

Vereinfachte Fließzonentheorie mit ANSYS

Hartwig Hübel¹

Fachhochschule Lausitz, Cottbus

Zusammenfassung:

Die Vereinfachte Fließzonentheorie beruht auf der Zarka-Methode und gestattet die näherungsweise Ermittlung der elastisch-plastischen Verzerrungen, Spannungen und Verformungen bei monotoner oder zyklischer Belastung. Bei zyklischer Belastung wird sofort der Einspielzustand berechnet, ohne das Belastungshistogramm Zyklus für Zyklus inkrementell durchrechnen zu müssen. Als Berechnungsaufwand fallen lediglich einige modifizierte linear elastische Analysen sowie „lokale“ Berechnungen an, so daß gegenüber den herkömmlichen inkrementellen Berechnungen nach der exakten Fließzonentheorie ein erheblicher Gewinn an Rechenzeit möglich ist. Bei einigen Beispielrechnungen wurde nur etwa $\frac{1}{10.000}$ der Rechenzeit benötigt, um sowohl die Dehnungsschwingbreite (zur Ermittlung der Ermüdungsausnutzung) als auch die akkumulierten Verzerrungen (für einen Ratcheting-Nachweis) in guter Näherung abschätzen zu können. Die Vereinfachte Fließzonentheorie wurde mittels einer user-subroutine und einigen Makros in ANSYS implementiert. Es werden die Grundlagen der Vereinfachten Fließzonentheorie dargestellt, ihre Implementierung in ANSYS und einige Beispielrechnungen.

Stichworte:

Plastizieren, Dehnungsschwingbreite, Ermüdung, akkumulierte Dehnungen, fortschreitende Deformationen, Ratcheting, Einspielen, Vereinfachte Methode, zyklische Belastung, Zarka-Methode, Subroutine

¹ Der Autor dankt dem Ministerium für Umwelt, Naturschutz und Reaktorsicherheit für seine Unterstützung. Sein Dank gilt ferner Frau Dipl.-Ing. (FH) M.Stange sowie den Herren Dipl.-Ing. (FH) J.Fella, M.Glede, T.Hoffmann, H.Huhn, R.Laqua, J.Olbrich für verschiedene Anwendungen der Vereinfachten Fließzonentheorie, woraus sich fruchtbare Diskussionen ergeben haben.

1. Einleitung

Statische Analysen sind bei materieller Nichtlinearität in der Regel sehr berechnungsaufwendig. Bei Anwendung der Finite Elemente Methode muß ein vorgegebenes Belastungshistogramm inkrementell abgearbeitet werden. In jedem Berechnungsinkrement sind die Feldgleichungen simultan mit dem Werkstoffgesetz zu integrieren. Wegen der erforderlichen Linearisierung des Problems ist eine Lösung nur iterativ möglich. Bei jeder Iteration wird das Gleichungssystem neu aufgebaut und gelöst, weshalb der Berechnungsaufwand für jede Iteration etwa dem einer linear elastischen Analyse entspricht. Ist die Belastung veränderlich, so daß es zu einer Abfolge von Be- und Entlastungen oder auch einer Belastungsumkehr kommt, so müssen für einen Lebensdauernachweis u.U. Tausende von Belastungszyklen durchgerechnet werden, bis ein Einspielzustand erreicht ist. Der erforderliche Berechnungsaufwand kann dabei dem 10.000-fachen einer linear elastischen Analyse entsprechen.

Die physikalische Lebensdauer zyklisch belasteter Tragwerke wird bestimmt durch (Abb. 1)

- die Ermüdungsschädigung infolge der Schwingbreite der elastisch-plastischen Dehnungen zwischen zwei extremalen Belastungszuständen
- die Erschöpfung der Werkstoffduktilität durch einsinnige, von Zyklus zu Zyklus fortschreitende, Akkumulation elastisch-plastischer Dehnungen (Ratcheting).

Hinzu kommt evt. noch eine Begrenzung der funktionalen Lebensdauer eines Tragwerks, wenn durch ständige Zunahme der Verformungen infolge eines Ratcheting-Mechanismus etwa Dichtheitsanforderungen nicht mehr erfüllt werden können.

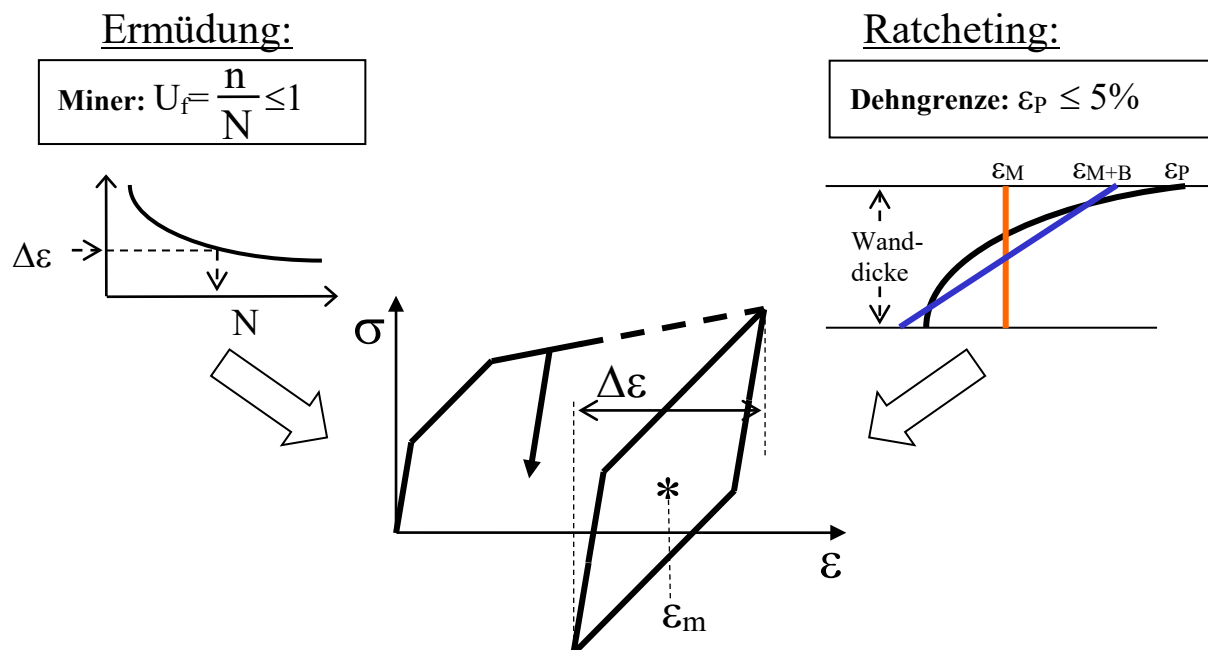


Abb. 1: Dehnschwingbreite $\Delta \epsilon$ und akkumulierte Dehnung ϵ_m im plastischen Einspielzustand

