BTU Cottbus-Senftenberg
Prof. Dr. G. Wachsmuth, Dr. P. Mehlitz

Cottbus, 31. Januar 2021

Analysis I

Übung 15: Topologische Eigenschaften von Teilmengen metrischer Räume

Aufgabe 1: Eine Charakterisierung von Abschließung und Innerem

Beweisen Sie Lemma 16.9 der Vorlesung:
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{int} A &= \{x \in X \mid \exists \varepsilon > 0\colon\ U_\varepsilon(x) \subset A\}, \\ \operatorname{cl} A &= \{x \in X \mid \forall \varepsilon > 0\colon\ U_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing\}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\operatorname{bdry} A = \{x \in X \mid \forall \varepsilon > 0\colon\ U_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing,\ U_\varepsilon(x) \setminus A \neq \varnothing\}.$$

Aufgabe 2: Beispiele für Inneres, Abschließung und Rand

Wir versehen $\mathbb{R}^2$ mit der Euklidischen Metrik. Skizzieren Sie die folgenden Mengen und geben Sie jeweils deren Inneres, Abschließung und Rand an.

(a) $M_a := \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$

(b) $M_b := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ xy \neq 0\}$

Aufgabe 3: Offene und abgeschlossene Mengen bzgl. der diskreten Metrik

Es sei X eine nichtleere Menge und $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ die zugehörige diskrete Metrik. Charakterisieren Sie die offenen und abgeschlossenen Kugeln im metrischen Raum (X, d). Begründen Sie damit, dass alle Teilmengen von X sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Aufgabe 4: Aussagen über topologische Operatoren

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Weiterhin seien $A, B \subset X$ beliebig gewählt. Beweisen oder widerlegen Sie die Allgemeingültigkeit der folgenden Aussagen.

(a) $\operatorname{cl} A = A \cup \operatorname{bdry} A$	(b) $\operatorname{int} A = A \setminus \operatorname{bdry} A$
(c) $\operatorname{cl}(A \cup B) = (\operatorname{cl} A) \cup (\operatorname{cl} B)$	(d) $\operatorname{cl}(A \cap B) = (\operatorname{cl} A) \cap (\operatorname{cl} B)$
(e) $\operatorname{bdry}(\operatorname{cl} A) = \operatorname{bdry} A$	(f) $\operatorname{cl}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int}(\operatorname{cl} A)$
(g) $\operatorname{cl}(\operatorname{int} A) = \operatorname{cl} A$	(h) $(\operatorname{cl} A) \setminus (\operatorname{bdry} A) = \operatorname{int} A$