BTU Cottbus-Senftenberg
Prof. Dr. G. Wachsmuth, Dr. P. Mehlitz

Cottbus, 14. Oktober 2021
Abgabe am 21. Oktober 2021

Analysis I

Übung 1: Vollständige Induktion

Aufgabe 1: Summe der ersten n Quadratzahlen

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Formel gilt.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

Lösung Aufgabe 1:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1}{6} \cdot 1(1+1)(2 \cdot 1 + 1) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1,$$

also gilt die Aussage für $n = 1$.
Induktionsschnitt: Für $n \in \mathbb{N}$ gelte $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}(n+1)\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right] \\
&= \frac{1}{6}(n+1)\left[2n^2 + 7n + 6\right] \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1),
\end{aligned}$$

womit die Aussage auch für $n + 1 \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 2: Summe der Quadratzahlreziproken

Verifizieren Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die folgende Ungleichung gilt.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

Lösung Aufgabe 2:

Induktionsanfang: Für $n = 2$ gilt

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} < \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2},$$

also ist die Aussage für $n = 2$ erfüllt.
Induktionsschritt: Die Aussage gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Vorüberlegung: Es gilt

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}. \qquad (*)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} < 2 - \frac{1}{h} + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &\overset{(*)}{<} 2 - \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

und damit die Aussage für $n + 1$.

Aufgabe 3:

Beweisen Sie induktiv, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ durch 133 teilbar ist.

Lösung Aufgabe 3:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $11^{1+1} + 12^{2\cdot 1-1} = 11^2 + 12^1 = 121 + 12 = 133$, und diese Zahl ist offenbar durch 133 teilbar.
Induktionsschritt: Es sei für $n \in \mathbb{N}$ $\quad 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ durch 133 teilbar. Dann existiert also eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $11^{n+1} + 12^{2n+1} = 133m$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}11^{n+1} + 12^{2(n+1)-1} &= 11^{n+1} \cdot 11 + 12^{2n-1} \cdot 144 \\ &= 11^{n+1} \cdot 11 + \underbrace{12^{2n-1} \cdot 11 - 12^{2n-1} \cdot 11}_{=0} + 12^{2n-1} \cdot 144 \\ &= 11 \cdot \left[11^{n+1} + 12^{2n-1}\right] + 12^{2n-1}\left[144 - 11\right] \\ &= 11 \cdot 133m + 12^{2n-1} \cdot 133 \\ &= 133\big[\underbrace{11m + 12^{2n-1}}_{\in \mathbb{N}}\big],\end{aligned}$$

womit die Aussage auch für $n + 1$ gezeigt ist.

Aufgabe 4:

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Formel gilt.

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}$$

Lösung Aufgabe 4:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt

$$\prod_{k=1}^{1} \left(1 + \frac{1}{1+k}\right) = 1 + \frac{1}{1+1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{1+1}.$$

Induktionsschritt: Die Aussage gelte für $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{(n+1)+k}\right) &= \prod_{k=2}^{n+2} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2n+2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} \\
&= \left(2 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) \cdot \left(\frac{2n+3}{2n+2}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \\
&= \left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) \left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{2n+3}{n+2} = 2 - \frac{1}{n+2} \\
&= 2 - \frac{1}{(n+1)+1},
\end{aligned}$$

womit die Aussage auch für $n + 1$ gezeigt ist.

Aufgabe 5:

(a) Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen $a, b > 0$ die folgende Ungleichung gilt.

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ seien $x_1, \ldots, x_n > 0$ beliebig gewählte reelle Zahlen. Beweisen Sie die Gültigkeit der folgenden Ungleichung. Nutzen Sie Aufgabenteil (a).

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geq n^2$$

Lösung Aufgabe 5:

(a) Für alle reellen Zahlen $a, b > 0$ gilt $(a-b)^2 \geq 0$ also $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Wegen $ab > 0$ folgt das Gewünschte.