Die Vereinfachte Fließzonentheorie (VFZT) bietet nun die Möglichkeit, die elastisch-plastischen Dehnungen, Spannungen und Verformungen bei monotoner Belastung und die elastisch-plastische Dehnschwingbreite $\Delta \epsilon$ sowie die akkumulierten elastisch-plastischen Dehnungen ϵ_m und Verformungen infolge zyklischer Belastung im Einspielzustand abzuschätzen, ohne eine Vielzahl von Belastungszyklen inkrementell durchrechnen zu müssen. Statt dessen genügen wenige linear elastische Analysen, bei denen die elastischen Materialdaten und die Belastung in einer bestimmten Weise modifiziert werden.

2. Theorie der Vereinfachten Fließzonentheorie

2.1 Werkstoffmodell

Das für eine Anwendung der VFZT herangezogene Werkstoffmodell muß eine Reihe bestimmter Bedingungen erfüllen, die hier nicht im einzelnen diskutiert werden sollen (siehe z.B. [1], [2]). Es soll die Feststellung genügen, daß das in der Berechnungspraxis weit verbreitete Modell multilinearer kinematischer Verfestigung (siehe Abb. 1) mit einer Mises-Fließfläche die Anforderungen erfüllt. Als Sonderfall ist darin auch lineare

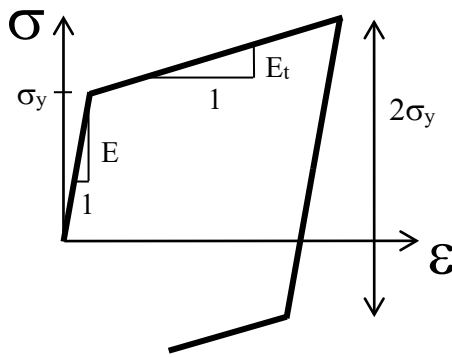


Abb. 2: Lineare kinematische Verfestigung

kinematische Verfestigung enthalten (Abb. 2), worauf sich die folgenden Darstellungen stützen. Die Formulierung der VFZT bei multilinearer Verfestigung und speziell trilinearem Spannungs-Dehnungs-Verhalten wird in [3, Kapitel 8 und 11] theoretisch und an einem Beispiel behandelt. Aus numerischen Gründen darf bei der VFZT die Steigung des letzten Astes im Spannungs-Dehnungs-Diagramm nicht verschwinden. Linear elastisch - ideal plastisches Werkstoffverhalten kann also nicht zugrunde gelegt werden.

Bedingt durch die unbegrenzte kinematische Verfestigung kommt es bei zyklischer Belastung entweder zum elastischen oder zum plastischen Einspielen, das mit finitem Ratcheting verbunden sein kann, womit gemeint ist, daß bis zum Erreichen des Einspielzustandes elastisch-plastische Dehnungen über die Zyklen akkumuliert werden [4].

2.2 Grundgedanke der VFZT

Die VFZT beruht auf der Zarka-Methode (siehe z.B. [1] sowie [3] und [5] und die dort angegebene Literatur). Ihr Grundgedanke ist, das nach der „exakten“ Fließzonentheorie formulierte elastisch-plastische Problem als linear elastisches Problem umzuformulieren. Im folgenden werden aus Gründen der übersichtlicheren Darstellung nur Hauptspannungszustände betrachtet (Richtungen $i=1, 2, 3$).

Die Mises-Fließfläche ist im deviatorischen Spannungsraum (σ_i') ein Kreis mit Radius σ_y . Bei linearer kinematischer Verfestigung ist sein Mittelpunkt um die sog. interne Variable ξ_i verschoben:

$$\sigma_i' = \sigma_i - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

$$\sigma_y = \left\| \sigma_i' - \xi_i \right\| = \sqrt{\frac{3}{2} \left[(\sigma_1' - \xi_1)^2 + (\sigma_2' - \xi_2)^2 + (\sigma_3' - \xi_3)^2 \right]} \quad (2)$$

$$\xi_i = \frac{2}{3} \frac{E \cdot E_t}{E - E_t} \varepsilon_i^{pl} \quad (3)$$

Während des Plastizierens liegen die deviatorischen Spannungen auf dem Kreisrand. Spannungszustände außerhalb des Mises-Kreises sind nicht zulässig (Abb. 3).

Der tatsächliche Spannungszustand $\sigma_{i(t)}$ zu einem bestimmten Belastungszeitpunkt t bzw. sein Deviator $\sigma_{i(t)}'$ ergibt sich aus einer Berechnung der tatsächlichen Konfiguration von Bauteilgeometrie und Belastung nach der exakten Fließzonentheorie. Er kann bei elastisch-plastischem Verhalten an jeder Stelle des Tragwerks (unabhängig davon, ob an dieser Stelle selbst plastische Dehnungen auftreten, oder ob bloß Rückwirkungen durch Plastizieren anderer Stellen, also infolge Spannungsumlagerungen, stattfinden) zerlegt werden in einen fiktiv elastischen ($\sigma_i^{f,el}$) und einen Restspannungszustand (ρ_i) bzw. deren Deviatoren:

$$\sigma_i' = \sigma_i^{f,el} + \rho_i \quad (4)$$

Der fiktiv elastische Zustand ergibt sich aus einer Berechnung der tatsächlichen Konfiguration von Bauteilgeometrie und Belastung nach der Elastizitätstheorie und kann damit praktisch immer als bekannt angesehen werden. Nun wird eine Größe Y_i eingeführt, die als „transformierte interne Variable“ (TIV) bezeichnet wird:

$$Y_i = \xi_i - \rho_i \quad (5)$$

Mit Gl.en (2) bis (5) kann die Fließfläche nun durch die TIV ausgedrückt werden:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{3}{2} \left[\left(\sigma_1^{f,el} - Y_1 \right)^2 + \left(\sigma_2^{f,el} - Y_2 \right)^2 + \left(\sigma_3^{f,el} - Y_3 \right)^2 \right]} \quad (6)$$

Sie stellt im Raum der TIV einen Kreis mit Radius σ_y dar, dessen Mittelpunkt in $\sigma_i^{f,el}$ liegt. Während des Plastizierens liegen die Y-Werte auf dem Kreisrand. Y-Werte außerhalb des Mises-Kreises sind nicht zulässig (Abb. 3). Während eines plastischen Prozesses bewegt sich die Mises-Fließfläche im Y-Raum in von vornherein bekannter Weise, da die fiktiv elastische Lösung stets als bekannt angesehen werden kann.

