BTU Cottbus-Senftenberg
Prof. Dr. G. Wachsmuth, Dr. P. Mehlitz

Cottbus, 6. Dezember 2021
Abgabe am 17. Dezember 2021

Analysis I

Übung 1: Prüfungsvorbereitung 1

Hausaufgabe 1: Induktionsbeweise

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x-y)\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} = x^{n+1} - y^{n+1}.$$

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_n > -1$, die alle das gleiche Vorzeichen haben, gilt

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

(11 Punkte)

Hausaufgabe 2: Irrationalität einer Summe von Logarithmen

Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ die Summe

$$\sum_{k=3}^{n} \operatorname{ld} k$$

eine irrationale reelle Zahl ist.
Hinweis: Für eine reelle Zahl $r > 0$ definieren wir $a := \operatorname{ld} r$ gemäß $2^a = r$. (3 Punkte)

Hausaufgabe 3: Betragsungleichungen

Bestimmen Sie jeweils alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, welche die folgenden Betragsungleichungen lösen.

(a) $|x+1| + |x+2| + |x+3| \leq 4$

(b) $\dfrac{|x|}{1-|x|} > \dfrac{1}{|1-x|}$

(6 Punkte)

Hausaufgabe 4: Suprema und Infima von Mengen

Bestimmen Sie jeweils (falls existent) Supremum, Infimum, Maximum und Minimum der folgend gegebenen Teilmengen der reellen Zahlen.

(a) $M_{\mathrm{a}} := \{n^{-m} \in \mathbb{R} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

(b) $M_{\mathrm{b}} := \left\{ (-1)^n \frac{n}{n+1} \in \mathbb{R} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$

(6 Punkte)

Hausaufgabe 5: Elementare Aufgaben zu komplexen Zahlen

(a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument der folgend gegebenen komplexen Zahl.

$$\frac{(5+i)(2-3i)+2i}{(2+3i)^2-4+i}$$

(b) Skizzieren Sie die Menge

$$M := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Re}(\overline{z}^2) + |\overline{z} - i|^2 \leq (\mathrm{Re}\, z)^2 \right\}$$

in der komplexen Ebene.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$\frac{(z-i)^2}{i} = \frac{i}{(z+i)^2}.$$

(10 Punkte)

Hausaufgabe 6: Mengen von Abbildungen

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$. Weiterhin sei M die Menge aller Abbildungen von $\{1, \dots, n\}$ nach $\mathbb{N}$. Außerdem sei N die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\{1, \dots, n\}$. Untersuchen Sie M und N auf die Eigenschaft hin abzählbar zu sein.
Hinweis: Sie können Aussagen aus Vorlesung und Übung für die Argumentation nutzen.

(4 Punkte)