

Vereinfachte Fließzonentheorie für Ermüdungs- und Ratcheting-Nachweise

Simplified theory of plastic zones for fatigue and ratcheting analyses

Hartwig Hübel¹
Fachhochschule Lausitz, Cottbus

25. MPA-Seminar, Stuttgart, 7. und 8. Oktober 1999

Zusammenfassung

Die Vereinfachte Fließzonentheorie gestattet bei zyklischer Belastung die näherungsweise Ermittlung der elastisch-plastischen Dehnungsschwingbreite und der durch einen Ratcheting-Mechanismus akkumulierten Verzerrungen sowie aller daraus ableitbaren Größen wie etwa Verformungen im elastischen und plastischen Einspielzustand. Sie beruht auf der Zarka-Methode. Im Gegensatz zu den in den technischen Regelwerken der Anlagentechnik zugelassenen vereinfachten Berechnungsmethoden (wie etwa die Anwendung des Faktors K_e) kann sie neben der Werkstoffverfestigung auch den Einfluß der individuellen Konfiguration von Bauteilgeometrie und Belastungsart auf das plastische Verhalten der Struktur erfassen. Sie ist gleichermaßen geeignet, globale Struktureffekte, lokale Kerbeffekte und Einflüsse aus der unterschiedlichen Querdehnungszahl im Elastischen und im Plastischen zu berücksichtigen. Als Berechnungsaufwand fallen lediglich einige modifizierte linear elastische Analysen sowie „lokale“ Berechnungen an. Eine Reihe von Beispielen zeigt, daß sowohl die Dehnungsschwingbreite als auch die akkumulierten Verzerrungen mit geringem Berechnungsaufwand in guter Näherung abgeschätzt werden können.

¹ Der Autor dankt sowohl dem Ministerium für Umwelt, Naturschutz und Reaktorsicherheit für seine Unterstützung, als auch Frau Dipl.-Ing. (FH) M.Stange sowie den Herren Dipl.-Ing. (FH) J.Fella, M.Glede, T.Hoffmann, H.Huhn, R.Laqua, J.Olbrich für verschiedene Anwendungen der Vereinfachten Fließzonentheorie, woraus sich fruchtbare Diskussionen ergeben haben.

1. Einleitung

Zur rechnerischen Ermittlung der Lebensdauer eines Bauteils infolge zyklischer Belastungen sind Ermüdungs- und Ratcheting-Analysen erforderlich. Für die Berechnung der Ermüdungsausnutzung wird die Schwingbreite der lokalen Beanspruchungen infolge eines zyklisch auftretenden Lastkollektivs benötigt, bei überelastischer Beanspruchung die elastisch-plastische Dehnschwingbreite $\Delta\varepsilon$ (Bild 1). Dagegen wird für einen Ratcheting-Nachweis die Kenntnis der zyklisch akkumulierten elastisch-plastischen Dehnungen zum Ende der Lebensdauer benötigt, etwa repräsentiert durch die Mitteldehnung ε_m der Spannungs-Dehnungs-Hysterese im Einspielzustand (Bild 1). Diese muß dann unterhalb zulässiger Grenzwerte bleiben. Außerdem ist nachzuweisen, daß die mit einer Dehnungsakkumulation einhergehenden Verformungen nicht zu einem Funktionsverlust des Bauteils führen (indem z.B. Dichtheitsanforderungen nicht mehr erfüllt werden können).

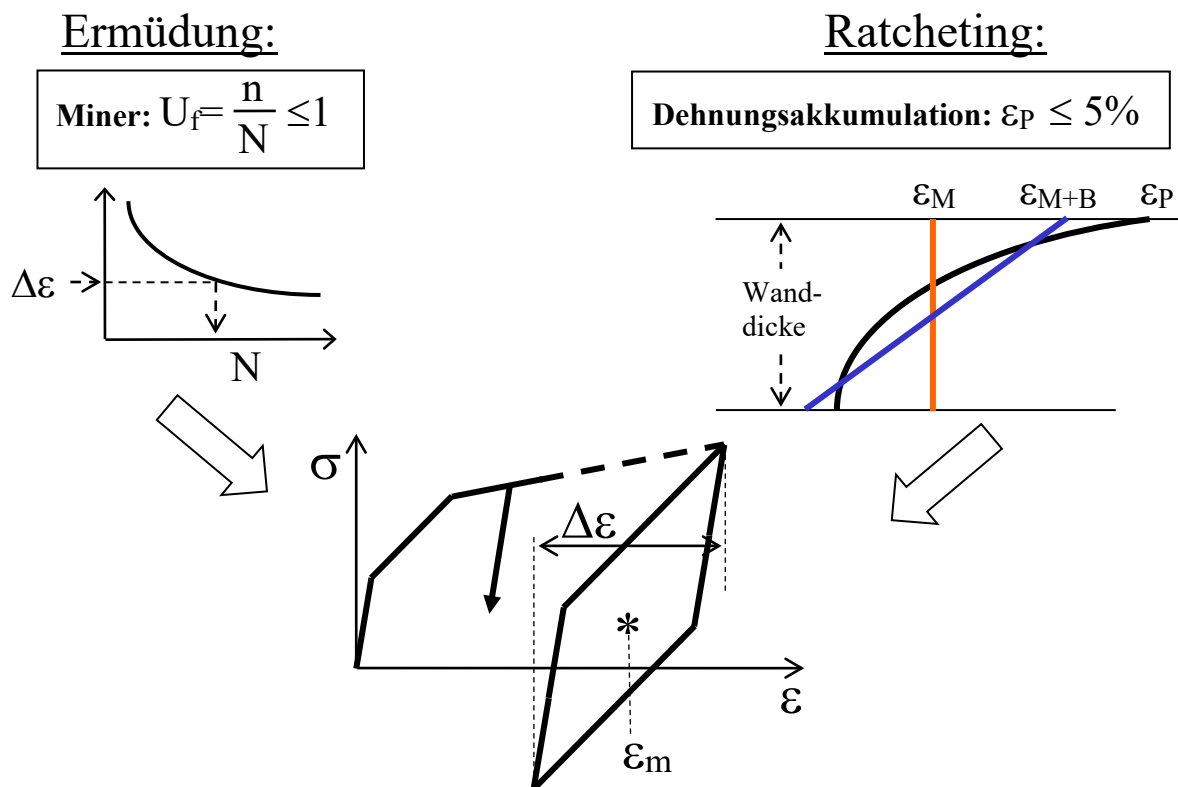


Bild 1: Dehnschwingbreite $\Delta\varepsilon$ und akkumulierte Dehnung ε_m im plastischen Einspielzustand; Strain range $\Delta\varepsilon$ and accumulated strain ε_m in the state of plastic shakedown

Die Ermittlung der elastisch-plastischen Dehnungen kann auf unterschiedliche Weise erfolgen, entweder „exakt“ oder durch vereinfachte Näherungslösungen. Unbeschadet der üblichen Näherungen (etwa hinsichtlich der geometrischen Idealisierung, der Lastannahmen, des Werkstoffverhaltens, der numerischen Methoden wie der Finite Elemente Methode usw.) ist hier mit „exakt“ gemeint, daß im Rahmen der klassischen Plastizitätstheorie die Feldgleichungen simultan mit dem gewählten Werkstoffgesetz möglichst genau integriert werden - ohne Rücksicht auf den damit verbundenen hohen

Berechnungsaufwand. Dies erfordert eine schrittweise (inkrementelle) Abarbeitung des vorgegebenen Belastungshistogramms. Diese Vorgehensweise kann extrem aufwendig sein, wenn zyklische Belastung zu untersuchen ist und mit einer Zunahme der Verzerrungen von Zyklus zu Zyklus zu rechnen ist (Ratcheting). Gegebenenfalls muß dann ein Belastungszyklus mehrere tausend mal durchgerechnet werden, bis sich ein stabilisierter Zustand (finites Ratcheting bzw. elastisches oder plastisches Einspielen oder infinites Ratcheting mit konstantem Verzerrungszinkrement pro Zyklus) einstellt (Bild 2). Dies kann einem Berechnungsaufwand bedeuten, der mehreren zehntausend elastischen Analysen entspricht.

