BTU Cottbus-Senftenberg
Prof. Dr. G. Wachsmuth, Dr. P. Mehlitz

Cottbus, 13. Dezember 2021
Abgabe am 3. Januar 2022

Analysis I

Übung 10: Rechnen mit Zahlenreihen

Aufgabe 1: Cauchy-Produkt der Exponentialreihe

Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ die folgende Formel gilt.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}\right)$$

Aufgabe 2: Eine konvergente Teilreihe der harmonischen Reihe

Es sei $M := \{2^a 5^b \,|\, a, b \in \mathbb{N}_0\}$ die Menge aller natürlichen Zahlen, die ausschließlich die Primteiler 2 und 5 besitzen. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n \in M} \frac{1}{n}$ konvergent ist und bestimmen Sie deren Wert.
Hinweis: Betrachten Sie das Cauchy-Produkt der geometrischen Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} 5^{-n}$.

Aufgabe 3: Grenzwerte über Zahlenreihen

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt[m]{n}}$ (b) $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + m^2}$

Aufgabe 4: Lemma von Fatou

Es sei $(a_{n,m})$ eine reelle, beschränkte Doppelfolge mit nichtnegativen Gliedern. Beweisen Sie die Gültigkeit der Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \liminf_{m\to\infty} a_{n,m} \le \liminf_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}.$$

Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die obige Ungleichung echt erfüllt sein kann.

Aufgabe 5: Konvergenzradien

(a) Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der folgend gegebenen komplexen Potenzreihen.

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{z}{i}\right)^n \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2+i^n}$$

(b) Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der folgend gegebenen reellen Potenzreihen. Untersuchen Sie außerdem das Konvergenzverhalten an den Rändern des Konvergenzbereiches.

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n(n-1)}} \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}(x-1)^n$$

Hausaufgabe 1: Das Cauchy-Produkt zweier divergenter Reihen

Wir definieren reelle Zahlenfolgen (a_n) und (b_n) gemäß

$$\forall n \in \mathbb{N}_0\colon \quad a_n := \begin{cases} 3 & n = 0 \\ 3^n & n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad b_n := \begin{cases} -2 & n = 0 \\ 2^n & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Die Zahlenreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sind dann offenbar bestimmt divergent. Wir setzen nun

$$\forall n \in \mathbb{N}_0\colon \quad c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent ist und bestimmen Sie deren Wert.

(3 Punkte)

Hausaufgabe 2: Ein verstecktes Cauchy-Produkt

Es sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ beliebig gewählt. Begründen Sie zunächst, warum die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n$$

absolut konvergent ist und bestimmen Sie anschließend deren Wert.
Hinweis: Wenden Sie die Cauchy-Produkt-Formel auf die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ an.

(3 Punkte)

Hausaufgabe 3: Eine unschöne Doppelfolge

Wir betrachten die gemäß

$$\forall n, m \in \mathbb{N}\colon \quad a_{n,m} := \frac{m}{(n+m)(n+m+1)}$$

definierte Doppelfolge $(a_{n,m})$. Berechnen Sie zunächst

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{m\to\infty} a_{n,m}.$$

Prüfen Sie anschließend nach, dass Ihr Ergebnis nicht im Widerspruch zur Aussage des Satzes 9.18 (von Tannery) steht, indem Sie zeigen, dass $(a_{n,m})$ die Voraussetzungen dieses Satzes nicht erfüllt. (6 Punkte)

Hausaufgabe 4: Weitere Konvergenzradien

(a) Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der folgend gegebenen komplexen Potenzreihen.

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+in)^n}{n!} z^n \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-i^n)^n}{2^{n+1}n} z^n$$

(b) Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der folgend gegebenen reellen Potenzreihen. Untersuchen Sie außerdem das Konvergenzverhalten an den Rändern des Konvergenzbereiches.

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\sqrt{n}} x^n \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n} x^n$$

(10 Punkte)