(b) Induktionsanfang: Für $n = 1$ und $x_1 > 0$ gilt $x_1 \cdot \frac{1}{x_1} = 1 = 1^2$.
Induktionsschritt: Es gelte

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geq n^2.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{x_i}\right) &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_{n+1}}\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) + x_{n+1}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_{n+1}}\sum_{i=1}^{n} x_i + 1 \\
&\geq n^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_{n+1}}{x_i} + \frac{x_i}{x_{n+1}}\right) + 1 \\
&= n^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_{n+1}^2 + x_i^2}{x_i x_{n+1}}\right) + 1 \\
&\overset{\text{(a)}}{\geq} n^2 + \sum_{i=1}^{n} 2 \quad + 1 \\
&= n^2 + 2n + 1 \\
&= (n+1)^2,
\end{aligned}$$

was die Aussage für $n + 1$ verifiziert.

Hausaufgabe 1:

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $3^{(2^n)} - 1$ für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ durch 2^{n+2} teilbar ist. (4 Punkte)

Lösung Hausaufgabe 1:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $3^{(2^1)} - 1 = 3^2 - 1 = 8 = 2^3 = 2^{1+2}$ (*1 Punkt*).
Induktionsschritt: Es möge die Aussage für $n \in \mathbb{N}$ gelten. Dann existiert $m \in \mathbb{N}$ mit

$3^{(2^n)} - 1 = m \cdot 2^{n+2}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
3^{(2^{n+1})} - 1 = 3^{(2^n)\cdot 2} - 1 &= (3^{(2^n)} - 1 + 1)^2 - 1 \\
&= (m \cdot 2^{n+2} + 1)^2 - 1 \\
&= m^2 \cdot 2^{2(n+2)} + 2m \cdot 2^{n+2} \\
&= m^2 \cdot 2^{n+3+n+1} + m \cdot 2^{n+3} \\
&= (m^2 \cdot 2^{n+1} + m) \cdot 2^{n+3} \\
&= (\underbrace{m^2 \cdot 2^{n+1} + m}_{\in \mathbb{N}}) \cdot 2^{(n+1)+2},
\end{aligned}$$

also ist $3^{(2^{n+1})} - 1$ durch $2^{(n+1)+2}$ teilbar (*3 Punkte*).

Hausaufgabe 2:

Beweisen Sie induktiv, dass folgende Formeln für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelten.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)\binom{n}{k} = 2^{n-1}(n+2)$

(8 Punkte)

Lösung Hausaufgabe 2:

(a) Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 = \sqrt{1},$$

also gilt die Behauptung in diesem Fall sogar mit Gleichheit (*1 Punkt*).
Induktionsschritt: Die Aussage möge für $n \in \mathbb{N}$ gelten. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} &\geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
= \frac{\sqrt{n(n+1)} + 1}{\sqrt{n+1}} &\geq \frac{\sqrt{n^2} + 1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1},
\end{aligned}$$

womit der Beweis nach Induktionsprinzip erbracht ist (*2 Punkte*).

(b) Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{1} (k+1)\binom{1}{k} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3 = 2^{1-1}(1+2),$$

also ist die Behauptung für diese spezielle Wahl korrekt (*1 Punkt*).
Induktionsschritt: Die Aussage gelte für $n \in \mathbb{N}$. Der Binomische Lehrsatz (Satz 1.6 der Vorlesung) liefert mit der speziellen Wahl $x = y = 1$ die Gleichung $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ (*1 Punkt*). Zusammen mit Lemma 1.5 der Vorlesung folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}(k+1)\binom{n+1}{k} &= 1 + \sum_{k=1}^{n}(k+1)\binom{n+1}{k} + (n+2) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n}(k+1)\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) + (n+2) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k-1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1} + (n+2) \\
&= 2^{n-1}(n+2) + \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\binom{n}{k} + (2^n - 1) + (n+2) \\
&= 2^{n-1}(n+2) + \left(2^{n-1}(n+2) - (n+1)\right) + (2^n - 1) + (n+2) \\
&= 2^n(n+2) + 2^n = 2^n(n+3) = 2^{(n+1)-1}((n+1)+2)
\end{aligned}$$

(*3 Punkte*), und damit die Behauptung nach Induktionsprinzip.