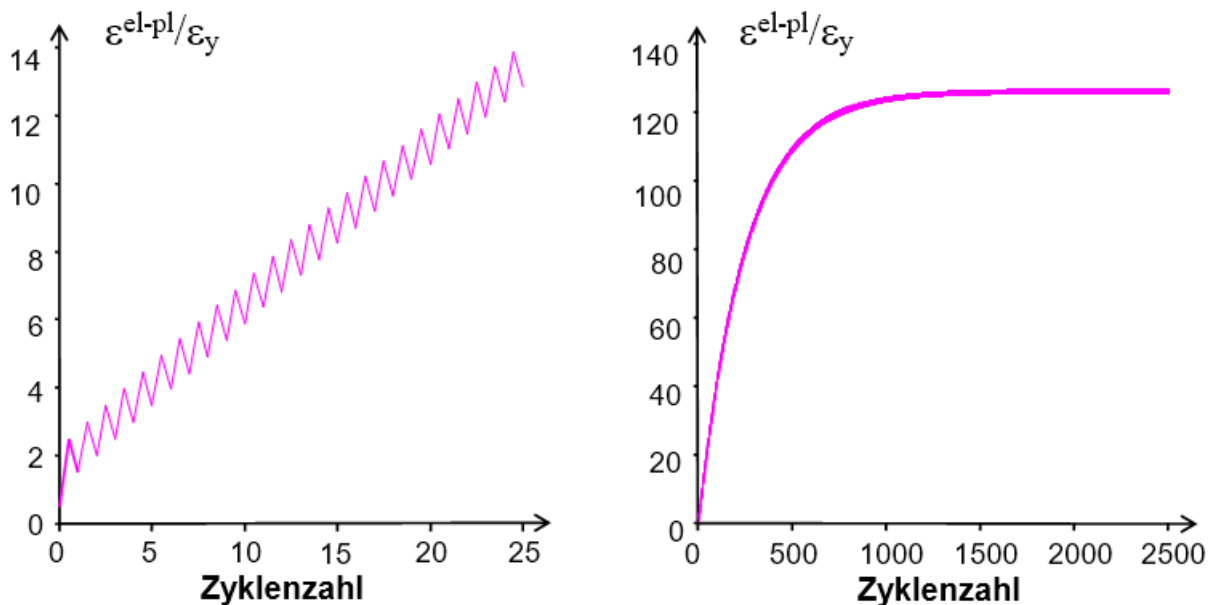


Bild 2: Beispiel für die Akkumulation elastisch-plastischer Dehnungen infolge zyklischer Belastung: finites Ratcheting mit dem Endzustand elastisches Einspielen (hier als Vielfaches der elastischen Grenzdehnung ε_y); Details siehe Abschnitt 6.1
Example of accumulating elastic-plastic strain due to cyclic loading: finite ratcheting leading to elastic shakedown (normalised by the elastic limit strain ε_y); for details see section 6.1

Um mit geringerem Berechnungsaufwand eine Aussage über die durch einen Ratcheting-Mechanismus akkumulierten Verzerrungen und die Dehnungsschwingbreite im Einspielzustand zu erhalten, ist man auf vereinfachte Berechnungsmethoden angewiesen. Diese beruhen auf Näherungen, mit denen die „exakten“ Ergebnisse möglichst gut abgeschätzt werden können.

Solche Methoden sind teilweise in kerntechnischen Regelwerken vorgegeben, z.B. in Form des plastischen Dehnungserhöhungsfaktors K_e . Durch Multiplikation der fiktiv elastisch berechneten Dehnungsschwingbreite mit diesem Faktor soll die elastisch-plastische Dehnungsschwingbreite abgeschätzt werden. Die meisten Regelwerke haben eine Formel für diesen Faktor K_e übernommen, die dem ASME-Code entstammt und vor mehreren Jahrzehnten entwickelt worden ist – in einer Zeit, als

Festigkeitsberechnungen in der Regel noch mit Rechenschiebern durchgeführt werden mußten. So ist dieser Faktor zwar mit relativ geringem Berechnungsaufwand zu ermitteln, krankt jedoch daran, daß er die im Anwendungsfall vorliegende spezielle Konfiguration von Bauteilgeometrie und Belastungsart nicht erfaßt. Im Ergebnis ist er somit oft überkonservativ, kann in speziellen Fällen aber auch unkonservativ sein.

Zur Abschätzung der akkumulierten Dehnungen im Rahmen eines Ratcheting-Nachweises enthalten die Regelwerke üblicherweise gar keine praktisch anwendbaren vereinfachten Methoden. Statt dessen ist entweder nachzuweisen, daß die Vergleichsspannungsschwingbreite unterhalb der doppelten Streckgrenze bleibt (in diesem Fall wird auf die Berechnung der elastisch-plastischen Dehnungsakkumulation verzichtet, obwohl dies kein hinreichendes Kriterium zum Ausschluß von Ratcheting ist und u.U. beträchtliche Dehnungen akkumuliert werden können – siehe Bild 2) oder es ist zum Nachweis, daß zugelassene Dehngrenzen nicht überschritten werden, eine „exakte“ elastisch-plastische Analyse durchzuführen.

Die Vereinfachte Fließzonentheorie (VFZT) auf der Grundlage der Zarka-Methode bietet dagegen eine Möglichkeit, die elastisch-plastische Dehnschwingbreite sowie die akkumulierten Dehnungen (und darüber hinaus auch die Verformungen usw.) in Abhängigkeit von Bauteilgeometrie und Belastungsart individuell zu berechnen und dabei auch die hierfür wichtige kinematische Verfestigung zu erfassen. Anstelle einer inkrementellen Berechnung des gesamten Belastungshistogramms wird hierbei lediglich eine Reihe (modifizierter) linear elastischer Analysen durchgeführt. Die hierbei jeweils vorzunehmenden Modifikationen hängen von kontinuumsmechanisch fundierten Abschätzungen speziell eingeführter transformierter interner Variabler ab.

2. Bezeichnungen

E	Elastizitätsmodul
E_t	elastisch-plastischer Verfestigungsmodul
Y	transformierte interne Variable
f.el	(als Superskript) fiktiv elastisch berechnet, also nach der Elastizitätstheorie, obwohl Streckgrenze überschritten
$\Delta(\cdot)$	Schwingbreite von (\cdot) ; Def. komponentenweise: (\cdot) bei max. Belastungszustand - (\cdot) bei min. Belastungszustand
$\varepsilon_y = \sigma_y / E$	elastische Grenzdehnung
$\varepsilon, \varepsilon^{el-pl}$	Dehnung, elastisch-plastische Dehnung
ν	Querdehnzahl
ρ	Restspannung
σ, σ_v	Spannung, Mises-Vergleichsspannung
σ_y	Streckgrenze
ξ	Rückspannung (interne Variable)

3. Theorie der Vereinfachten Fließzonentheorie

Die VFZT beruht auf der Zarka-Methode [1, 2, 3, 4]. Ihr Grundgedanke ist, das nach der „exakten“ Fließzonentheorie formulierte elastisch-plastische Problem als linear elastisches Problem umzuformulieren. Hierzu werden spezielle interne Variable verwendet, die zunächst unbekannt sind, aber mit kontinuumsmechanisch fundierten Argumenten abgeschätzt sowie anschließend durch einen Iterationsvorgang verbessert werden können. Ähnlich wird auch die Grenze zwischen elastischem und elastisch-plastischem Bereich in der Struktur, also die Identifikation der Fließzone, zunächst abgeschätzt und anschließend auf der Basis modifizierter elastischer Analysen iterativ verbessert.

