BTU Cottbus-Senftenberg
Prof. Dr. G. Wachsmuth, Dr. P. Mehlitz

Cottbus, 22. November 2021
Abgabe am 29. November 2021

Analysis I

Übung 7: Grenz- und Häufungswerte von Zahlenfolgen

Aufgabe 1: Berechnung von Grenzwerten

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1-2n^2}{\sqrt{4n^4+2n^3}}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{2^n+3^{n+1}}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-n$ (d) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1}$

(e) $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$ (f) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

Aufgabe 2: Konvergenz einer rekursiv definierten Zahlenfolge

Eine reelle Zahlenfolge (a_n) mit $a_1 := 2$ sei rekursiv gemäß

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \quad a_{n+1} := \frac{2a_n}{1+a_n}$$

gegeben. Weisen Sie nach, dass (a_n) konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert dieser Folge.

Aufgabe 3: Häufungspunkte einiger Zahlenfolgen

Bestimmen Sie jeweils die Häufungspunkte der gegebenen (reellen und komplexen) Folgen (a_n).

(a) $a_n := 2^{-n} + i^n, \quad n \in \mathbb{N}$

(b) $a_n := \begin{cases} \frac{n+1}{n} + (-1)^{3n} & \text{falls } n \text{ durch 3 teilbar ist,} \\ \sqrt[n]{3} & \text{sonst,} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$

(c) $a_n := \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 4: Rechenregeln für den Limes superior

Es seien (a_n) und (b_n) beschränkte reelle Zahlenfolgen. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussagen.

(a) Es gilt stets

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(b) Es sei (a_n) konvergent. Dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Hausaufgabe 1: Tagesaktuelle Grenzwerte

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{2021} kn^k}{\sum_{k=1}^{2021} n^k}$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2021^n + 2022^n}$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2021}{n^2}\right)^n$ (d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2n\left(\sqrt{\left(1 + \frac{2021}{n}\right)\left(1 + \frac{2022}{n}\right)} - 1\right)$

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2021k^2}{n^3 + 2022k}$ (f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[2021]{n + 2022} - \sqrt[2021]{n}$

(12 Punkte)

Hausaufgabe 2: Rekursive Anwendung der Wurzelfunktion

Für eine reelle Zahl $\alpha > 0$ definieren wir eine reelle Zahlenfolge (a_n) mit $a_1 := \sqrt{\alpha}$ rekursiv gemäß

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad a_{n+1} := \sqrt{\alpha + a_n}.$$

Weisen Sie nach, dass (a_n) konvergiert. Bestimmen Sie α so, dass (a_n) gegen $\frac{3}{2}$ konvergiert. (5 Punkte)

Hausaufgabe 3: Folgen mit speziellen Eigenschaften

Konstruieren Sie jeweils:

(a) für alle $m \in \mathbb{N}$: eine komplexe Zahlenfolge mit genau m verschiedenen Häufungspunkten,

(b) eine reelle Zahlenfolge mit genau einem endlichen Häufungspunkt, die nicht konvergiert,

(c) eine reelle Zahlenfolge, deren Häufungspunkte genau die natürlichen Zahlen sind,

(d) reelle Zahlenfolgen (a_n) und (b_n), sodass gilt:

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n &< \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n)\\ &< \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n\\ &< \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) < \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.\end{aligned}$$

(4 Punkte)

Hausaufgabe 4: Monotone Folgen mit Häufungspunkt sind konvergent

Es sei (a_n) eine monotone reelle Zahlenfolge. Ferner besitze (a_n) den Häufungspunkt $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie $a_n \to a$. (3 Punkte)

Hausaufgabe 5: Eine Eigenschaft des Limes inferior

Es seien (a_n) und (b_n) beschränkte reelle Zahlenfolgen sowie a und b reelle Zahlen, sodass $(a_n + b_n)$ gegen $a + b$ konvergiert. Weiterhin mögen die Abschätzungen

$$a \leq \liminf_{n\to\infty} a_n, \qquad b \leq \liminf_{n\to\infty} b_n$$

gelten. Zeigen Sie $a_n \to a$ und $b_n \to b$. (4 Zusatzpunkte)