Die elastisch-plastischen Dehnungen lassen sich ausdrücken durch

$$\varepsilon_i^{el-pl} = E_{ij}^{-1} \sigma_j^{el-pl} + \varepsilon_i^{pl}$$

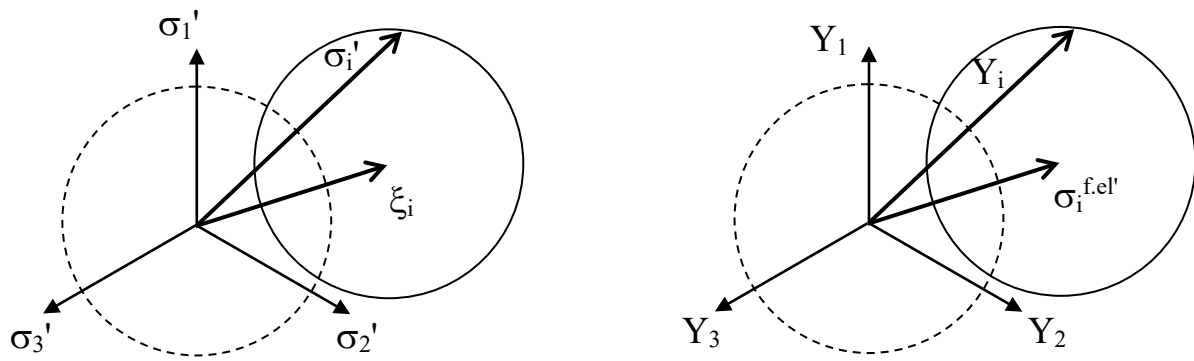


Abb. 3: Mises-Fließfläche im deviatorischen Spannungsraum und im Raum der TIV

und die für dieselbe Problemstellung nach der Elastizitätstheorie, also fiktiv elastisch, berechneten Dehnungen durch

$$\varepsilon_i^{f.el} = E_{ij}^{-1} \sigma_j^{f.el}$$

Ihre Differenz beträgt

$$\varepsilon_i^* = \varepsilon_i^{el-pl} - \varepsilon_i^{f.el} = E_{ij}^{-1} (\sigma_j^{el-pl} - \sigma_j^{f.el}) + \varepsilon_i^{pl}$$

bzw. mit Gl.(3) bis (5) für Bereiche V_p mit und V_e ohne plastische Dehnungen

$$\varepsilon_i^* = \begin{cases} (E_{ij}^*)^{-1} \rho_j + \varepsilon_{i0} & \text{in } V_p \\ (E_{ij})^{-1} \rho_j & \text{in } V_e \end{cases} \quad (7)$$

wobei

$$\varepsilon_i^* = \varepsilon_i^{el-pl} - \varepsilon_i^{f.el} \quad (8)$$

$$E_{ij}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix} ; \quad (E_{ij}^*)^{-1} = \frac{1}{E_t} \begin{pmatrix} 1 & -\nu^* & -\nu^* \\ -\nu^* & 1 & -\nu^* \\ -\nu^* & -\nu^* & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\nu^* = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \nu\right) \frac{E_t}{E} \quad (10)$$

$$\varepsilon_{i0} = \frac{3}{2} \frac{E - E_t}{E \cdot E_t} Y_i \quad (11)$$

Gl.(7) stellt lediglich eine äquivalente Umformulierung des elastisch-plastischen Problems dar, noch nicht seine Lösung. Sie kann aufgefaßt werden als linear elastisches Werkstoffgesetz mit bereichsweise unterschiedlichen elastischen Materialparametern (E und ν in V_e , modifizierte elastische Materialparameter E_t und ν^* in V_p) und Anfangsdehnungen ε_{i0} in V_p , die eine modifizierte Belastung darstellen. Das zugrunde liegende Feldproblem und somit die Werte ε_i^* und ρ_i an jeder Stelle der Struktur ergeben sich somit aus einer modifizierten elastischen Analyse (meA) des Bauteils mit den tatsächlichen Randbedingungen, aber ohne äußere Belastung. Voraussetzung ist, daß die Fließzone und damit die Abgrenzung zwischen V_e und V_p sowie in V_p die transformierten internen Variablen bekannt sind. Eine Näherungslösung nach der VFZT erhält man, wenn man V_p und Y_i zunächst möglichst gut abschätzt und anschließend iterativ verbessert. Strategien für diese Abschätzungen sind beispielsweise in [3] und [5] aufgeführt. Sie laufen auf Projektion der Restspannungszustände ρ_i im Y -Raum (Abb. 3) auf die (stets bekannte Lage der) Mises-Fließfläche der interessierenden Belastungszustände hinaus. Der elastisch-plastische Zustand ergibt sich dann aus Addition der fiktiv elastischen Analyse und der modifiziert elastischen Analyse.

Eine Reihe von Beispielrechnungen zeigt, daß rasch Konvergenz erreicht wird. Nach höchstens drei modifiziert elastischen Analysen liegt meist eine gute Näherung vor.

3. Implementierung der VFZT in Finite Elemente Programme

Die Abschätzungen und iterativen Verbesserungen der Fließzone V_p und der Y_i -Werte sind unterschiedlich für monotone und zyklische Belastung und bei letzterer unterschiedlich für elastisches oder plastisches Einspielen. Sie lassen sich algorithmisch formulieren. Da sie unabhängig sind von individuellen Einschätzungen des Berech-

ners, ist eine allgemeingültige Programmierung der VFZT für beliebige Strukturen und Belastungen möglich.

