BTU Cottbus-Senftenberg
Prof. Dr. G. Wachsmuth, Dr. P. Mehlitz

Cottbus, 15. November 2021
Abgabe am 22. November 2021

Analysis I

Übung 6: Kardinalzahlen und Zahlenfolgen

Aufgabe 1: Hilberts Hotel

In *Hilberts Hotel* gibt es abzählbar viele Einzelzimmer, welche aufsteigend mit den natürlichen Zahlen durchnummeriert sind. Zum gegenwärtigen Zeitpunkt ist das Hotel voll belegt. Entscheiden Sie jeweils, ob die folgend angegebenen Zusatzgäste dennoch untergebracht werden können.

(a) Es kommt ein weiterer Gast.

(b) Es kommt ein Bus mit abzählbar vielen Gästen.

(c) Es kommen abzählbar viele Busse mit jeweils abzählbar vielen Gästen.

(d) Zu einer städtischen Konferenz kommen unendlich viele Delegierte, die allesamt voneinander verschiedene Erkennungsschilder tragen. Jedes Erkennungsschild besteht aus einer unendlichen Folge von Nullen und Einsen. Es kommen genau soviele Delegierte, dass alle derartigen Erkennungsschilder vergeben werden mussten.

Aufgabe 2: Kartesisches Produkt abzählbarer Mengen

Zeigen Sie induktiv, dass das kartesische Produkt $n \in \mathbb{N}$ vieler abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist. Ist das kartesische Produkt abzählbar vieler abzählbarer Mengen wieder abzählbar?

Aufgabe 3: Konvergenznachweis in $\mathbb{R}$ mittels Definition

Zeigen Sie anhand der Grenzwertdefinition, dass die gemäß

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad a_n := \ln(n+1) - \ln n$$

definierte reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 4: Konvergenz von Maximum und Minimum reeller Zahlenfolgen

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$ für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass dann auch die Konvergenzbeziehungen $\max(a_n, b_n) \to \max(a, b)$ und $\min(a_n, b_n) \to \min(a, b)$ gelten.

Aufgabe 5: Cauchyscher Grenzwertsatz

Die komplexe Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen $a \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \to a.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $a := 0$.

Hausaufgabe 1: Eine Transitivitätseigenschaft der Kardinalzahlen

Es seien M, N und K beliebige Mengen, welche die Relationen $\operatorname{card}(M) \leq \operatorname{card}(N)$ sowie $\operatorname{card}(N) \leq \operatorname{card}(K)$ erfüllen. Zeigen Sie, dass dann auch $\operatorname{card}(M) \leq \operatorname{card}(K)$ gilt. (2 Punkte)

Hausaufgabe 2: Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen

Eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ heißt *algebraisch*, falls sie Nullstelle eines Polynoms über ganzzahligen Koeffizienten ist, d.h. falls $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ mit $a_n \neq 0$ sowie

$$\sum_{k=0}^{n} a_k r^k = 0$$

existieren. Beweisen Sie, dass die Menge aller algebraischen Zahlen abzählbar ist.
Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, dass es für fixes $n \in \mathbb{N}$ nur abzählbar viele Polynome vom Grad n mit ganzzahligen Koeffizienten geben kann. Nutzen Sie außerdem, dass ein Polynom vom Grad n in $\mathbb{R}$ höchstens n verschiedene Nullstellen besitzen kann. (5 Punkte)

Hausaufgabe 3: Konvergenznachweis in $\mathbb{C}$ mittels Definition

Zeigen Sie anhand der Grenzwertdefinition, dass die gemäß

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad a_n := \frac{ni}{n-i}$$

definierte komplexe Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen i konvergiert. (3 Punkte)

Hausaufgabe 4: Aussagen über Grenzwerte

Beweisen Sie die korrekten und widerlegen Sie die falschen Aussagen (ein Gegenbeispiel genügt) über reelle Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Ist $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist mindestens eine der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

(b) Konvergiert $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0, so ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(c) Genau dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, wenn $(\max(a_n, 0))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\min(a_n, 0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind.

(d) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und konvergiert $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so konvergiert mindestens eine der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(e) Sei $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Genau dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, wenn $(a_{p(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

(7 Punkte)