BTU Cottbus-Senftenberg
Prof. Dr. G. Wachsmuth, Dr. P. Mehlitz

Cottbus, 17. Januar 2022
Abgabe am 4. Februar 2022

Analysis I

Prüfungsvorbereitung 2

Hausaufgabe 1: Grenzwerte reeller Zahlenfolgen

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n^2+n}-n}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n-2^n}$

(8 Punkte)

Hausaufgabe 2: Topologische Grundbegriffe

(a) Skizzieren Sie die Menge

$$M := \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}\colon\ z^n = 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2\}$$

in der komplexen Ebene. Ist M offen bzw. abgeschlossen? Geben Sie den Abschluss und das Innere der Menge M an.

(b) Bestimmen Sie alle Teilmengen von $\mathbb{C}$, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(8 Punkte)

Hausaufgabe 3: Konvergenz reeller Zahlenreihen

Untersuchen Sie die folgend gegebenen Zahlenreihen auf Konvergenz.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n^2}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{4n}{3n}^{-1}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[4n]{n^{1-3n}}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2^n}$

(8 Punkte)

Hausaufgabe 4: Konvergenzradien

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der reellen Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{(2n)^{n+1}} x^n.$$

Untersuchen Sie anschließend das Konvergenzverhalten dieser Reihe an den Rändern des Konvergenzbereiches.

(b) Es sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$ beliebig gewählt. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von m den Konvergenzradius der komplexen Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{mn}{n} \left(\frac{iz}{m-1}\right)^n.$$

(8 Punkte)

Hausaufgabe 5: Elementare Aufgaben zur Stetigkeit

(a) Bestimmen Sie den Wert des reellen Parameters $a \in \mathbb{R}$ so, dass die gemäß

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f_a(x) := \begin{cases} \frac{x - \sin x}{\sinh^3 x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

definierte Funktion $f_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 := 0$ stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass die gemäß

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f(x) := \sqrt{x^2 + 1}$$

definierte Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist.

(c) Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ setzen wir $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$. Gegeben sei eine Funktion $f \colon [-2, 1] \to \mathbb{R}$ gemäß

$$\forall x \in [-2, 1]: \quad f(x) := \lfloor x \rfloor + \left\lfloor -\frac{1}{2} x \right\rfloor.$$

Geben Sie Lage und Art der Unstetigkeitsstellen von f an.

(8 Punkte)