Ausgangspunkt aller Berechnungen ist bei monotoner Belastung die fiktiv elastische Analyse des maximalen Belastungszustandes bzw. bei zyklischer Belastung von beiden, den Belastungszyklus konstituierenden extremalen Belastungszuständen („minimal“ und „maximal“ genannt). Kontinuumsmechanisch betrachtet müssen hierfür die Spannungskomponenten und die Mises-Vergleichsspannung bzw. deren Schwingbreiten an jeder Stelle der Struktur vorliegen. Dann wird mit Hilfe der Vergleichsspannung festgestellt, ob die betrachtete Stelle zur Fließzone V_p gehört. Wenn ja, werden für diese Stelle die elastischen Werkstoffparameter modifiziert ($E \rightarrow E_t$, $\nu \rightarrow \nu^*$) und nach Abschätzung der TIV Anfangsdehnungskomponenten ε_{i0} nach Gl.(11) als Belastung aufgebracht.

Bei der Finite Elemente Methode erhebt sich die Frage, an welchen „Stellen“ der diskretisierten Struktur diese Informationen vorliegen müssen: an den Knoten, den Integrationspunkten, im Element-Mittelpunkt, über das Element arithmetisch gemittelt usw.? Die Antwort auf diese Frage hängt auch davon ab, wie bei dem einzusetzenden Programm die Anfangsdehnungen als Belastung aufgebracht werden können.

3.1 Nutzung der ANSYS-Parametersprache (APDL-Programmierung)

Die APDL ist die Sprache, über die der Berechner durch die normale Benutzeroberfläche mit ANSYS kommunizieren kann. Die VFZT kann über ein in der APDL programmiertes Makro für ANSYS verfügbar gemacht werden. Jedoch sind einige Besonderheiten zu beachten.

Ein Problem besteht darin, daß Anfangsdehnungen bei ANSYS nicht direkt als Belastung aufgebracht werden können (abgesehen von einigen Stabelementen, die jedoch nur linear über den Querschnitt verteilte Anfangsdehnungen zulassen). Anfangsdehnungen können aber indirekt über thermische Dehnungen aufgrund von Anfangstemperaturen simuliert werden, die wiederum die zwei Nachteile haben, daß sie weder deviatorisch sind (was die Anfangsdehnungen jedoch sein müssen), noch Schubverzerrungskomponenten erzeugen. Bei reinen Hauptspannungszuständen lassen sich deviatorische thermische Dehnungen dadurch erzeugen, daß ein orthotroper Werkstoff definiert wird, dessen drei Wärmeausdehnungskoeffizienten im Verhältnis der drei abgeschätzten γ_i -Werte zueinander stehen. Da die Materialeigenschaften bei ANSYS nicht den Knoten, sondern nur den einzelnen Elementen zugewiesen werden können, bedeutet dies, daß für jedes Element der Fließzone ein eigenes Werkstoffverhalten definiert werden muß und innerhalb eines jeden Elementes auch nur konstante Anfangsdehnungen vorgegeben werden können. Liegt kein reiner Hauptspannungszustand vor, so muß erst eine entsprechende Koordinatentransformation (für jedes Element unterschiedlich) vorgenommen werden.

Auf dieser Grundlage wurde das Programm VEFZOT geschrieben. Es hat sich bei einer Reihe von Strukturen bewährt (beispielsweise wurden die in [6] vorgestellten Ergebnisse für einen Biegebalken durch Simulation als Scheibe mit ebenem Spannungszustand hiermit erzielt), aber durch die elementweise konstanten Anfangsdehnungen und mitunter stark unterschiedlichen Koordinatentransformationen benachbarter Elemente ließ die Ergebnisqualität teilweise noch zu wünschen übrig. Außerdem erwiesen sich die erforderlichen „lokalen“ Berechnungen wie die zur Ermittlung der Wärmeausdehnungskoeffizienten und der Koordinatentransformationen aufgrund ihrer Programmierung mit der APDL als nicht so schnell wie erhofft, so daß der Vorteil, den die VFZT theoretisch wegen des geringeren Berechnungsaufwandes gegenüber der „exakten“ Fließzonentheorie besitzt, nicht im erwünschten Maße zu realisieren war. Daher wurde auch eine Programmierung als user-subroutine vorgenommen.

3.2 Programmierung als user-subroutine für ANSYS

Die Programmierung einer user-subroutine kann in FORTRAN erfolgen. Nach dem Übersetzen und Binden ist sie integraler Bestandteil von ANSYS. Der Datenaustausch mit dem eigentlichen ursprünglichen ANSYS erfolgt über Schnittstellen, auf deren Definition der Nutzer keinen Einfluß hat (Übergabe von Parametern beim Aufruf der subroutine sowie andere spezielle functions oder subroutines, die bei ANSYS als Bibliothek zur Verfügung stehen).

Das Hauptproblem bei der VFZT ist die Übergabe aller sechs unterschiedlichen deviatorischen Anfangsdehnungskomponenten an ANSYS als Belastung. Dies kann dadurch erreicht werden, daß die Anfangsdehnungen als virtuelle plastische oder Kriechdehnungen aufgefaßt werden, die über die Schnittstellen etwa der user-subroutines „userpl.f“ oder „usercr.f“ übergeben werden können. Ein Nachteil hiervon ist, daß ANSYS durch Nutzung dieser subroutines zu erkennen glaubt, es läge ein nicht-lineares Problem vor und deshalb Gleichgewichtssiterationen usw. durchführt, die bei der vollständigen Linearität der modifizierten elastischen Analyse eigentlich gar nicht notwendig sind. Von großem Vorteil ist die Tatsache, daß so die Anfangsdehnungen im Gegensatz zur APDL-Programmierung direkt an den Integrationspunkten vorgegeben werden können.

Ähnlich wie dort können aber auch hier die modifizierten elastischen Materialparameter nur elementweise vorgegeben werden. Optimal wäre es, wenn beides, die Modifikation der Materialdaten und das Aufbringen der Anfangsdehnungen an jeweils denselben Integrationspunkten möglich wäre. So wird ein Element nur dann zur Fließzone V_p gezählt, wenn die Vergleichsspannung die Streckgrenze (bzw. die Vergleichsspannungsschwingbreite die doppelte Streckgrenze) in mehr als 50% aller Integrationspunkte dieses Elementes überschreitet.

