BTU Cottbus-Senftenberg
Prof. Dr. G. Wachsmuth, Dr. P. Mehlitz

Cottbus, 3. Januar 2022
Abgabe am 10. Januar 2022

Analysis I

Übung 11: Stetigkeitsbegriffe

Aufgabe 1: Stetigkeit der Wurzelfunktion höherer Ordnung

Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ fixiert.

(a) Zeigen Sie die Gültigkeit der Ungleichung

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\colon \quad \left|\sqrt[n]{|x|} - \sqrt[n]{|y|}\right| \leq \sqrt[n]{|x-y|}.$$

(b) Verifizieren Sie mittels Definition, dass die gemäß

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon \quad f(x) := \sqrt[n]{|x|}$$

definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist. Ist f auch Lipschitz-stetig?

Aufgabe 2: Eine Charakterisierung von Stetigkeit

Es sei $D \subset \mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ offen und $f\colon D \to \mathbb{K}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn für jede offene Menge $O \subset \mathbb{K}$ die Urbildmenge $f^{-1}(O) := \{z \in D \,|\, f(z) \in O\}$ offen ist.

Aufgabe 3: Das Produkt stetiger und beschränkter Funktionen

(a) Es seien $f, g\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ gegebene Funktionen. Es sei weiter $z_0 \in \mathbb{K}$ so gewählt, dass $f(z_0) = 0$ gilt. Ferner sei f in z_0 stetig. Zuletzt sei g beschränkt. Zeigen Sie, dass dann die Produktfunktion $f \cdot g$ in z_0 ebenfalls stetig ist.

(b) Es sei $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die gemäß

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon \quad h(x) := \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

definierte Funktion. Zeigen Sie, dass h genau in $x_0 := 0$ stetig ist.

Aufgabe 4: Gleichmäßige Stetigkeit von Funktionen

Gegeben seien Funktionen $f, g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gemäß

$$\forall x \in (0,\infty)\colon \quad f(x) := \frac{1}{1+x^2}, \qquad g(x) := \ln x.$$

Prüfen Sie diese Funktionen auf die Eigenschaft hin, gleichmäßig stetig zu sein.

Aufgabe 5: Gleichmäßige Stetigkeit periodischer Funktionen

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Weiterhin möge eine reelle Zahl $p > 0$ existieren, sodass $f(x+p) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Beweisen Sie, dass dann f gleichmäßig stetig ist.

Hausaufgabe 1: Ein elementarer Stetigkeitsnachweis

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$\forall z \in \mathbb{C}\colon \quad f(z) := \frac{z}{1+|z|^2}.$$

(a) Zeigen Sie anhand der Definition, dass f in $z_0 := i$ stetig ist.

(b) Beweisen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist.

(4 Punkte)

Hausaufgabe 2: Eine parameterabhängige Stetigkeitsbetrachtung

Untersuchen Sie, für welche Werte des reellen Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ die gemäß

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon \quad f_\alpha(x) := \begin{cases} |x|^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

definierte Funktion $f_\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 := 0$ stetig ist. (4 Punkte)

Hausaufgabe 3: Einige Aussagen über stetige Funktionen

Beweisen oder wiederlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Es existiert eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in genau abzählbar vielen Punkten unstetig ist.

(b) Es existiert eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in genau abzählbar vielen Punkten stetig ist.

(c) Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $A \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, so ist $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$ abgeschlossen.

(d) Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $O \subset \mathbb{R}$ offen, so ist $f(O) := \{f(x) \mid x \in O\}$ offen.

(6 Punkte)

Hausaufgabe 4: Nachweis gleichmäßiger Stetigkeit

Gegeben seien Funktionen $f, g\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ gemäß

$$\forall x \in (0,1)\colon \quad f(x) := e^{1/x}, \qquad g(x) := e^{-1/x}.$$

Prüfen Sie diese Funktionen auf die Eigenschaft hin, gleichmäßig stetig zu sein. (5 Punkte)

Hausaufgabe 5: Gleichmäßig stetige Funktionen auf beschränkten Mengen

Es seien $D \subset \mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und eine gleichmäßig stetige Funktion $f\colon D \to \mathbb{K}$ gegeben. Weiterhin sei die Menge $B \subset D$ beschränkt.

(a) Beweisen Sie, dass die Menge $f(B) := \{f(z) \mid z \in B\}$ beschränkt ist.

(b) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass für die Gültigkeit der Aussage aus (a) die *gleichmäßige* Stetigkeit von f wesentlich ist, d.h. geben Sie eine stetige Funktion f und eine beschränkte Menge B so an, dass $f(B)$ unbeschränkt ist.

(3 Punkte)

Hausaufgabe 6: Ein Konstanzkriterium für stetige Funktionen

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und erfülle $f(x^2) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass f konstant ist. Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Stetigkeit von f wesentlich für die Gültigkeit dieser Aussage ist. (4 Zusatzpunkte)