BTU Cottbus-Senftenberg
Prof. Dr. G. Wachsmuth, Dr. P. Mehlitz

Cottbus, 21. Oktober 2021
Abgabe am 26. Oktober 2021

Analysis I

Übung 2: Axiomatik der reellen Zahlen

Aufgabe 1: Folgerungen aus den Körperaxiomen

Beweisen Sie die folgenden Aussagen über reelle Zahlen ausgehend von den aus der Vorlesung bekannten Axiomen und daraus abgeleiteten Folgerungen.

(a) Das neutrale Element 1 bzgl. der Multiplikation ist eindeutig bestimmt.

(b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ ist das multiplikativ Inverse x^{-1} eindeutig bestimmt.

(c) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y \neq 0$ gilt $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.

(d) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$0 \cdot x = 0, \qquad -x = (-1) \cdot x, \qquad -(-x) = x.$$

Aufgabe 2: Addition und Multiplikation von Brüchen

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b, d \neq 0$ beliebig gewählt. Zeigen Sie die folgenden Rechenregeln für Brüche durch Anwendung bekannter Aussagen über reelle Zahlen.

(a) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$ (b) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$

Aufgabe 3: Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen

Beweisen Sie die folgenden Aussagen über reelle Zahlen ausgehend von den aus der Vorlesung bekannten Axiomen und daraus abgeleiteten Folgerungen.

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ gilt $x^2 > 0$. Insbesondere gilt $1 > 0$.

(b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$ gilt $x^{-1} > y^{-1}$.

(c) Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a < b$ und $0 \leq c < d$ folgt $ac < bd$.

Hausaufgabe 1: Weitere Folgerungen aus den Körperaxiomen

Beweisen Sie die folgenden Aussagen über reelle Zahlen ausgehend von den aus der Vorlesung und Übung bekannten Körperaxiomen und daraus abgeleiteten Folgerungen.

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ gilt $(x^{-1})^{-1} = x$. (2 Punkte)

(b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$. (2 Punkte)

(c) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ sei $x - y := x + (-y)$. Dann gilt $-(x - y) = y - x$. (3 Punkte)

(d) Die reellen Zahlen sind nullteilerfrei, d.h. für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau dann $x \cdot y = 0$ wenn $x = 0$ oder $y = 0$ erfüllt ist. (3 Punkte)

Hausaufgabe 2: Weitere Rechenregeln für Brüche

Beweisen Sie die folgenden Aussagen über Brüche reeller Zahlen ausgehend von den aus der Vorlesung und Übung bekannten Körperaxiomen und daraus abgeleiteten Folgerungen für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b, c, d \neq 0$.

(a) $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ (b) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$

(3 Punkte)

Hausaufgabe 3: Eine Charakterisierung der Nichtpositivität

Es sei $a \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl und es möge $a \leq x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gelten. Zeigen Sie mittels aus Vorlesung und Übung bekannter Axiome und Aussagen, dass dann $a \leq 0$ erfüllt ist. (3 Punkte)

Hausaufgabe 4: Ein eingeschachtelter Bruch

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a, b, c, d > 0$ beliebig gewählt. Zeigen Sie die Gültigkeit der Implikation

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

mittels aus Vorlesung und Übung bekannter Axiome und Aussagen. (4 Zusatzpunkte)

Hausaufgabe 5: Ein Erweiterungskörper

Wir definieren $\mathbb{K} := \{a + \sqrt{5}b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{K}$ bzgl. der Operationen $+$ und $\cdot$ abgeschlossen ist. Verifizieren Sie anschließend, dass $\mathbb{K}$ alle Körperaxiome erfüllt. (5 Zusatzpunkte)