Zur Vorbereitung der meA sind Berechnungen auf „lokaler“ Ebene (d.h. für jeden einzelnen Integrationspunkt und einzelnes Element) erforderlich, durch die die zugrunde liegende fiktiv elastische Analyse(n) und die der aktuellen meA vorangegangenen iterativen Verbesserungen ausgewertet werden. Diese finden teilweise innerhalb der user-subroutine statt oder in Makros, die auch die Durchführung der meA steuern sowie die Ergebnisse der fiktiv elastischen und der modifiziert elastischen Analyse superponieren.

In einer Reihe von Beispielrechnungen hat sich gezeigt, daß die Programmierung der VFZT als user-subroutine zu besseren Ergebnissen führte als diejenige durch APDL-Programmierung, und zudem noch wesentlich schneller ist.

4. Beispiele für monotone Belastung

Die VFZT wird auf Basis ihrer Programmierung als user-subroutine auf einige Fälle monotoner Belastung angewendet. Die so erzielten Ergebnisse werden mit denen nach „exakter“ Berechnung verglichen.

4.1 Ebener Spannungszustand unter dehnungsgesteuerter Belastung

Es wird ein ebener Spannungszustand ($\sigma_3=0$) unter dehnungsgesteuerter Belastung ($\epsilon_1=0,4\%$) und verhinderter Querdehnung ($\epsilon_2=0$) untersucht (Abb. 4). Die Modellierung erfolgt mit einem PLANE42 Element.

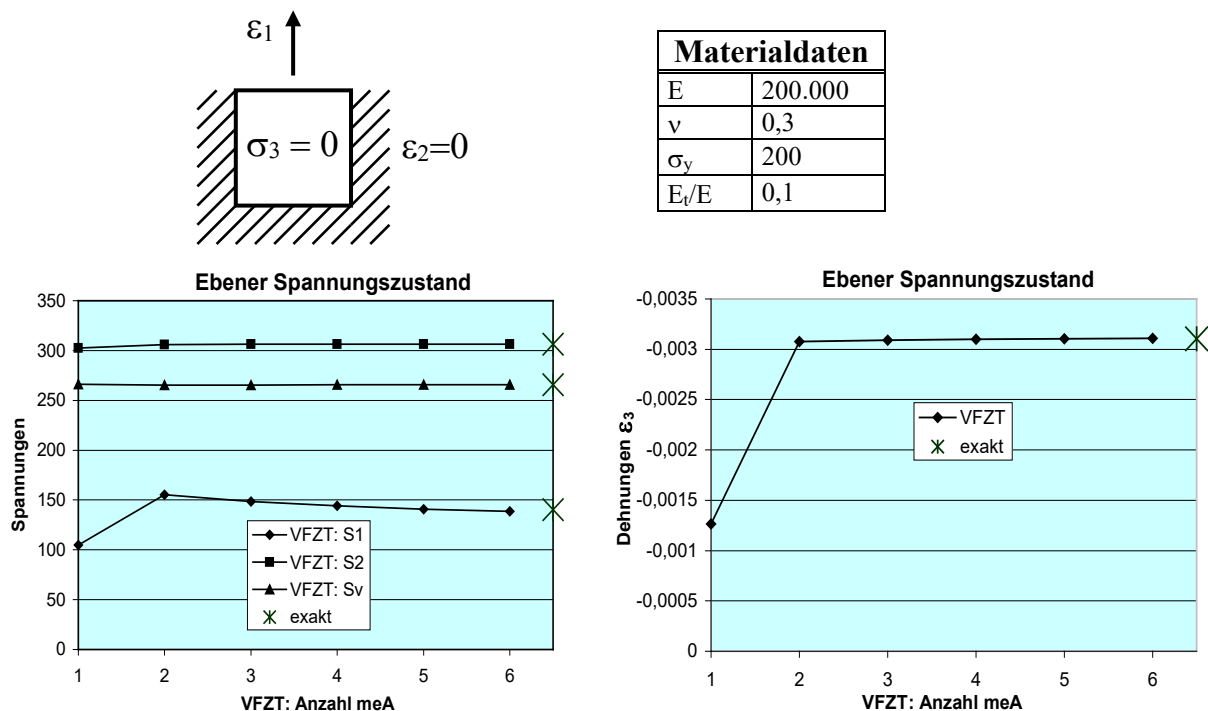


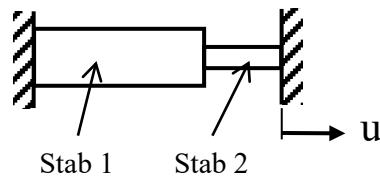
Abb. 4: Ebener Spannungszustand mit dehnungsgesteuerter Belastung

Infolge des homogenen Spannungszustandes ist eine örtliche Spannungsumlagerung nicht möglich, die Fließzone V_p also sofort bekannt, und nicht iterativ zu verbessern. Dagegen ändern sich die Spannungskomponenten im Zuge monotoner Belastungssteigerung nicht proportional zueinander, so daß ihr Verhältnis vom Belastungsniveau abhängt. Es tritt also eine directionale Spannungsumlagerung auf, die bei der VFZT eine iterative Verbesserung der TIV und damit der Anfangsdehnungen bedingt. Abb. 4 zeigt die für sechs modifizierte elastische Analysen erhaltenen Spannungskomponenten in Richtungen 1 und 2 sowie die Vergleichsspannung σ_v und die elastisch-plastische Dehnung in Richtung 3 jeweils im Vergleich mit den „exakten“ Ergebnissen, die durch inkrementelle Berechnung erhalten wurden. Man sieht, daß die VFZT bereits nach der zweiten meA eine gute Näherung liefert.

4.2 Zweistab-Modell (hintereinander)

Zwei Stäbe unterschiedlicher Querschnitte und Länge ($A_1=1$; $A_2=0,5$; $l_1=2$; $l_2=1$) aber gleichen Werkstoffes werden so miteinander verbunden, daß sie nur Normalkräfte übertragen (Abb. 5). Kerbwirkungen an der Stelle des Querschnitts-Überganges werden vernachlässigt. Als Belastung wird eine Verschiebung u aufgebracht.

