode benötigt wenige Sekunden bei gleicher Genauigkeit.

Maßnahmen zur Minimierung von Randeffekten

- 1) Vermeiden allzu großer Steifigkeitsunterschiede / Unterschiede in den Faserrichtungen benachbarter Schichten.
- 2) Möglichst dünne Schichten.
- 3) Zusammenfügen mehrerer unmittelbar benachbarter Schichten zu einer „dicken“ Einzelschicht vermeiden.
- 4) Gutes „Durchmischen“ der Schichten bei nicht allzu großen Sprüngen in der Faserorientierung.
- 5) Durch Positionswechsel von Schichten negative Schälspannungen erzwingen.
- 6) Ggf. Zusatzmaßnahmen treffen, wie z.B. Vernähungen, Randeinfassungen, ...

Gliederung

1. Einführung
2. Klassische Laminattheorie
3. Flanschbeulen dünnwandiger Composite-Träger
4. Randeffekte in Laminatplatten
- 5. Zusammenfassung und Ausblick**

Zusammenfassung / Take-Home-Messages

Komplexität der Berechnung von Composite-Bauteilen:

Anisotropie, geschichteter Charakter, Kopplungseffekte, Randeffekte erschweren die Analyse von Composite-Bauteilen im Vergleich zu isotropen Tragwerken.

Über die vorgestellten Analysezugänge:

1. Effizienz und Einfachheit

Die entwickelten Methoden sind einfach einsetzbar, leicht verständlich und arbeiten hocheffizient.

2. Genauigkeit

Die Genauigkeit ist exzellent und mit FEM-Berechnungen vergleichbar.

3. Berechnungsaufwand

Der Berechnungsaufwand ist äußerst gering.

4. Brauchbarkeit

Die Methoden sind besonders geeignet für das Vordesign, für Optimierungen und für Parameterstudien.

Ausblick / To-Do-List

1. Postbuckling / Geometrisch nichtlineare Analyse

Entwicklung analytischer und semi-analytischer Verfahren zur Abschätzung des überkritischen Verhaltens ausgesteifter Composite-Strukturen.

2. Einsatz innovativer numerischer Verfahren I

Einsatz neuartiger Randdiskretisierungs-Verfahren („Rand-Finite-Elemente-Methode“) zur Analyse singulärer Spannungs-Konzentrations-Probleme.

3. Einsatz innovativer numerischer Verfahren II

Einsatz neuartiger Partikel-Methoden („Peridynamics“) zur Analyse des Impact- und Schädigungs-Verhaltens geschichteter Strukturen.

4. Spannungs-Konzentrations-Probleme: Geschlossen-analytische Verfahren

Entwicklung neuer geschlossen-analytischer Verfahren zur Analyse von Spannungs-Konzentrations-Problemen in Composite-Laminaten (Löcher, Kerben, Risse).

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Fragen? Anregungen?

christian.mittelstedt@airbus.com

Literaturhinweise

1. Mittelstedt C / Becker W (2006)

Fast and reliable analysis of free-edge stress fields in a thermally loaded composite strip by a layerwise laminate theory
International Journal for Numerical Methods in Engineering 67:747-770

2. Mittelstedt C / Becker W (2007)

The Pipes-Pagano problem revisited: Elastic fields in boundary layers of plane laminated specimens under combined thermomechanical load
Composite Structures 80:373-395

3. Mittelstedt C / Becker W (2007)

Free-edge effects in composite laminates
Applied Mechanics Reviews 60:217-245

4. Mittelstedt C / Beerhorst M / Becker W (2009)

Ein Beitrag zur Analyse des Flansch-Beulproblems dünnwandiger anisotroper Composite-Träger
Bauingenieur 84:35-45

5. Mittelstedt C (2007)

Stability behaviour of arbitrarily laminated composite plates with free and elastically restrained unloaded edges
International Journal of Mechanical Sciences 49:819-833