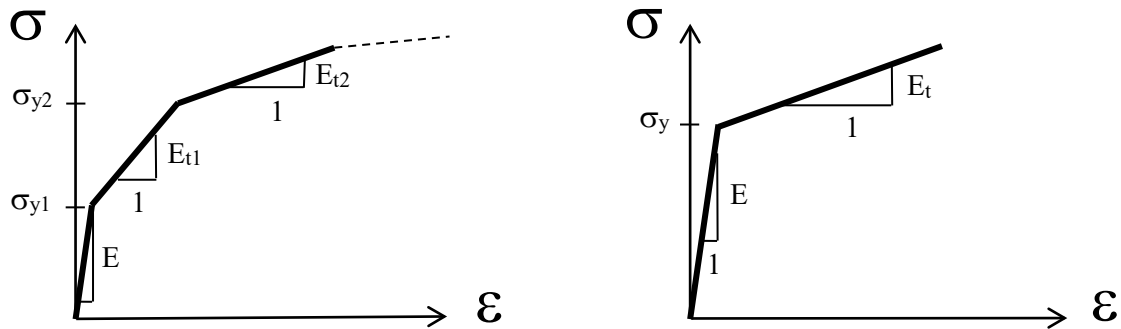
Vorausgesetzt werden lediglich die ohnehin stets erforderlichen fiktiv elastischen Analysen der beiden den Belastungszyklus konstituierenden extremalen Belastungszustände. Die genannten Abschätzungen und iterativen Verbesserungen lassen sich algorithmisch formulieren. Da sie unabhängig sind von individuellen Einschätzungen des Berechners, ist eine für beliebige Strukturen und Belastungen (soweit durch die Theorie gedeckt; zu Einschränkungen siehe unten) gültige Programmierung möglich, die als Postprozessor für die Auswertung der beiden erwähnten fiktiv elastischen Analysen verwendet werden kann.

Die VFZT ist - mit jeweils unterschiedlichen Vorgehensweisen - sowohl für monotone als auch für zyklische Belastung anwendbar. Anstelle einer konsekutiven Verfolgung des Belastungspfad im Belastungshistogramm wird in beiden Fällen sofort der Endzustand gesucht. Bei zyklischer Belastung ist dies der Einspielzustand.

Eine weitere, hier nicht behandelte Möglichkeit der VFZT betrifft die Möglichkeit, eine begonnene Analyse nach der „exakten“ Fließzonentheorie nach wenigen Zyklen abzubrechen und ihre Ergebnisse mit der VFZT zum Einspielzustand zu extrapolieren. Ferner kann mit der VFZT auch die gemeinsame Wirkung mehrerer zyklischer Belastungen untersucht werden, die sich unabhängig voneinander verhalten (Mehrparameter-Belastungen).

3.1 Werkstoffgesetz

Das für eine Anwendung der VFZT herangezogene Werkstoffmodell muß eine Reihe bestimmter Bedingungen erfüllen, die hier nicht im einzelnen diskutiert werden sollen (siehe z.B. [1], [5]). Es soll die Feststellung genügen, daß das in der Berechnungspraxis weit verbreitete Modell multilinearer kinematischer Verfestigung (Bild 3; siehe auch Bild 1) mit einer Mises-Fließfläche die Anforderungen erfüllt.



**Bild 3: Multilineare und lineare (kinematische) Verfestigung;
Multilinear and linear (kinematic) hardening**

Eine Tresca-Fließfläche wäre ebenfalls zulässig. Isotrope Verfestigung kann nur pauschal dadurch erfaßt werden, daß die Werkstoffparameter σ_{y1} , E_{t1} , σ_{y2} , E_{t2} usw. nicht für monotonen Werkstoffverhalten identifiziert werden, sondern für einen zyklisch gesättigten oder besser (da eher für die gesamte Zyklenzahl repräsentativ) für einen teilverfestigten Zustand. Die elastischen Werkstoffparameter E und ν sowie die Verfestigungsparameter E_{ti} dürfen sich während eines Belastungszyklus nicht ändern. Eine eventuelle Abhängigkeit des Werkstoffverhaltens vom Belastungsprozeß (etwa eine Temperaturabhängigkeit bei thermischer Belastung) läßt sich also nur für die Spannungen in den Knickpunkten des Spannungs-Dehnungs-Diagrammes (σ_{yi}) berücksichtigen.

Als Sonderfall ist in der multilinearen kinematischen Verfestigung auch lineare kinematische Verfestigung enthalten (Bild 3). Aus Gründen der Einfachheit wird die VFZT im folgenden nur für diesen Fall dargestellt. Die Formulierung der VFZT bei multilinearer Verfestigung und speziell trilinearem Spannungs-Dehnungs-Verhalten wird in [6, Kapitel 8 und 11] theoretisch und an einem Beispiel behandelt.

Da die Anwendung der VFZT in der Berechnungspraxis nur mit numerischen Methoden wie der Finite Elemente Methode möglich ist, muß aus numerischen Gründen außerdem gefordert werden, daß die Steigung des letzten Astes im Spannungs-Dehnungs-Diagramm nicht verschwindet. Linear elastisch - ideal plastisches Werkstoffverhalten kann also nicht zugrunde gelegt werden.

Bedingt durch die unbegrenzte kinematische Verfestigung ist infinites Ratcheting in dem Sinn, daß nach unendlich vielen Zyklen rechnerisch unendlich hohe Verzerrungen auftreten, nicht direkt möglich (allenfalls durch Simulation mit numerisch sehr kleinem Verfestigungsmodul). Statt dessen kommt es entweder zum elastischen oder zum plastischen Einspielen, das mit finitem Ratcheting verbunden sein kann, womit gemeint ist, daß bis zum Erreichen des Einspielzustandes elastisch-plastische Dehnungen über die Zyklen akkumuliert werden [7].

Im folgenden werden aus Gründen der übersichtlicheren Darstellung nur Hauptspannungszustände betrachtet (Richtungen 1, 2, 3). Die Gleichungen gelten so nur dann, wenn die Hauptspannungsrichtungen während einer Belastungsänderung konstant bleiben. Inhaltlich ist eine solche Beschränkung bei der VFZT nicht erforderlich.

Die Mises-Fließfläche ist im deviatorischen Spannungsraum (σ_i') ein Kreis mit Radius σ_y . Bei linearer kinematischer Verfestigung ist sein Mittelpunkt aus dem Koordinatenursprung um die sog. interne Variable ξ_i verschoben:

$$\sigma_i' = \sigma_i - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad ; \quad i=1, 2, 3 \quad (1)$$

$$\sigma_y = \left\| \sigma_i' - \xi_i \right\| = \sqrt{\frac{3}{2} \left[(\sigma_1' - \xi_1)^2 + (\sigma_2' - \xi_2)^2 + (\sigma_3' - \xi_3)^2 \right]} \quad (2)$$

$$\xi_i = \frac{2}{3} \frac{E \cdot E_t}{E - E_t} \varepsilon_i^{pl} \quad (3)$$

Während des Plastizierens liegen die deviatorischen Spannungen auf dem Kreisrand. Spannungszustände außerhalb des Mises-Kreises sind nicht zulässig. Nach der Normalenregel sind die plastischen Verzerrungsdifferentiale nach außen gerichtet (Bild 4).

3.2 Transformierte interne Variable

Der tatsächliche Spannungszustand $\sigma_{i(t)}$ zu einem bestimmten Belastungszeitpunkt t bzw. sein Deviator $\sigma_i'_{(t)}$ ergibt sich aus einer Berechnung der tatsächlichen Konfiguration von Bauteilgeometrie und Belastung nach der exakten Fließzonentheorie. Er kann bei elastisch-plastischem Verhalten an jeder Stelle des Tragwerks (unabhängig davon, ob an dieser Stelle selbst plastische Dehnungen auftreten, oder ob bloß Rückwirkungen durch Plastizieren anderer Stellen, also infolge Spannungsumlagerungen, stattfinden) zerlegt werden in einen fiktiv elastischen ($\sigma_i^{f.el}$) und einen Restspannungszustand (ρ_i) bzw. deren Deviatoren:

$$\sigma_i' = \sigma_i^{f.el} + \rho_i \quad (4)$$

Der fiktiv elastische Zustand ergibt sich aus einer Berechnung der tatsächlichen Konfiguration von Bauteilgeometrie und Belastung nach der Elastizitätstheorie und kann damit praktisch immer als bekannt angesehen werden. Da sich die Restspannungen ρ_i nach Gl.(4) aus der Differenz von σ_i und $\sigma_i^{f.el}$ ergeben, dürfen sie nur mit sich selbst, also nicht mit der äußeren Belastung, im Gleichgewicht stehen.