Im Gegensatz zum vorigen Beispiel ist der Spannungszustand einachsig, weshalb keine direktionale Spannungsumlagerungen stattfinden können. Statt dessen ist aber die Fließzone V_p nicht von vornherein bekannt und hängt vom Belastungsniveau ab. Da es nur zwei Möglichkeiten für die Fließzone gibt (entweder ist nur Stab 2 plastisch oder beide Stäbe) ist bei der VFZT je nach Belastungsniveau maximal eine iterative Verbesserung erforderlich. Das exakte Ergebnis wird also nach 1 oder 2 meA erreicht (Abb. 5).



Materialdaten	
E	200.000
ν	0
σ_y	200
E_t/E	0,1

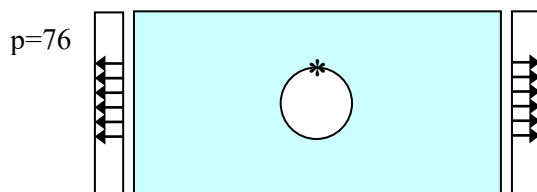
Belastungsniveau		Axialspannung in Stab 2			Axialdehnung in Stab 2		
u-fache elastische Grenzlast	nach 1 meA	nach 2 meA	exakt	nach 1 meA	nach 2 meA	exakt
0,003	1,5	218,18	-	218,18	0,19091E-02	-	0,19091E-02
0,006	3	330,00	272,73	272,73	0,75000E-02	0,46364E-02	0,46364E-02
0,02	10	470,00	-	470,00	0,14500E-01	-	0,14500E-01

Abb. 5: Zweistab-Modell (hintereinander) unter weggesteuerter Belastung

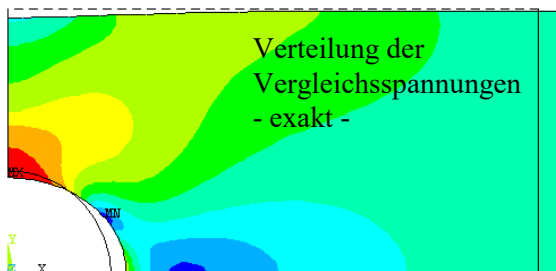
4.3 Lochscheibe

Als Beispiel für eine komplexere Struktur wird eine rechteckige Scheibe (180*360) mit zentrischem Loch ($D=70$) untersucht. In einer Richtung wird eine Gleichstreckenlast aufgebracht (Abb. 6).

Die Fließzone V_p ist nicht von vornherein bekannt. Es finden örtliche und direktionale Umlagerungen statt. Dennoch wird mit 2 meA bereits eine gute Näherung an die exakten Ergebnisse erreicht (Abb. 6 zeigt die Verteilung der Vergleichsspannungen als Konturplots für $\frac{1}{4}$ -Modell sowie die Entwicklung der maximalen Spannungskomponente am Lochrand (markierte Stelle) über die meA).



Materialdaten	
E	154.000
ν	0,3
σ_y	150
E_t/E	0,1



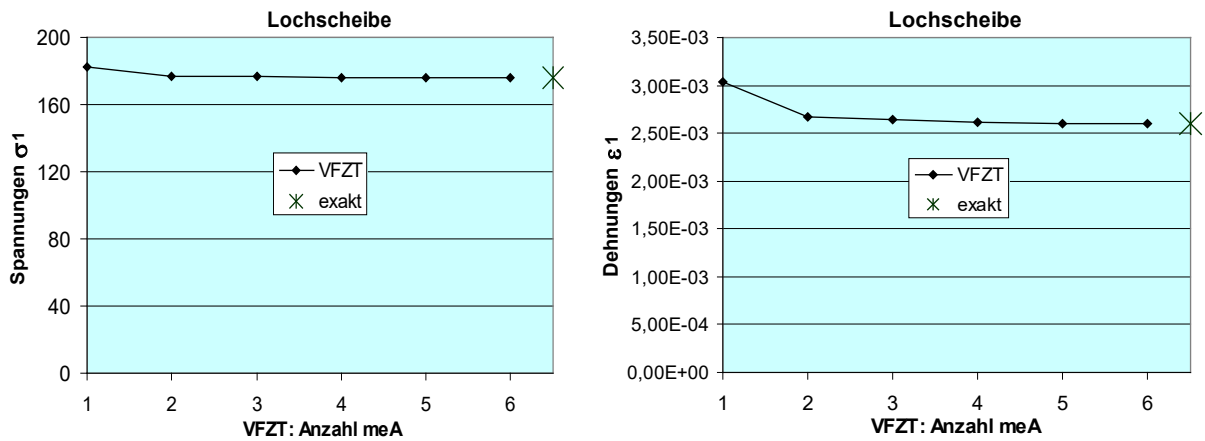


Abb. 6: Lochscheibe

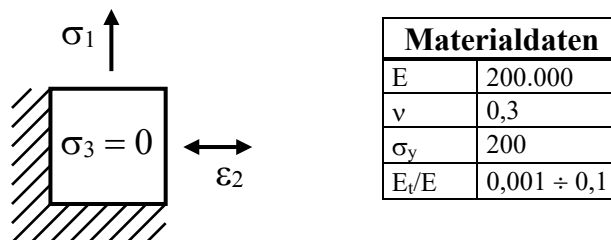
5. Beispiele für zyklische Belastung

Der Haupteinsatzzweck der VFZT wird in der Analyse zyklisch belasteter Strukturen gesehen, da hier die größten Einsparungen an Berechnungsaufwand zu erwarten ist. Mit der VFZT kann sofort der Einspielzustand untersucht werden kann, ohne ein Belastungshistogramm inkrementell für viele Zyklen durchfahren zu müssen. Im folgenden soll die so erzielbare Ergebnisqualität anhand einiger Beispiele aufgezeigt werden. Die Berechnungen wurden mit der Programmierung der VFZT als user-subroutine durchgeführt.

5.1 Ebener Spannungszustand (Material-Ratcheting)

Es wird ein ebener Spannungszustand untersucht ($\sigma_3=0$), bei dem in einer Richtung eine konstante Spannung als Belastung aufgegeben wird ($\sigma_1=100$), in der anderen Richtung eine zyklische Dehnung ($\epsilon_2=0 \leftrightarrow 0,4\%$) (Abb. 7). Die Fließzone V_p ist von vornherein bekannt, braucht also nicht iterativ gefunden zu werden. Örtliche Spannungsumlagerungen sind nicht möglich, wohl aber direktionale. D.h. bei plastischem Werkstoffverhalten ist das Verhältnis der Spannungskomponenten zueinander anders als fiktiv elastisch berechnet. Der hier behandelte Fall führt [4] zufolge zu (finitem) Material-Ratcheting.

