BTU Cottbus-Senftenberg
Prof. Dr. G. Wachsmuth, Dr. P. Mehlitz

Cottbus, 1. November 2021
Abgabe am 8. November 2021

Analysis I

Übung 4: Infimum, Supremum und komplexe Zahlen

Aufgabe 1: Suprema und Infima von Mengen

Bestimmen Sie jeweils (falls existent) Supremum, Infimum, Maximum und Minimum der folgend gegebenen Teilmengen der reellen Zahlen.

$$\text{(a)} \qquad M_{\mathrm{a}} := \left\{ (-1)^n \left(\frac{2}{n} + 1 \right) \in \mathbb{R} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\text{(b)} \qquad M_{\mathrm{b}} := \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \in \mathbb{R} \,\middle|\, n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

Aufgabe 2: Infimum von Vereinigungen

Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkte Mengen. Zeigen Sie

$$\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B).$$

Aufgabe 3: Supremum und Infimum für Mengensummen

Für beliebige Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ definieren wir

$$A + B := \{a + b \in \mathbb{R} \,|\, a \in A,\, b \in B\}.$$

(a) Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Zeigen Sie

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Analog folgt

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

für nach unten beschränkte Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$.

(b) Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nach oben und unten beschränkt. Zeigen Sie

$$\inf(A + B) \leq \inf A + \sup B \leq \sup(A + B).$$

Geben Sie ein Beispiel an, sodass die obigen Relationen mit strikter Ungleichung erfüllt sind.

Aufgabe 4: Kennzahlen komplexer Zahlen

Bestimmen Sie jeweils Real- und Imaginärteil der folgend gegebenen komplexen Zahlen.

(a) $\dfrac{3}{2+i}$ (b) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$ (c) $\dfrac{2i}{1-i\sqrt{3}}$

Aufgabe 5: Mengen in der komplexen Ebene

Skizzieren Sie die folgend gegebenen Mengen in der komplexen Ebene.

(a) $M_{\mathrm{a}} := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq z\overline{z} < 4\}$

(b) $M_{\mathrm{b}} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(iz) < |\mathrm{Re}(z)|\}$

(c) $M_{\mathrm{c}} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}((z-1)/z) = 1\}$

Hausaufgabe 1: Suprema und Infima von weiteren Mengen

Bestimmen Sie jeweils (falls existent) Supremum, Infimum, Maximum und Minimum der folgend gegebenen Teilmengen der reellen Zahlen.

$$\text{(a)} \qquad M_{\mathrm{a}} := \left\{ a + \frac{1}{a} \in \mathbb{R} \,\middle|\, a \in \mathbb{R},\ \tfrac{1}{2} < a \leq 2 \right\}$$

$$\text{(b)} \qquad M_{\mathrm{b}} := \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1-(-1)^n}{2} \in \mathbb{R} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

(8 Punkte)

Hausaufgabe 2: Aussagen über Supremum und Infimum

Beweisen Sie die korrekten und widerlegen Sie die falschen Aussagen (ein Gegenbeispiel genügt) über nichtleere Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$.

(a) Ist A nach unten beschränkt, so gilt $\sup(-A) = -\inf A$, wobei wir $-A := \{(-1)\cdot a \in \mathbb{R} \mid a \in A\}$ setzen.

(b) Ist A beschränkt und gilt $0 \notin A$, so folgt $(\inf A)^{-1} = \sup(A^{-1})$, wobei wir $A^{-1} := \{a^{-1} \in \mathbb{R} \mid a \in A\}$ setzen.

(c) Sind A und B nach oben beschränkt, so gilt $(\sup A)\cdot(\sup B) = \sup(A \cdot B)$, wobei wir $A \cdot B := \{a \cdot b \in \mathbb{R} \mid a \in A,\ b \in B\}$ setzen.

(d) Gilt $A \subset B$ und ist B nach oben beschränkt, so gilt $\sup A \leq \sup B$.

(6 Punkte)

Hausaufgabe 3: Kennzahlen weiterer komplexer Zahlen

Bestimmen Sie jeweils Real- und Imaginärteil der folgend gegebenen komplexen Zahlen.

(a) $\dfrac{5}{3+4i} + \dfrac{1}{2+i}$ (b) $\dfrac{(3-i)^2}{(1-i)^3}$

(4 Punkte)

Hausaufgabe 4: Weitere Mengen in der komplexen Ebene

Skizzieren Sie die folgend gegebenen Mengen in der komplexen Ebene.

(a) $M_{\mathrm{a}} := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im}((1-i)z) \leq 1\}$

(b) $M_{\mathrm{b}} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z^2) - z\overline{z} \leq \operatorname{Im}(-iz)\}$

(c) $M_{\mathrm{c}} := \{z \in \mathbb{C} \mid (1/z) + (1/\overline{z}) = 1\}$

(6 Punkte)