Nun wird eine Größe Y_i eingeführt, die die interne Variable ξ_i transformiert und deshalb „transformierte interne Variable“ (TIV) genannt wird:

$$Y_i = \xi_i - \rho_i \quad (5)$$

Mit Gl.en (2) bis (5) kann die Fließfläche nun durch die TIV ausgedrückt werden:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{3}{2} \left[\left(\sigma_1^{f.el'} - Y_1 \right)^2 + \left(\sigma_2^{f.el'} - Y_2 \right)^2 + \left(\sigma_3^{f.el'} - Y_3 \right)^2 \right]} \quad (6)$$

Sie stellt im Raum der TIV (Y_i) einen Kreis mit Radius σ_y dar, dessen Mittelpunkt in $\sigma_i^{f.el'}$ liegt. Während des Plastizierens liegen die Y -Werte auf dem Kreisrand. Y -Werte außerhalb des Mises-Kreises sind nicht zulässig. Nach der Normalenregel ist das plastische Verzerrungsdifferential nach innen gerichtet (Bild 4).

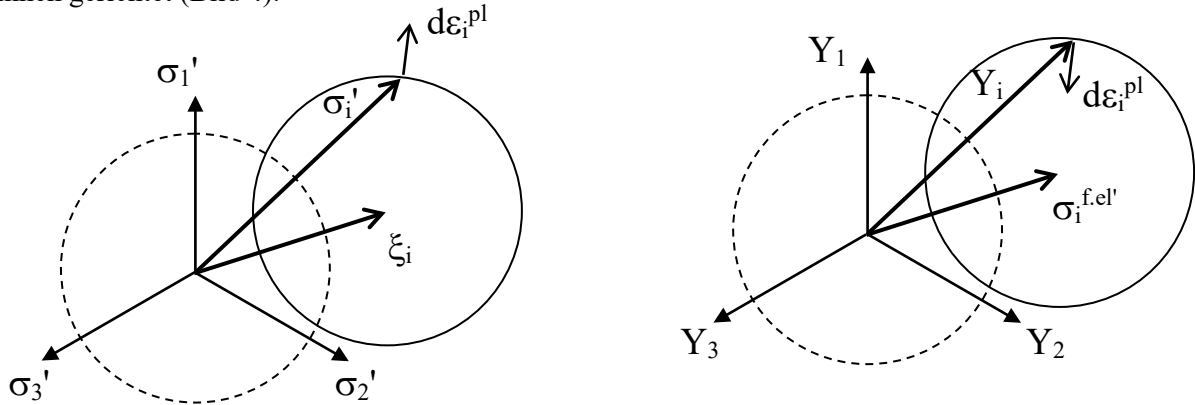


Bild 4: Mises-Fließfläche im deviatorischen Spannungsraum und im Raum der TIV; Mises yield surface in the deviatoric stress space and in the space of the TIV

3.3 Modifizierte elastische Analysen

Die grundlegende Idee der VFZT kann am einfachsten für monotone 1-Parameter-Belastung (d.h. der zeitliche Verlauf aller Lasten hängt nur von einem Parameter ab) und einachsigen Spannungszustand veranschaulicht werden:

Art der Analyse	Werkstoffgesetz an plastizierenden Stellen	Bela-stung	Rand-bedingungen
„exakt“ elastisch-plastisch (A)	$\varepsilon^{el-pl} = \sigma^{el-pl}/E + \varepsilon^{pl}$	ja	erfüllt
fiktiv elastisch (B)	$\varepsilon^{f.el} = \sigma^{f.el}/E$	ja	erfüllt
Differenz (A)-(B) mit Gl. (3), (4), (5): Umformulierung:	$\varepsilon^{el-pl} - \varepsilon^{f.el} = (\sigma^{el-pl} - \sigma^{f.el})/E + \varepsilon^{pl}$ $\varepsilon^{el-pl} - \varepsilon^{f.el} = \rho/E + (1,5Y + \rho) \cdot (E - E_t)/(E \cdot E_t)$ $\varepsilon^* = \rho/E^* + \varepsilon_0$ mit den Abkürzungen $\varepsilon^* = \varepsilon^{el-pl} - \varepsilon^{f.el}$ $E^* = E_t$ $\varepsilon_0 = 1,5 Y \cdot (E - E_t)/(E \cdot E_t)$	nein	erfüllt

Es wird also anstelle der „exakten“ elastisch-plastischen Analyse der Differenzzustand zwischen ihr und der fiktiv elastischen Analyse betrachtet. Dieser ist dadurch gekennzeichnet, daß das Bauteil keinen Belastungen ausgesetzt ist, aber seine Randbedingungen behält. Das zugrunde gelegte Werkstoffgesetz lautet (nun wieder für einen Hauptspannungszustand und getrennt für elastisch-plastische

(Vp) und rein elastische (Ve) Bereiche in der Struktur):

$$\varepsilon_i^* = \begin{cases} (E_{ij}^*)^{-1} \rho_j + \varepsilon_{i0} & \text{in Vp} \\ (E_{ij})^{-1} \rho_j & \text{in Ve} \end{cases} \quad (7)$$

mit

$$\varepsilon_i^* = \varepsilon_i^{\text{el-pl}} - \varepsilon_i^{\text{f.el}} \quad (8)$$

$$E_{ij}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix} ; \quad (E_{ij}^*)^{-1} = \frac{1}{E_t} \begin{pmatrix} 1 & -\nu^* & -\nu^* \\ -\nu^* & 1 & -\nu^* \\ -\nu^* & -\nu^* & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\nu^* = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \nu\right) \frac{E_t}{E} \quad (10)$$

$$\varepsilon_{i0} = \frac{3}{2} \frac{E - E_t}{E \cdot E_t} Y_i \quad (11)$$

Gl.(7) stellt lediglich eine äquivalente Umformulierung des elastisch-plastischen Problems dar, noch nicht seine Lösung. Sie kann aufgefaßt werden als linear elastisches Werkstoffgesetz mit bereichsweise unterschiedlichen elastischen Materialparametern (E und ν in V_e , modifizierte elastische Materialparameter E_t und ν^* in V_p) und Anfangsdehnungen ε_{i0} in V_p , die eine modifizierte Belastung darstellen. Das zugrunde liegende Feldproblem und somit die Werte ε_i^* und ρ_i an jeder Stelle der Struktur ergeben sich somit aus einer modifizierten elastischen Analyse (meA) des Bauteils mit den tatsächlichen Randbedingungen, aber ohne äußere Belastung. Voraussetzung ist, daß die Fließzone und damit die Abgrenzung zwischen V_e und V_p sowie in V_p die transformierten internen Variablen bekannt sind. Der elastisch-plastische Zustand ergibt sich dann aus Addition der fiktiv elastischen Analyse und der modifiziert elastischen Analyse.

Der Sinn der oben vorgenommenen Umformulierung liegt darin, daß eine Abschätzung gewisser Grenzzustände von Y_i einfacher ist als solche von $\varepsilon_i^{\text{pl}}$ direkt. Es erweist sich, daß das Feldproblem zur Bestimmung von Y_i gewissermaßen "entschärft" ist, wodurch brauchbare Abschätzungen von Y_i durch rein lokale Betrachtungen gelingen. Der eigentliche Inhalt der Vereinfachten Fließzonentheorie ist nun, möglichst gute Annahmen zur Abschätzung der plastischen Zone V_p zu treffen und in ihr solche Werte von Y_i abzuschätzen, die den tatsächlichen Werten möglichst nahe kommen. Mit diesen wird dann eine modifizierte elastische Analyse zur Lösung von Gl.(7) in der gesamten Struktur durchgeführt und anschließend mit der fiktiv elastischen Analyse superponiert.

Die Qualität der vorgenommenen Abschätzungen von V_p und Y_i kann dann überprüft und so gegebenenfalls iterativ verbessert werden. Überschreitet die Mises-Vergleichsspannung die Streckgrenze an einer Stelle der Struktur, die im (i)-ten Iterationsschritt dem als elastisch bleibend abgeschätzten Teilvolumen V_e zugewiesen worden war, so ist diese Stelle im nächsten, dem (i+1)-ten Iterationsschritt,

dem plastischen Teilvolumen V_p zuzuordnen. Umgekehrt ist bei einer Stelle zu verfahren, deren Vergleichsspannung sich nun entgegen der ursprünglichen Abschätzung als kleiner herausstellt als die Streckgrenze. Somit ist das Verfahren selbst-kontrollierend.

