BTU Cottbus-Senftenberg
Prof. Dr. G. Wachsmuth, Dr. P. Mehlitz

Cottbus, 29. November 2021
Abgabe am 6. Dezember 2021

Analysis I

Übung 8: Topologische Grundbegriffe

Aufgabe 1: Eine Charakterisierung von Cauchyfolgen

Es sei $(a_n) \subset \mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ eine Zahlenfolge. Zeigen Sie, dass (a_n) genau dann eine Cauchyfolge ist, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists a \in \mathbb{K} \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N}: \quad n \geq N \implies a_n \in U_\varepsilon(a).$$

Aufgabe 2: Abschluss und Inneres von Mengen

Es sei I eine nichtleere Indexmenge. Für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ seien $A_i \subset \mathbb{K}$, $i \in I$, abgeschlossene und $O_i \subset \mathbb{K}$, $i \in I$, offene Mengen. Zeigen Sie, dass dann die Menge $\bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen und die Menge $\bigcup_{i \in I} O_i$ offen ist.

Wegen Obigem sind damit für jede Menge $M \subset \mathbb{K}$ der *Abschluss* $\operatorname{cl} M$ und das *Innere* $\operatorname{int} M$ der Menge M, welche gemäß

$$\begin{aligned} \operatorname{cl} M &:= \bigcap \{A \subset \mathbb{K} \,|\, M \subset A,\ A \text{ abgeschlossen}\}, \\ \operatorname{int} M &:= \bigcup \{O \subset \mathbb{K} \,|\, O \subset M,\ O \text{ offen}\} \end{aligned}$$

definiert sind, abgeschlossen bzw. offen. Genauer gesagt ist $\operatorname{cl} M$ die bzgl. der Mengeninklusion kleinste Obermenge von M, die abgeschlossen ist. Analog ist $\operatorname{int} M$ die bzgl. der Mengeninklusion größte Teilmenge von M, die offen ist. Insbesondere ist M genau dann abgeschlossen wenn $M = \operatorname{cl} M$ gilt. Außerdem ist M genau dann offen, wenn $M = \operatorname{int} M$ gilt.

Aufgabe 3: Abschluss und Inneres von Mengen in $\mathbb{C}$

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Ebene. Sind diese Mengen jeweils abgeschlossen bzw. offen? Geben Sie jeweils den Abschluss und das Innere dieser Mengen an.

(a) $M_\mathrm{a} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, 1 < |z| < 2,\ \operatorname{Arg} z \in (0, \frac{\pi}{3})\}$

(b) $M_\mathrm{b} := \{\frac{1}{t}(\cos(\pi t) + i \sin(\pi t)) \in \mathbb{C} \,|\, t > 1\}$

(c) $M_\mathrm{c} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ \operatorname{Im} z \in \mathbb{Z}\} \cup \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$

Aufgabe 4: Aussagen über kompakte Mengen

Wir fixieren $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen über kompakte Mengen.

(a) Die Vereinigung endlich vieler kompakter Teilmengen von $\mathbb{K}$ ist kompakt.

(b) Die Vereinigung beliebig vieler kompakter Teilmengen von $\mathbb{K}$ ist kompakt.

(c) Der Durchschnitt beliebig vieler kompakter Teilmengen von $\mathbb{K}$ ist kompakt.

Aufgabe 5: Summen von Mengen

Wir fixieren $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Für $A, B \subset \mathbb{K}$ setzen wir $A + B := \{a + b \,|\, a \in A,\, b \in B\}$.

(a) Es seien A abgeschlossen und B kompakt. Zeigen Sie, dass dann $A+B$ abgeschlossen ist. Gilt diese Aussage auch, wenn B lediglich als abgeschlossen vorausgesetzt wird?

(b) Es seien A und B kompakt. Zeigen Sie, dass dann $A + B$ kompakt ist.

Hausaufgabe 1: Schnitte und Vereinigungen endlich vieler Mengen

(a) Es seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $n \in \mathbb{N}$ fixiert. Weiterhin seien $A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{K}$ abgeschlossen und $O_1, \ldots, O_n \subset \mathbb{K}$ offen. Zeigen Sie, dass dann die Menge $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ abgeschlossen und die Menge $\bigcap_{i=1}^{n} O_i$ offen ist. (3 Punkte)

(b) Zeigen Sie anhand von Beispielen, dass die Vereinigung unendlich vieler abgeschlossener Mengen aus $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ nicht notwendigerweise abgeschlossen bzw. der Durchschnitt unendlich vieler offener Mengen aus $\mathbb{K}$ nicht notwendigerweise offen ist. (2 Punkte)

Hausaufgabe 2: Nochmal Abschluss und Inneres von Mengen in $\mathbb{C}$

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Ebene. Sind diese Mengen jeweils abgeschlossen bzw. offen? Geben Sie jeweils den Abschluss und das Innere dieser Mengen an.

(a) $M_{\mathrm{a}} := \left\{ \frac{t}{1+t}(\cos(\pi t) + i \sin(\pi t)) \in \mathbb{C} \,\middle|\, t > 0 \right\}$

(b) $M_{\mathrm{b}} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, (\operatorname{Re} z) \cdot (\operatorname{Im} z) \leq 0,\, |z| \leq 1\}$

(8 Punkte)

Hausaufgabe 3: Weitere Aussagen über kompakte Mengen

Wir fixieren $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Beweisen Sie die korrekten und widerlegen Sie die falschen Aussagen (ein Gegenbeispiel genügt) über kompakte Mengen.

(a) Ist $K \subset \mathbb{K}$ endlich, so ist K kompakt.

(b) Ist $K \subset \mathbb{K}$ kompakt und $E \subset \mathbb{K}$ endlich, so ist $K \setminus E$ kompakt.

(c) Ist $K \subset \mathbb{K}$ kompakt und $O \subset \mathbb{K}$ offen, so ist $K \setminus O$ kompakt.

(d) Ist $B \subset \mathbb{K}$ beschränkt, so ist $\operatorname{cl} B$ kompakt.

(e) Ist $A \subset \mathbb{K}$ abgeschlossen, so ist $A \setminus (\operatorname{int} A)$ kompakt.

(8 Punkte)