BTU Cottbus-Senftenberg
Prof. Dr. G. Wachsmuth, Dr. P. Mehlitz

Cottbus, 8. November 2021
Abgabe am 15. November 2021

# Analysis I

# Übung 5: Das Rechnen mit komplexen Zahlen

### Aufgabe 1: Ein Dreieck auf dem komplexen Einheitskreis

Beweisen Sie, dass für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ die Gleichung

$$|z+1|^2 + |z-1|^2 = 4$$

gilt. Welcher elementare geometrische Sachverhalt versteckt sich hinter dieser Identität?

### Aufgabe 2: Winkelverdreifachung beim Sinus

Zeigen Sie mittels komplexer Zahlen und deren Potenzen die Gültigkeit der Identität

$$\sin(3\varphi) = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$$

für alle $\varphi \in \mathbb{R}$.

### Aufgabe 3: Eine Summe von Kosinusausdrücken

Finden Sie einen geschlossenen Ausdruck für die Summe

$$1 + \cos\varphi + \cos(2\varphi) + \ldots + \cos(n\varphi)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $\varphi \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

### Aufgabe 4: Komplexes Wurzelziehen

Bestimmen Sie jeweils alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen.

(a) $z^3 = i$

(b) $z^2 + 4iz - 4(1-i) = 0$

(c) $(z+1)^3 - 2 + 2i = 0$

### Aufgabe 5: Ein Konjugationsargument

Für $r \in \mathbb{R}$ mit $r \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ betrachten wir die Gleichung

$$z^n = r.$$

Es sei $z^* \in \mathbb{C}$ eine Lösung dieser Gleichung. Zeigen Sie, dass dann auch $\overline{z^*}$ diese Gleichung löst.

## Hausaufgabe 1: Eine Identität über den komplexen Zahlen

Beweisen Sie die Gültigkeit der Identität

$$|1-\overline{z}w|^2-|z-w|^2=(1-|z|^2)(1-|w|^2)$$

für alle komplexen Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$. (3 Punkte)

## Hausaufgabe 2: Winkelverdoppelung beim Tangens

Zeigen Sie mittels komplexer Zahlen und deren Potenzen die Gültigkeit der Identität

$$\tan(2\varphi)=\frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}$$

für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $\varphi \neq \frac{1}{2}(2k+1)\pi$ und $\varphi \neq \frac{1}{4}(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (3 Punkte)

## Hausaufgabe 3: Nochmal komplexes Wurzelziehen

Bestimmen Sie jeweils alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen.

(a) $z^5=-z$

(b) $z^2+(-5+4i)z+25-25i=0$

(c) $z^6+8=4z^3$

(10 Punkte)

## Hausaufgabe 4: Eigenschaften der komplexen Einheitswurzeln

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ sind die Lösungen der Gleichung $z^n=1$ bekanntermaßen gemäß

$$z_k := \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+i\,\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \qquad k=0,1,\ldots,n-1$$

gegeben. Beweisen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussagen.

(a) Für jedes $m \in \{1,\ldots,n-1\}$ gilt $\sum_{k=0}^{n-1} z_k^m=0$. (2 Punkte)

(b) Es gilt $\sum_{k=1}^{n-1}|1-z_k|=2\,\cot(\pi/(2n))$. Hierbei bezeichnet $\cot\varphi := \cos\varphi/\sin\varphi$ den Kotangens von $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $\varphi \neq \ell\pi$, $\ell \in \mathbb{Z}$. (3 Punkte)

## Hausaufgabe 5: Eine Summe von Sinusausdrücken

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $\varphi \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, die Gültigkeit der folgenden Identität mittels komplexer Zahlen und deren Potenzen.

$$\sum_{m=1}^{n}\sin((2m-1)\varphi)=\frac{\sin^2(n\varphi)}{\sin\varphi}$$

(4 Zusatzpunkte)