Eine Reihe von Beispielrechnungen zeigt, daß rasch Konvergenz erreicht wird. Nach etwa drei modifiziert elastischen Analysen liegt meist eine gute Näherung vor. Dies hängt entscheidend von der Wahl der transformierten internen Variablen Y_i in V_p in jedem Iterationsschritt ab, wozu es zwar einige kontinuumsmechanisch fundierte Argumente in Abhängigkeit davon gibt, ob monotone Belastung oder zyklische Belastung mit elastischem oder plastischem Einspielen untersucht wird. Letztendlich werden aber auch heuristische Argumente herangezogen. Hierin besteht der eigentliche Näherungscharakter der VFZT.

4. Abschätzung von V_p und Y_i bei zyklischer Belastung

Bedingt durch das zugrunde gelegte Werkstoffgesetz ist von vornherein bekannt, daß es bei zyklischer Belastung allenfalls zu finitem Ratcheting kommen kann, also nach einer gewissen Zahl von Belastungszyklen entweder elastisches oder plastisches Einspielen erreicht wird. Die Natur des Einspielzustandes ist dann unmittelbar aus den fiktiv elastisch berechneten Spannungen ermittelbar. Ist die fiktiv elastisch berechnete Mises-Vergleichsspannungsschwingbreite an keiner Stelle des Bauteils größer als die doppelte Streckgrenze (im folgenden wird davon ausgegangen, daß sich die Streckgrenze während des Belastungsprozesses nicht ändert), so kommt es zu (global) elastischem, sonst zu (global) plastischem Einspielen:

$$\Delta\sigma_v^{f,el} \begin{cases} \leq 2\sigma_y & \text{an jeder Stelle} \rightarrow \text{elastisches Einspielen} \\ > 2\sigma_y & \text{an min destens einer Stelle} \rightarrow \text{plastisches Einspielen} \end{cases} \quad (12)$$

4.1 Dehnungsschwingbreite

Die Auswirkung plastischen Verhaltens auf die Ermüdungsausnutzung eines Bauteils ist nur bei zyklischem Plastizieren von Interesse, also im Falle plastischen Einspielens (Gl.(12b) erfüllt). Es erscheint vernünftig, als eine erste Abschätzung der zyklisch plastisch beanspruchten Fließzone V_p anzunehmen, daß sie überall dort im Bauteil (Raumkoordinaten x,y,z) auftritt, wo die fiktiv elastisch berechnete Mises-Vergleichsspannungsschwingbreite die doppelte Streckgrenze überschreitet:

$$\Delta\sigma_{v(x,y,z)}^{f,el} \begin{cases} \leq 2\sigma_y & \rightarrow V_e \text{ (lokales elastisches Einspielen)} \\ > 2\sigma_y & \rightarrow V_p \text{ (lokales plastisches Einspielen)} \end{cases} \quad (13)$$

Spannungsumlagerungen werden so noch nicht erfaßt, sondern erst durch die später vorzunehmenden iterativen Verbesserungen. Im Bereich V_p ist nun die Schwingbreite der transformierten internen Variable Y_i abzuschätzen. Die Lage des Mises-Kreises im Y -Raum ist bei beiden extremalen Bela-

stungszuständen von vornherein bekannt, da die jeweiligen Kreismittelpunkte durch die zugehörigen fiktiv elastischen Spannungszustände gegeben sind (Bild 5).

Im folgenden soll radial zyklische Belastung betrachtet werden. Diese ist dadurch gekennzeichnet, daß sich an jeder Stelle der Struktur die fiktiv elastischen Spannungskomponenten im Verlauf eines Belastungszyklus proportional zueinander zwischen den beiden als minimal bzw. maximal bezeichneten extremalen Belastungszuständen ändern. So erreichen alle Stellen der Struktur gleichzeitig auch ihre extremalen Spannungszustände (fiktiv elastisch berechnet). Radial zyklische Belastung liegt etwa bei schwellendem Innendruck vor, oder beim Bree-Fall (konstanter Innendruck nebst zyklisch auftretender linearer Temperaturverteilung über die Wanddicke eines Rotationszylinders), aber beispielsweise nicht bei einer Belastung durch eine Temperaturtransiente. Für solche Fälle würde die folgende Vorgehensweise nur eine Näherung darstellen. Bei radialer zyklischer Belastung bewegen sich die Mittelpunkte des Mises-Kreises im Y-Raum auf einer Geraden (Bild 5).

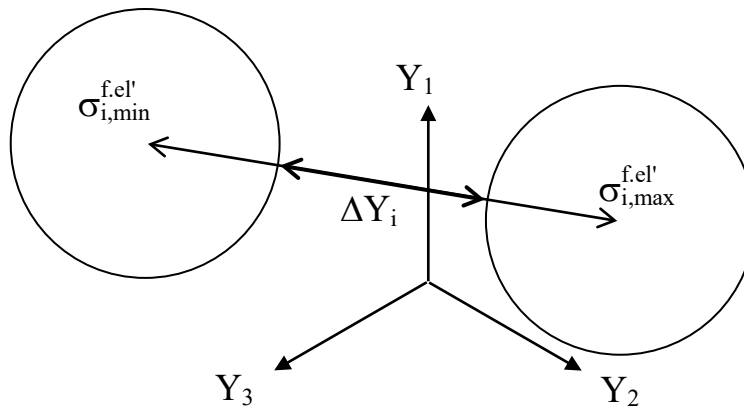


Bild 5: Raum der TIV bei zyklischem Plastizieren infolge radialer zyklischer Belastung; Space of the TIV in case of cyclic plasticity due to radial cyclic loading

Bei beiden extremalen Belastungszuständen muß Y_i auf dem Rand des jeweiligen Mises-Kreises liegen. Es wird nun angenommen, daß sich Y_i auf der kürzesten Verbindung zwischen den beiden Mises-Kreisen bewegt (Bild 5):

$$\Delta Y_i = \left(\sigma_{i,\max}^{f.el'} - \sigma_{i,\min}^{f.el'} \right) \left(1 - \frac{2\sigma_y}{\Delta\sigma_v^{f.el}} \right) \quad \text{in } V_p \quad (14)$$

Bei einachsigen Spannungszuständen und auch bei allen anderen plastischen Beanspruchungsprozessen, bei denen die Spannungskomponenten ihr Verhältnis zueinander nicht ändern (also wenn direktionale Umlagerungen ausgeschlossen sind), ist Gl.(14) exakt. Sonst stellt sie eine Näherung dar, die beispielsweise im Anlagenbau (im Gegensatz etwa zur Umformtechnik) zu ausreichender Genauigkeit führen dürfte, da direktionale Umlagerungen der Spannungskomponenten bei radialer zyklischer Belastung aufgrund der nur mäßig großen Dehnungsschwingbreiten (die die Größenordnung von 1% nicht wesentlich überschreiten) nicht stark ausgeprägt sein können. Zarka hat in [1, 2, 3] auch verbes-

serte Näherungen für ΔY_i entwickelt, wenn direktionale Umlagerungen wesentlich sein sollten (siehe auch [8]).

Mit den Werten für ΔY_i nach Gl.(14) können nun die Anfangsdehnungen nach Gl.(11) berechnet, diese als (einzige) Belastung im Bereich V_p (nach Gl.(13) identifiziert) auf das Bauteil aufgebracht und hierfür eine elastische Analyse (meA) mit nach Gl.(9) und (10) modifizierten elastischen Materialparametern in V_p durchgeführt werden. Die elastisch-plastischen Schwingbreiten ergeben sich dann aus Addition mit der Schwingbreite der fiktiv elastischen Analysen. Die so gewonnenen Ergebnisse können zu einer Neuidentifikation der Fließzone ($\Delta\sigma_{v(x,y,z)} > 2\sigma_y$) benutzt und die Ergebnisse so iterativ verbessert werden.

