BTU Cottbus-Senftenberg
Prof. Dr. G. Wachsmuth, Dr. P. Mehlitz

Cottbus, 25. Oktober 2021
Abgabe am 1. November 2021

Analysis I

Übung 3: Das Rechnen mit reellen Zahlen

Aufgabe 1: Ein Polynom mit irrationalen Nullstellen

Es seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ungerade ganze Zahlen. Wir betrachten die quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

in der reellen Unbekannten x. Zeigen Sie, dass diese keine rationale Lösung besitzen kann.

Aufgabe 2: Darstellung von Maximum und Minimum über den Betrag

Beweisen Sie für alle reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ die Korrektheit der Darstellungen

$$\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \qquad \min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).$$

Aufgabe 3: Folgerung aus der Dreiecksungleichung

Zeigen Sie, dass die Ungleichung

$$|x + y| + |x - y| \geq |x| + |y|$$

für alle reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 4: Betragsungleichungen

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden Betragsungleichungen.

(a) $\Big|1 - |1 - |x||\Big| \leq 1$ (b) $\left|\frac{x+4}{x-2}\right| < x$

Hausaufgabe 1: Ein weiterer Irrationalitätsbeweis

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ irrational ist.
Hinweis: Es kann hilfreich sein zu zeigen, dass n und $n + 1$ keine gemeinsamen Primfaktoren besitzen. (4 Punkte)

Hausaufgabe 2: Vierecksungleichung

Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ die sogenannte *Vierecksungleichung*

$$\big||x-a| - |y-b|\big| \leq |a-b| + |x-y|$$

gilt. Mit der Wahl $a = b = 0$ folgt daraus die *umgekehrte* Dreiecksungleichung

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|.$$

(3 Punkte)

Hausaufgabe 3: Weitere Betragsungleichungen

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden Betragsungleichungen.

(a) $|x^2-4| - |x+2|(x^2+x-6) > 0$ (b) $\dfrac{|x-2|(x+2)}{x} \leq |x|$

(7 Punkte)