BTU Cottbus-Senftenberg
Prof. Dr. G. Wachsmuth, Dr. P. Mehlitz

Cottbus, 6. Dezember 2021
Abgabe am 13. Dezember 2021

Analysis I

Übung 9: Konvergenz von Zahlenreihen

Aufgabe 1: Konvergenzkriterien für reelle Zahlenreihen

Untersuchen Sie die folgend gegebenen reellen Zahlenreihen auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arctan n)^n}{2^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt[n]{3}-1)$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

Aufgabe 2: Anwendung des Cauchyschen Verdichtungssatzes

Es sei $\alpha > 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass dann die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln n)^{\alpha}}$$

genau für $\alpha > 1$ konvergent ist.

Aufgabe 3: Eine Teleskopreihe

Zeigen Sie zunächst, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+1)(n+2)}$$

konvergent ist und bestimmen Sie anschließend deren Wert.

Aufgabe 4: Gliedweise Produktreihe

Es seien (a_n) und (b_n) reelle Zahlenfolgen. Weiterhin sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und (b_n) beschränkt. Zeigen Sie, dass dann auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut konvergent ist. Gilt diese Aussage auch, wenn man jeweils *absolut konvergent* durch *konvergent* ersetzt?

Hausaufgabe 1: Konvergenz reeller Zahlenreihen

Untersuchen Sie die folgend gegebenen reellen Zahlenreihen auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos n)^{2n}}{(\pi - \arctan n)^n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2021}}{2022^n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^n)}{n!}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\ln n}$

(16 Punkte)

Hausaufgabe 2: Werte konvergenter Reihen

Bestimmen Sie die Werte der folgend gegebenen konvergenten Reihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 3}{2^{n+1}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 - 1} - n}{\sqrt{n(n+1)}}$

(8 Punkte)

Hausaufgabe 3: Aussagen über eine absolut konvergente Reihe

Entscheiden Sie jeweils (mit Begründung), ob die folgenden Aussagen über beliebige reelle Zahlenfolgen mit der Eigenschaft, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent ist, wahr oder falsch sind.

(a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist absolut konvergent.

(b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ist absolut konvergent.

(c) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|}$ ist absolut konvergent.

(d) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ ist absolut konvergent.

(e) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/(1 + |a_n|)$ ist absolut konvergent.

(5 Punkte)

Hausaufgabe 4: Divergenz der Reihe der Primzahlreziproken

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $p_n \in \mathbb{N}$ die n-te Primzahl. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$$

divergent ist.
Hinweis: Nutzen Sie die für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 6$ gültige Abschätzung $p_n \leq n(\operatorname{ld} n + \operatorname{ld}(\operatorname{ld} n))$. (4 Zusatzpunkte)