Hausaufgabe 3:

Zeigen Sie für beliebige $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ die Gültigkeit der Formel

$$\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} x^k = \prod_{k=0}^{n}(1 + x^{(2^k)})$$

mittels vollständiger Induktion. (4 Punkte)

Lösung Hausaufgabe 3:

Wir fixieren $x \in \mathbb{R}$.
Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{2^{1+1}-1} x^k = \sum_{k=0}^{3} x^k = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 = (1 + x^{2^0})(1 + x^{2^1}) = \prod_{k=0}^{1}(1 + x^{(2^k)}),$$

also ist die Behauptung für diese spezielle Wahl korrekt (*1 Punkt*).
Induktionsschritt: Die Aussage gelte für $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2^{(n+1)+1}-1} x^k = \sum_{k=0}^{2^{n+1}\cdot 2-1} x^k &= \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} x^k + \sum_{k=2^{n+1}}^{2\cdot 2^{n+1}-1} x^k \\
&= \prod_{k=0}^{n} (1 + x^{(2^k)}) + \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} x^{k+2^{n+1}} \\
&= \prod_{k=0}^{n} (1 + x^{(2^k)}) + \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} x^k \cdot x^{(2^{n+1})} \\
&= \prod_{k=0}^{n} (1 + x^{(2^k)}) + x^{(2^{n+1})} \cdot \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} x^k \\
&= \prod_{k=0}^{n} (1 + x^{(2^k)}) + x^{(2^{n+1})} \cdot \prod_{k=0}^{n} (1 + x^{(2^k)}) \\
&= \prod_{k=0}^{n} (1 + x^{(2^k)}) \left[1 + x^{(2^{n+1})}\right] \\
&= \prod_{k=0}^{n+1} (1 + x^{(2^k)}),
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung (*3 Punkte*).

Hausaufgabe 4: Falsche Induktion

Finden und erläutern Sie den Fehler in folgendem Induktionsbeweis.
Wir wollen beweisen, dass alle Mathematiker die gleiche Schuhgröße haben. Dazu wird zunächst die Schuhgröße eines beliebigen Mathematikers ausgemessen. Damit ist der Induktionsanfang schon abgeschlossen, denn diese Schuhgröße muss mit keiner anderen verglichen werden. Nun führen wir den Induktionsschritt durch. Dazu nehmen wir zunächst an, in einer Gruppe von $n \in \mathbb{N}$ Mathematikern hätte jeder die gleiche Schuhgröße. Nun schauen wir uns eine Gruppe von $n + 1$ Mathematikern an, die wir, weil sie so kollegial sind, in einen großen Raum sperren. Wegen $n + 1 \geq 2$ können wir zwei dieser Mathematiker, nennen wir sie Gerd und Patrick, aus der Gruppe aussondern. Zunächst geht Gerd vor die Tür. Die im Raum verbliebenen n Mathematiker haben nach Annahme die gleiche Schuhgröße. Nun kommt Gerd zurück und Patrick muss den Raum verlassen. Wieder haben die im Raum verbliebenen Mathematiker die gleiche Schuhgröße nach Annahme. Zusammenfassend haben also alle $n + 1$ Mathematiker die gleiche Schuhgröße. Nach Induktionsprinzip haben demnach alle Mathematiker die gleiche Schuhgröße. (2 Punkte)

Lösung Hausaufgabe 4:

Genau der Schritt $1 \to 2$ funktioniert nicht (*1 Punkt*).
Beim Induktionsschritt durch Aussondern kann hier nur gezeigt werden, dass für $M := \{x_1, x_2\}$ genau x_i die Eigenschaft E_i besitzt.
Wegen $(M \backslash \{x_2\}) \cap (M \backslash \{x_1\}) = \varnothing$ gibt es keine Möglichkeit, $E_1 = E_2$ zu schlussfolgern.
Für $n \to n+1$ mit $n \geq 2$ funktioniert dieses Argument wegen $(M \backslash \{x_2\}) \cap (M \backslash \{x_1\}) \neq \varnothing$ (*1 Punkt*).