BTU Cottbus-Senftenberg
Prof. Dr. G. Wachsmuth, Dr. P. Mehlitz

Cottbus, 17. Januar 2022
Abgabe am 24. Januar 2022

Analysis I

Übung 13: Elementare Funktionen

Aufgabe 1: Werte der Sinus- und Kosinusfunktion

(a) Zeigen Sie rechnerisch $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.

(b) Zeigen Sie rechnerisch $\sin(\pi/6) = 1/2$ und $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$.

Aufgabe 2: Grenzwerte via Potenzreihen

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte durch die Verwendung von Potenzreihen und deren Stetigkeit im Inneren des Konvergenzbereiches.

(a) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}$$

(b) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x^3 \sin x}{(1-\cos x)^2}$$

Aufgabe 3: Die komplexe Sinus- und Kosinusfunktion

Motiviert durch die Reihenentwicklung der Sinus- und Kosinusfunktion im Reellen setzen wir

$$\forall z \in \mathbb{C}\colon \quad S(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad C(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

Diese Reihen sind auf $\mathbb{C}$ absolut konvergent. Wir nennen die Abbildungen $S, C\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die komplexe Sinus- und Kosinusfunktion. Offenbar gilt $S(x) = \sin x$ und $C(x) = \cos x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Darstellungen von S und C über die komplexe Exponentialfunktion:

$$\forall z \in \mathbb{C}\colon \quad S(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \qquad C(z) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right).$$

(b) Verifizieren Sie die Gültigkeit der folgenden Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \forall z, w \in \mathbb{C}\colon \quad & S(z+w) = S(z)C(w) + S(w)C(z) \\ & C(z+w) = C(z)C(w) - S(z)S(w). \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Die Hyperbelfunktionen

Die *hyperbolischen* Funktionen $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind gemäß

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon \quad \sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad \cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

gegeben.

(a) Leiten Sie Potenzreihendarstellungen von sinh und cosh her.

(b) Beweisen Sie die Gültigkeit der folgenden Identitäten:

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon \quad \sinh(x) = (-i)S(ix) \qquad \cosh(x) = C(ix).$$

Hierbei bezeichnen $S, C\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die komplexe Sinus- bzw. Kosinusfunktion.

(c) Schlussfolgern Sie die Gültigkeit der folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}\colon \quad S(x+iy) &= \sin(x)\,\cosh(y) + i\cos(x)\,\sinh(y) \\ C(x+iy) &= \cos(x)\,\cosh(y) - i\sin(x)\,\sinh(y). \end{aligned}$$

Hausaufgabe 1: Eine Fehlerabschätzung für die Exponentialfunktion

Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt. Zeigen Sie, dass dann für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1 + \frac{1}{2}n$ die folgende Abschätzung gilt:

$$\left| e^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leq 2\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(2 Punkte)

Hausaufgabe 2: Weitere Werte der Sinus- und Kosinusfunktion

(a) Zeigen Sie rechnerisch $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ und $\cos(\pi/3) = 1/2$.

(b) Zeigen Sie rechnerisch $\sin(\pi/12) = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$ und $\cos(\pi/12) = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$.

(4 Punkte)

Hausaufgabe 3: Rechengesetze für hyperbolische Funktionen

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Identitäten für die Hyperbelfunktionen.

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}\colon \quad & \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \\ & \sinh(x+y) = \sinh(x)\,\cosh(y) + \cosh(x)\,\sinh(y) \\ & \cosh(x+y) = \cosh(x)\,\cosh(y) + \sinh(x)\,\sinh(y) \end{aligned}$$

(3 Punkte)

Hausaufgabe 4: Weitere Grenzwerte via Potenzreihen

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte durch die Verwendung von Potenzreihen und deren Stetigkeit im Inneren des Konvergenzbereiches.

(a) $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{x\,\sinh(x) - x^2}{(\cosh(x) - 1)^2}$$

(b) $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sqrt{\cos(2021x)} - \sqrt{\cos(2022x)}}{x^2}$$

(c) $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{(1 + nx)^m - (1 + mx)^n}{\sin(nx)\,\sin(mx)} \qquad n, m \in \mathbb{N},\ n, m \geq 2$$

(12 Punkte)