BTU Cottbus-Senftenberg
Prof. Dr. G. Wachsmuth, Dr. P. Mehlitz

Cottbus, 10. Januar 2022
Abgabe am 17. Januar 2022

Analysis I

Übung 12: Stetigkeit reeller Funktionen

Aufgabe 1: Arten von Unstetigkeiten

Prüfen Sie jeweils, ob die folgend gegebenen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 := 0$ stetig sind. Klassifizieren Sie ggf. die Art der vorliegenden Unstetigkeit.

(a) $f(x) := \begin{cases} e^{1/x} & x > 0 \\ 2x - x^2 & x \leq 0 \end{cases}$

(b) $f(x) := \begin{cases} 2x - x^2 & x \geq 0 \\ e^{1/x} & x < 0 \end{cases}$

(c) $f(x) := \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

(d) $f(x) := \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

(e) $f(x) := \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} & x > 0 \\ 2x - x^2 & x \leq 0 \end{cases}$

Aufgabe 2: Das Infimum koerziver Funktionen

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig. Ferner sei f *koerziv*, d.h. es möge

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

gelten. Zeigen Sie, dass dann ein $x^* \in \mathbb{R}$ mit $f(x^*) = \inf\{f(x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ existiert.

Aufgabe 3: Lösbarkeit einer nichtlinearen Gleichung

Beweisen Sie, dass die Gleichung $\ln x = -\ln(\ln x)$ im Intervall $(1, \infty)$ genau eine Lösung besitzt.

Aufgabe 4: Eine Fixpunktiteration

Es sei $f\colon [a, b] \to [a, b]$ stetig und monoton wachsend. Ferner sei $x_1 \in [a, b]$ beliebig gewählt. Zeigen Sie, dass die gemäß

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \quad x_{n+1} := f(x_n)$$

definierte Folge (x_n) gegen einen Fixpunkt von f konvergiert.

Aufgabe 5: Eine besondere Zwischenstelle

Es sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte $f(0) = f(1)$. Beweisen Sie, dass dann ein $c \in [0, \frac{1}{2}]$ existiert, sodass $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$ gilt.

Hausaufgabe 1: Eine unschöne Funktion

Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ setzen wir $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} \,|\, k \leq x\}$. Wir betrachten die gemäß

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon \quad f(x) := \begin{cases} \lfloor x \rfloor \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Skizzieren Sie die Funktion f. Bestimmen und klassifizieren Sie alle Unstetigkeitsstellen von f. (6 Punkte)

Hausaufgabe 2: Ein Nullstellenproblem

Wir betrachten die gemäß

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon \quad f(x) := \tan\left(\frac{x}{1+|x|}\right) - \frac{1}{2}$$

definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f genau eine Nullstelle besitzt. (6 Punkte)

Hausaufgabe 3: Das arithmetische Mittel von Funktionswerten

Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $n \in \mathbb{N}$ fixiert. Weiterhin seien $x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ beliebig gewählt. Zeigen Sie, dass es ein $x^* \in [a,b]$ gibt, das

$$f(x^*) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

erfüllt. (3 Punkte)

Hausaufgabe 4: Ein Kontraktionsprinzip

Es sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L \in [0,1)$, d.h. es gelte

$$\forall x, y \in [a,b]\colon \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|.$$

Ferner sei $x_1 \in [a,b]$ beliebig gewählt. Zeigen Sie, dass die gemäß

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \quad x_{n+1} := f(x_n)$$

definierte Folge (x_n) gegen einen Fixpunkt x^* von f konvergiert. Beweisen Sie außerdem, dass x^* der eindeutig bestimmte Fixpunkt von f ist.
Hinweis: Wenden Sie Folgerung 7.13 der Vorlesung an. (3 Punkte)