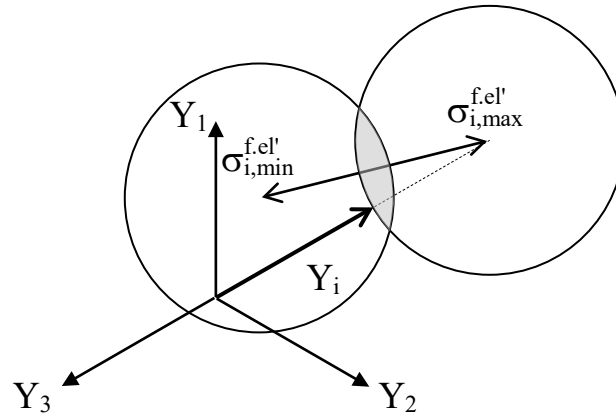
4.2 Dehnungsakkumulation bei elastischem Einspielen

Im Gegensatz zur inkrementellen Berechnung nach der „exakten“ Fließzonentheorie, bei der ein vorgegebenes Belastungshistogramm konsekutiv durchgerechnet werden muß, bis der Einspielzustand erreicht ist, wird bei der VFZT der Einspielzustand direkt angestrebt. Die Berechnung des Dehnungszustandes (und aller anderen interessierenden Größen) im Einspielzustand erfolgt mittels Annahmen für die Geometrie der Fließzone V_p und der transformierten internen Variable Y_i , die von der Natur des Einspielzustandes abhängen. Dieser ist nach Gl.(12) von vornherein bekannt.

Unter der Voraussetzung, daß bei dem als minimal bezeichneten Belastungszustand alleine kein Plastizieren auftritt, erfolgt die erste Abschätzung der Fließzone bei elastischem Einspielen allein aufgrund des fiktiv elastisch berechneten Spannungszustandes beim maximalen Belastungszustand:

$$\sigma_{v, \max(x, y, z)}^{f, el} \begin{cases} \leq \sigma_y \rightarrow V_e \\ > \sigma_y \rightarrow V_p \end{cases} \quad (15)$$

Die transformierte interne Variable Y_i muß für die Stellen im Teilvolumen V_p folgende Bedingungen erfüllen: (1) wegen elastischen Einspielens muß Y_i konstant sein, (2) Y_i muß im Y-Raum beim minimalen Belastungszustand innerhalb des Mises-Kreises liegen, (3) Y_i muß im Y-Raum beim maximalen Belastungszustand irgendwo auf dem Rand des zugehörigen Mises-Kreises liegen. Wird zunächst die direktionale Spannungsumlagerung vernachlässigt, erscheint die Annahme vernünftig (und kann erforderlichenfalls später iterativ verbessert werden), daß Y_i vom anfänglichen Wert beim minimalen Belastungszustand im Koordinatenursprung den kürzesten Weg zum Mises-Kreis des maximalen Belastungszustandes nimmt (Bild 6).



**Bild 6: Raum der TIV bei elastischem Einspielen infolge radialer zyklischer Belastung;
Space of the TIV in case of elastic shakedown due to radial cyclic loading**

Y_i ergibt sich somit durch Projektion des Koordinatenursprungs auf den grau unterlegten Bereich in Bild 6. Falls dies identisch ist mit der Projektion auf den Mises-Kreis des maximalen Belastungszustandes, gilt Gl.(16), sonst wird Y_i durch die nächstgelegene Ecke des markierten Bereiches bestimmt.

$$Y_i = \sigma_{i,\max}^{f.el'} \left(1 - \frac{\sigma_y}{\sigma_{v,\max}^{f.el'}} \right) \text{ in } V_p \quad (16)$$

Nun wird eine modifizierte elastische Analyse durchgeführt, bei der in V_p die sich aus Y_i ergebenden Anfangsdehnungen als Belastung aufgebracht und die elastischen Materialparameter nach Gl.(9) und (10) geändert werden. Nach jeweiliger Addition mit den fiktiv elastischen Analysen des minimalen bzw. maximalen Belastungszustandes können die jeweiligen elastisch-plastischen Beanspruchungszustände ermittelt und sodann überprüft werden, ob V_p und Y_i zutreffend bestimmt worden sind. Gegebenenfalls kann eine iterative Verbesserung vorgenommen werden, deren detaillierte Vorgehensweise [6] entnommen werden kann.

4.3 Dehnungsakkumulation bei plastischem Einspielen

Wenn mit Gl. (12) festgestellt wurde, daß plastisches Einspielen auftreten wird, und wenn bereits eine Berechnung der elastisch-plastischen Dehnschwingbreite nach Abschnitt 4.1 vorliegt, kann zur Berechnung der akkumulierten Dehnungen folgende Vorgehensweise eingeschlagen werden.

Berechnet wird der mittlere Belastungszustand. Die Definition von V_p folgt zunächst einmal Gl.(13), wonach nur die lokal plastisch einspielenden Stellen der Fließzone V_p zugewiesen werden. Dort wird der mittlere Zustand der transformierten internen Variable durch arithmetische Mittelung zwischen den beiden Mises-Kreises im Y-Raum angenähert:

$$Y_{i,m} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{i,\min}^{f.el'} + \sigma_{i,\max}^{f.el'} \right) \quad (17)$$

Hiermit wird eine modifizierte elastische Analyse durchgeführt und durch Addition bzw. Subtraktion der halben Schwingbreite (nach Abschnitt 4.1) die Ergebnisse bei maximalem und minimalem Belastungszustand ermittelt. Meist wird sich hierbei herausstellen, daß in weiteren Teilen der Struktur (also an lokal elastisch einspielenden Stellen) die Vergleichsspannung bei entweder dem einen oder dem anderen extremalen Belastungszustand die Streckgrenze überschreitet. Diese Stellen werden im Zuge der weiteren iterativen Verbesserung ebenfalls der Fließzone V_p zugewiesen und dort die mittleren Y_i -Werte durch geeignete Projektionen auf die Mises-Kreise im Y -Raum gefunden. Details hierzu können [6] entnommen werden.

5. Beispiele zur Ermittlung der elastisch-plastischen Dehnschwingbreite

Die mit der Vereinfachten Fließzonentheorie erreichte Ergebnisqualität zur Ermittlung der elastisch-plastischen Dehnschwingbreite (bzw. des plastischen Dehnungserhöhungsfaktors K_e) und der erforderliche Berechnungsaufwand sollen anhand einiger Beispiele mit „exakten“ Analysen verglichen werden. Bei einigen einfachen Strukturen ist sowohl für die „exakte“ wie für die Vereinfachte Fließzonentheorie eine Berechnung von Hand möglich. Für andere wurde das Finite Elemente Programm ANSYS herangezogen. Für die VFZT wurde hierzu ein entsprechendes Unterprogramm entwickelt [10]. Bei allen folgenden Beispielen wird mit linearer kinematischer Verfestigung gerechnet.

5.1 Zweistab-Modell (hintereinandergeschaltet)

Zwei Stäbe unterschiedlicher Querschnitte und Länge (Stab 1: A_1 , l_1 ; Stab 2: A_2 , l_2), aber gleichen Werkstoffes, werden so miteinander verbunden, daß sie nur Normalkräfte übertragen (Bild 7). Kerbwirkungen an der Stelle des Querschnitts-Überganges werden vernachlässigt. Als Belastung wird eine zyklische Verschiebung Δu aufgebracht. Gesucht wird der Faktor K_e im höher beanspruchten Stab 2.

