BTU Cottbus-Senftenberg
Prof. Dr. G. Wachsmuth, Dr. P. Mehlitz

Cottbus, 24. Januar 2022
Abgabe am 31. Januar 2022

Analysis I

Übung 14: Metrische Räume

Aufgabe 1: Eine neue Metrik auf $\mathbb{R}$

Wir definieren $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ gemäß

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad d(x, y) := \sqrt{|x - y|}.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, d)$ ein metrischer Raum ist.

Aufgabe 2: Die diskrete Metrik

Es sei X eine nichtleere Menge. Wir definieren gemäß

$$\forall x, y \in X: \quad d(x, y) := \begin{cases} 0 & x = y, \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

die sogenannte *diskrete Metrik* $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ von X. Zeigen Sie, dass (X, d) tatsächlich ein metrischer Raum ist.

Aufgabe 3: Die Eisenbahnmetrik

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ beliebig gewählt. Wie in der Vorlesung definieren wir die Länge eines Vektors gemäß

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: \quad \|x\| := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Weiterhin setzen wir

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n: \quad d(x, y) := \begin{cases} \|x - y\| & x,\ y \text{ linear abhängig}, \\ \|x\| + \|y\| & x,\ y \text{ linear unabhängig}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^n, d)$ metrischer Raum ist. Im Fall $n = 2$ heißt d die *französische Eisenbahnmetrik*.

Aufgabe 4: Eine Schar von Metriken auf $\mathbb{R}$

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren $d_f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ gemäß

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad d_f(x, y) := |f(x) - f(y)|.$$

Welche Eigenschaften muss f besitzen, damit $(\mathbb{R}, d_f)$ metrischer Raum ist?

Aufgabe 5: Metriken auf Produktstrukturen

Es seien (X, d) und (Y, ρ) metrische Räume. Zeigen Sie jeweils, dass die folgend definierten Abbildungen $\eta\colon (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}^+$ Metriken auf $X \times Y$ sind.

(a) Für Konstanten $\alpha, \beta > 0$ setzen wir

$$\forall (x, y), (x', y') \in X \times Y: \quad \eta((x, y), (x', y')) := \alpha\, d(x, x') + \beta\, \rho(y, y').$$

(b) Wir setzen

$$\forall (x, y), (x', y') \in X \times Y: \quad \eta((x, y), (x', y')) := \max(d(x, x'), \rho(y, y')).$$

Durch rekursive Anwendung dieser Konstruktionen auf den metrischen Raum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ erkennen wir, dass gemäß

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n: \quad \ell_1(u, v) := \sum_{j=1}^{n} |u_j - v_j| \qquad \ell_\infty(u, v) := \max_{j=1,\ldots,n} |u_j - v_j|$$

Metriken auf $\mathbb{R}^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gegeben sind.

Hausaufgabe 1: Metriken auf $\mathbb{R}^n$?

Untersuchen Sie die folgend gegebenen Abbildungen $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ (ggf. in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$) auf die Eigenschaft hin, Metrik auf $\mathbb{R}^n$ zu sein.

(a) Wir setzen

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n: \quad d_a(x, y) := \min_{j=1,\ldots,n} |x_j - y_j|.$$

(b) Wir setzen

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n: \quad d_b(x, y) := \operatorname{card}(\{j \in \{1, \ldots, n\} \mid x_j \neq y_j\}).$$

(c) Wir setzen

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n: \quad d_c(x, y) := \sum_{j=1}^{n} |\arctan(x_j) - \arctan(y_j)|.$$

(7 Punkte)

Hausaufgabe 2: Modifikationen von Metriken

Es sei X eine nichtleere Menge und (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Wir definieren $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ gemäß

$$\forall x, y \in X: \quad \rho(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Zeigen Sie, dass auch (X, ρ) ein metrischer Raum ist.

(b) Es sei $\eta\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ gemäß

$$\forall x, y \in X: \quad \eta(x, y) := [d(x, y)]^2$$

gegeben. Zeigen Sie jeweils anhand eines Beispiels, dass (X, η) ein metrischer Raum sein *kann* aber nicht sein *muss*.

(6 Punkte)

Hausaufgabe 3: Eine Kompositionsmetrik

Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

(i) $f(0) = 0$,

(ii) $\forall s > 0\colon\ f(s) > 0$,

(iii) f ist monoton wachsend,

(iv) $\forall s, t \in \mathbb{R}^+\colon\ f(s + t) \leq f(s) + f(t)$.

Zeigen Sie, dass dann auch $(X, f \circ d)$ ein metrischer Raum ist. (5 Punkte)

Hausaufgabe 4: Eine Metrik auf den reellen Zahlenfolgen

Es sei X die Menge aller reellen Zahlenfolgen. Wir definieren

$$\forall (x_n), (y_n) \in X: \quad d((x_n), (y_n)) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\arctan(x_n) - \arctan(y_n)|.$$

(a) Zeigen Sie, dass $d((x_n), (y_n))$ für alle $(x_n), (y_n) \in X$ endlich ist. Damit kann d als Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ aufgefasst werden.

(b) Beweisen Sie, dass (X, d) ein metrischer Raum ist.

(c) Es seien Folgen $(\bar{x}_n), (\bar{y}_n) \in X$ gemäß

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \bar{x}_n := (-1)^n \qquad \bar{y}_n := \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^n\right)$$

gegeben. Berechnen Sie den Abstand von $(\bar{x}_n)$ und $(\bar{y}_n)$ in (X, d),

(6 Punkte)