Die VFZT liefert ohne iterative Verbesserung, also bereits mit einer meA, das exakte Ergebnis für den (bei diesem Belastungsniveau elastischen) Einspielzustand. Bei einer inkrementellen Berechnung nach der exakten Fließzonentheorie sind hierfür viele Belastungszyklen zu durchfahren. Abb. 7 zeigt die Zyklenzahl n , die bei der exakten Analyse erforderlich ist, um die Dehnungen im Einspielzustand bei unterschiedlichen Verfestigungsmoduln E_t/E auf sechs signifikante Stellen genau zu ermitteln. Ferner sind die elastisch-plastischen Dehnungen angegeben, die im Einspielzustand in Richtung der konstanten Spannung akkumuliert wurden (und zwar beim minimalen Belastungszustand, d.h. jedesmal, wenn wieder $\epsilon_2=0$ erreicht ist).



E_t/E	exakte Analyse (inkrementell)			VFZT		
	erf. n	ϵ_1^{el-pl}	σ_y	Anzahl meA	ϵ_1^{el-pl}	σ_y
0,001	2943	0,37490	217,78	1	0,37490	217,78
0,005	616	0,74901E-01	217,12	1	0,74901E-01	217,12
0,01	293	0,37402E-01	216,29	1	0,37402E-01	216,29
0,05	60	0,74090E-02	209,72	1	0,74090E-02	209,72
0,1	26	0,36680E-02	201,55	1	0,36680E-02	201,55

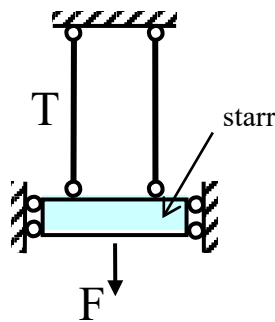
Abb. 7: Ein Element mit ebenem Spannungszustand (Material-Ratcheting)

Bei zehnfach höherer Dehnungsschwingbreite ($\epsilon_2=0 \leftrightarrow 4\%$) kommt es zu plastischem Einspielen. Auch hierfür benötigt die VFZT nur eine meA, um das exakte Ergebnis zu erzielen.

5.2 Zweistab-Modell (parallel)

Zwei Stäbe gleichen Querschnitts ($A=1$), gleicher Länge ($l=1$) und gleichen Werkstoffes werden so durch einen starren Körper miteinander verbunden, daß sie stets gleich lang sind (Abb. 8). Es wirkt eine konstante Kraft F , die in beiden Stäben die Primärspannung σ_p hervorruft. In einem Stab wird eine zyklische Änderung der Temperatur ($T=0 \leftrightarrow T_{max}$) aufgebracht, wodurch die fiktiv elastische Sekundärspannung σ_t (mit unterschiedlichem Vorzeichen in beiden Stäben) hervorgerufen wird. Je nach Belastungsniveau tritt elastisches (S) oder plastisches Einspielen (P) ein. Bei elastischem Einspielen sind drei verschiedene Belastungskonfigurationen zu unterscheiden, die zu unterschiedlichen Einspielvorgängen führen, Sa, Sb und Sc [6].

Da es für die Fließzone V_p nur zwei Möglichkeiten gibt (entweder ist nur der thermisch direkt belastete Stab plastisch, oder beide), und direktionale Umlagerungen wegen des einachsigen Spannungszustandes nicht auftreten können, führt die VFZT entweder sofort (d.h. ohne iterative Verbesserung) oder spätestens nach einer iterativen Verbesserung (also nach 2 meA) zu dem exakten Ergebnis für den Einspielzustand (in Abb. 8 für den Belastungszeitpunkt mit $T=0$ dargestellt). Je nach Verfestigungsmodul E_t/E und Belastungskombination müssen bei der exakten Analyse u.U. über 1000 Zyklen durchgerechnet werden, bis die Spannungen und Dehnungen des Einspielzustandes auf mehrere Stellen genau bekannt sind. Dies entspricht etwa dem Berechnungsaufwand von 10.000 elastischen Analysen.



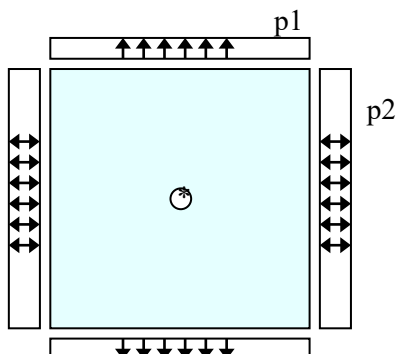
Materialdaten	
E	200.000
ν	0,3
σ_y	200
E_t/E	0,1

		Dehnung		Spannung	
Belastungsbereich Sa: $\sigma_p/\sigma_y=0,5; \sigma_t/\sigma_y=1,2$	VFZT	1 meA	0,10727E-02	214,55	
		2 meA	0,14000E-02	208,00	
	exakt		0,14000E-02	208,00	
Belastungsbereich Sb: $\sigma_p/\sigma_y=0,05; \sigma_t/\sigma_y=1,5$	VFZT	1 meA	0,50000E-03	100,00	
		2 meA	-	-	
	exakt		0,50000E-03	100,00	
Belastungsbereich Sc: $\sigma_p/\sigma_y=0,7; \sigma_t/\sigma_y=1,9$	VFZT	1 meA	0,70000E-02	302,00	
		2 meA	0,65500E-02	311,00	
	exakt		0,65500E-02	311,00	
Belastungsbereich P: $\sigma_p/\sigma_y=0,5; \sigma_t/\sigma_y=2,5$	VFZT	1 meA	0,50000E-02	280,00	
		2 meA	-	-	
	exakt		0,50000E-02	280,00	

Abb. 8: Zweistab-Modell (parallel)

5.3 Lochscheibe (kleines Loch)

Eine quadratische Scheibe (100*100) mit kleinem zentrischen Kreisloch ($D=1$) wird in einer Richtung durch eine konstante Gleichstreckenlast $p_1=\sigma_y/3$ und in die andere Richtung durch eine zyklische Gleichstreckenlast $p_2=0 \leftrightarrow 100$ belastet (Abb. 9). Der theoretische elastische Spannungserhöhungsfaktor liegt fast bei 3. Es kommt zu elastischem Einspielen.