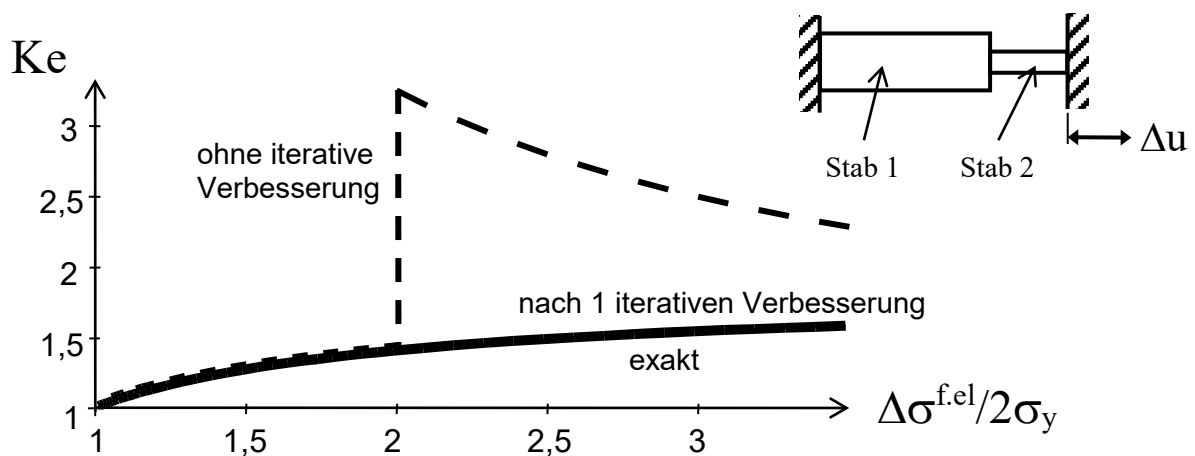


Bild 7: Plastischer Dehnungserhöhungsfaktor K_e für das Zweistab-Modell ($A_1/A_2=2$; $l_1/l_2=2$; $E_t/E=0,1$);
 Plastic strain range enhancement factor K_e for a two-bar model ($A_1/A_2=2$; $l_1/l_2=2$; $E_t/E=0.1$)

Die Berechnung nach der VFZT ist detailliert in [8, Kapitel 6 zur Zarka-Methode] beschrieben. Für bestimmte Geometrie- und Werkstoffdaten ergibt sich beispielsweise die in Bild 7 dargestellte Lösung. Man erkennt, daß die VFZT je nach Belastungsniveau die exakte Lösung sofort liefert (d.h. ohne daß eine iterative Verbesserung erforderlich wäre, also mit nur einer einzigen modifiziert elastischen Analyse), bzw. allenfalls eine iterative Verbesserung erforderlich ist, wenn nämlich die Fließzone durch Gl.(13) zunächst falsch eingeschätzt wird.

5.2 Ebener Spannungszustand

Es wird ein ebener Spannungszustand mit zyklischer dehnungsgesteuerter Belastung in die beiden anderen Richtungen untersucht (Bild 8).

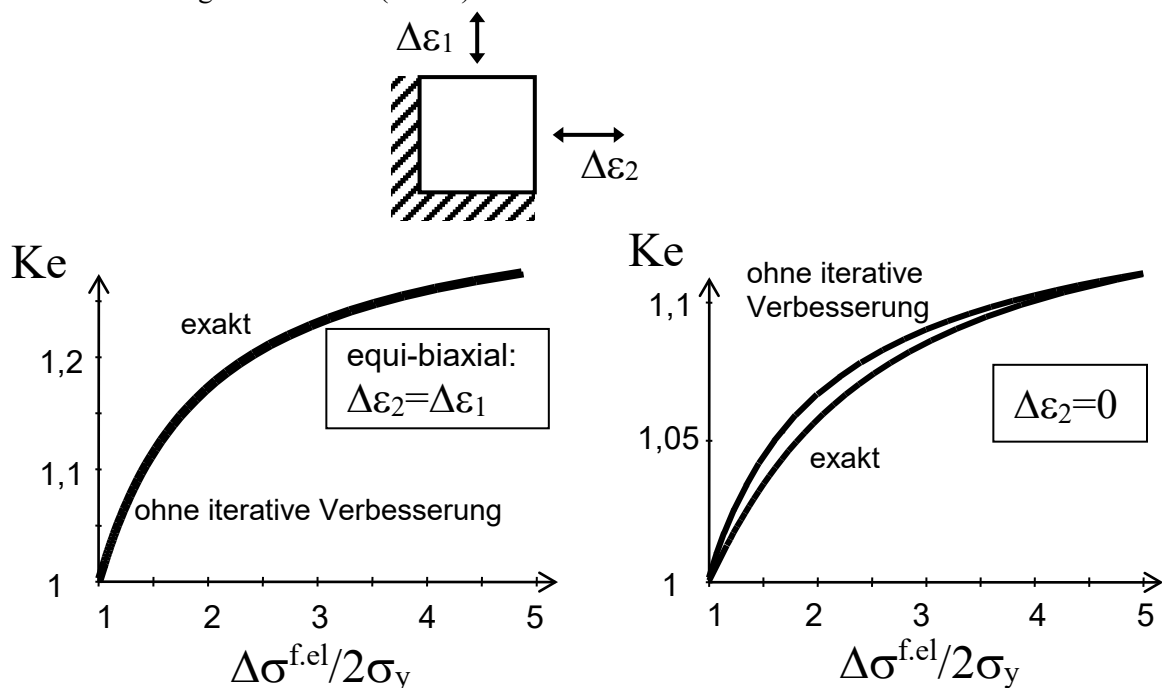
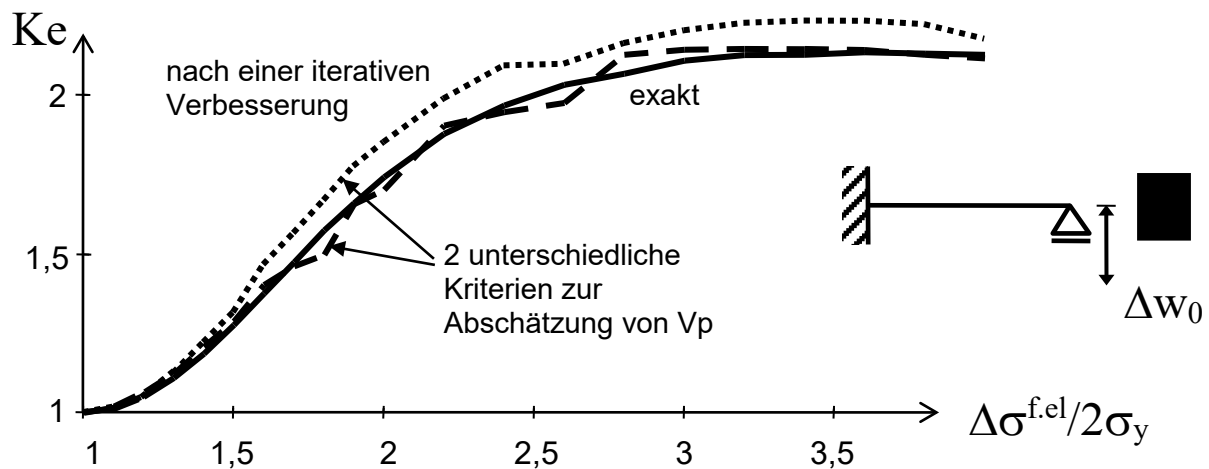


Bild 8: Plastischer Dehnungserhöhungsfaktor Ke beim ebenen Spannungszustand ($E_t/E=0,1$); Plastic strain range enhancement factor Ke in plane stress conditions ($E_t/E=0.1$)

Der equi-biaxiale Fall ($\Delta\varepsilon_2 = \Delta\varepsilon_1$) entspricht einem Rohr unter zyklischem radialen Temperaturgradienten, bei dem die plastische Dehnungserhöhung nur durch die unterschiedliche Querdehnzahl im Elastischen (hier: $\nu=0,3$) und im Plastischen ($\nu^{pl}=0,5$ wegen Inkompressibilität) hervorgerufen wird. Die VFZT liefert hierfür das exakte Ergebnis, ohne daß eine iterative Verbesserung vorgenommen werden müßte, also mit nur einer meA (Bild 8 links). In anderen Fällen (beispielsweise verhinderte Dehnung in eine Richtung, $\Delta\varepsilon_2=0$) ergeben sich geringfügige Unterschiede der VFZT gegenüber der exakten Lösung, die auch nicht durch iterative Verbesserungen beseitigt werden können (Bild 8 rechts). Der Grund hierfür liegt darin, daß hier direktionale Spannungsumlagerungen stattfinden, die durch die VFZT nur näherungsweise erfaßt werden. Die ausführlichen Berechnungen können [8] entnommen werden.