Materialdaten	
E	200.000
ν	0,3
σ_y	200
E_t/E	0,1

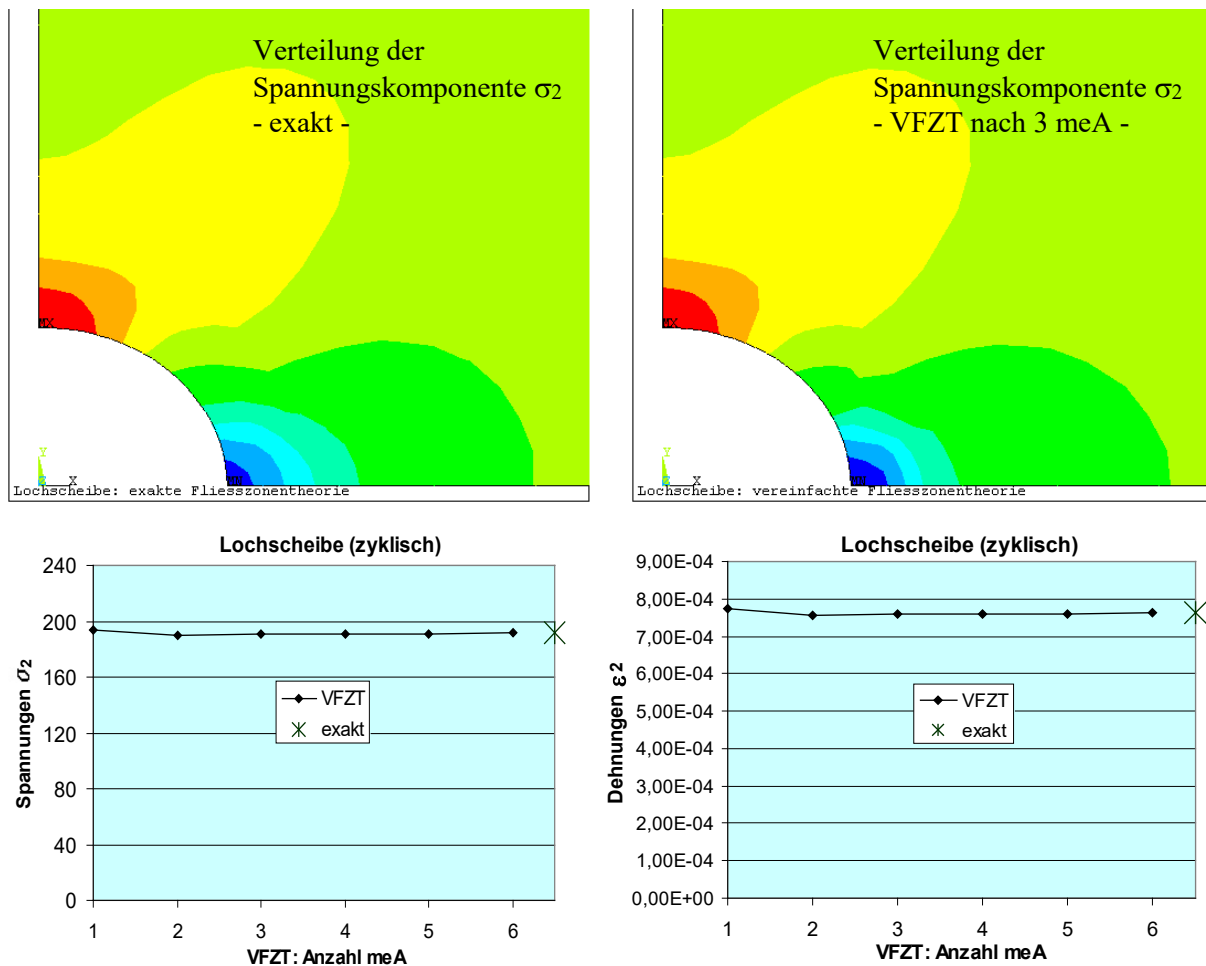


Abb. 9: Lochscheibe (mit kleinem Loch) unter zyklischer Belastung

Abb.9 zeigt die Verteilung der Spannungskomponente in Richtung 2 als Konturplot (starkes Zoom) im Einspielzustand zum Zeitpunkt minimaler Belastung ($p_2=0$) für $\frac{1}{4}$ -Modell sowie die Entwicklung der maximalen Spannungskomponente am Lochrand (markierte Stelle) über die meA im Vergleich mit den exakten Ergebnissen. Nach der 2. meA ist bereits eine gute Näherung erreicht.

6. Schrifttum

- [1] Zarka,J., Frelat,J., Inglebert,G. and Kasmal-Navidi,P: A new Approach in Inelastic Analysis of Structures, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1988 bzw. 1990
- [2] Maier,G., Comi.,C., Corigliani,A., Perego,U. and Hübel,H.: Bounds and estimates on inelastic deformations, Commission of the European Communities, contract RA1-0162-I and RA1-0168-D, EUR 16555 EN, 1992
- [3] Hübel,H.: Berechnung akkumulierter Dehnungen nach der Vereinfachten Fließzonentheorie auf der Grundlage der Zarka-Methode bei zyklischer Belastung (Ratcheting-Nachweis); Bericht für das BMU, Februar 1999 (Vorhaben SR 2226 und SR 2298)
- [4] Hübel,H.: Basic conditions for material and structural ratcheting, Nuclear Engineering and Design 162 (1996) 55-65 (siehe auch "Ratcheting Phenomena", SMiRT 12, paper L08/1, 1993)
- [5] Hübel,H.: Ermittlung realistischer Ke-Faktoren (Plastifizierungsfaktoren) als Grundlage für die Präzisierung des kerntechnischen Regelwerkes hinsichtlich der Ermüdungsanalyse; Schriftenreihe "Reaktorsicherheit und Strahlenschutz" des BMU, BMU-1997-481, August 1996 (Vorhaben SR 2221)
- [6] Hübel,H.: Vereinfachte Fließzonentheorie für Ermüdungs- und Ratcheting-Nachweise, 25. MPA-Seminar, Stuttgart, 7. und 8. Oktober 1999