5.3 Kragarm mit Rechteckprofil

Ein Kragarm mit vollem Rechteckquerschnitt (mit idealem I-Profil siehe [8]) wird einer weggesteuerten Belastung unterworfen (Bild 9). In [8] wurde hierfür mit der VFZT eine analytische Lösung für elastisch-ideal plastisches Werkstoffverhalten ($E_t/E=0$) gewonnen und die Veränderung der Fließzone im Verlauf der Iterationen dargestellt. Bild 9 zeigt Ergebnisse, die mit der Finite Elemente Methode für den Verfestigungsparameter $E_t/E=0,1$ gewonnen wurden. Hierzu wurden mehrere Berechnungsvarianten in das Finite Elemente Programm ANSYS unter Nutzung der ANSYS-Parametersprache implementiert, die sich beispielsweise in der Entscheidungsstrategie unterscheiden, ob ein Element zur Fließzone gezählt wird oder nicht.



**Bild 9: Plastischer Dehnungserhöhungsfaktor K_e beim Kragarm unter weggesteuerter Belastung ($E_t/E=0,1$);
Plastic strain range enhancement factor K_e for cantilever beam under displacement controlled loading ($E_t/E=0.1$)**

Man sieht, daß nach lediglich einer iterativen Verbesserung, also zwei meA , bei beiden Varianten eine gute Annäherung an die exakten Ergebnisse gewonnen wurde.

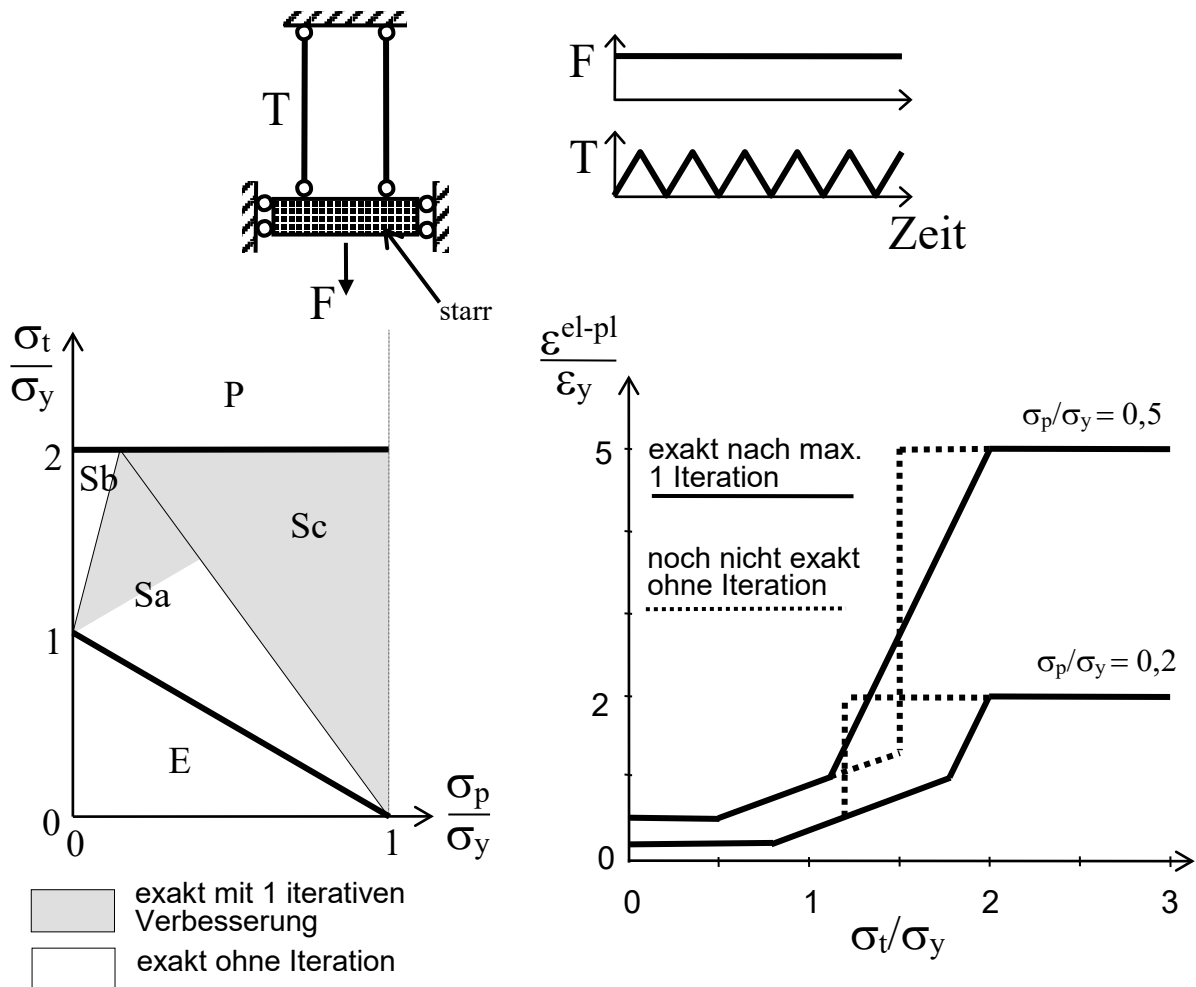
6. Beispiele zur Ermittlung der akkumulierten elastisch-plastischen Dehnungen

Im folgenden werden einige Beispiele dargestellt, aus denen die Ergebnisqualität und der erforderliche Berechnungsaufwand der VFZT zur Ermittlung der elastisch-plastischen akkumulierten Dehnungen im elastischen bzw. plastischen Einspielzustand hervorgeht. Es wird lineare kinematische Verfestigung angenommen.

6.1 Zweistab-Modell (parallelgeschaltet)

Zwei Stäbe gleichen Querschnitts, gleicher Länge und gleichen Werkstoffes werden so durch einen starren Körper miteinander verbunden, daß sie stets gleich lang sind (Bild 10). Es wirkt eine konstante

Kraft F (die die Primärspannung σ_p hervorruft) und in einem Stab eine zyklische Änderung der Temperatur T (wodurch die fiktiv elastische Sekundärspannung σ_t hervorgerufen wird).



**Bild 10: Plastische Dehnungsakkumulation bei Zweistab-Modell ($E_t/E=0,1$);
Accumulation of plastic strain for two-bar-model ($E_t/E=0.1$)**

Das Ratcheting-Interaktionsdiagramm in Bild 10 (links unten) zeigt an, bei welchen Belastungskombinationen der Primär- und der Sekundärspannung rein elastisches Verhalten (E), elastisches Einspielen mit jeweils unterschiedlichen Verhaltensweisen der Stäbe in den Bereichen Sa, Sb und Sc bzw. plastisches Einspielen (P) stattfindet. Die akkumulierten Dehnungen können in den Bereichen Sb, Sc und P sehr groß werden. Rechts unten in Bild 10 sind die elastisch-plastischen Dehnungen in beiden Stäben nach dem Einspielen beim minimalen Belastungszustand ($T=0$) dargestellt. Die Berechnungsdetails der VFZT können [6] entnommen werden (dort wurde dieselbe Struktur auch mit trilinearem Werkstoffmodell berechnet).

Mit der VFZT wird das exakte Ergebnis in manchen Belastungsbereichen ohne Iteration, in anderen spätestens nach einer iterativen Verbesserung erreicht. Der Berechnungsaufwand besteht also lediglich aus höchstens zwei modifiziert elastischen Analysen. Dagegen sind nach der inkrementellen

Berechnungsmethode je nach Belastungskombination und Verfestigungsparameter E_t/E u.U. Tausende von Belastungszyklen erforderlich (siehe Bild 2 für $E_t/E=0,001$; $\sigma_p/\sigma_y=0,5$; $\sigma_t/\sigma_y=1,25$), was infolge der jeweiligen Gleichgewichtsiterationen einem Berechnungsaufwand von einigen 10.000 elastischen Analysen entspricht.

6.2 Ebener Spannungszustand

Bei einem ebenen Spannungszustand wird in einer Richtung eine konstant anstehende Spannung vorgegeben (Primärspannung σ_p), in die andere eine zyklische Dehnung, die die fiktiv elastisch berechnete Sekundärspannung σ_t hervorruft (Bild 11). Dies führt zu einer bestimmten Art von Material-Ratcheting [7].

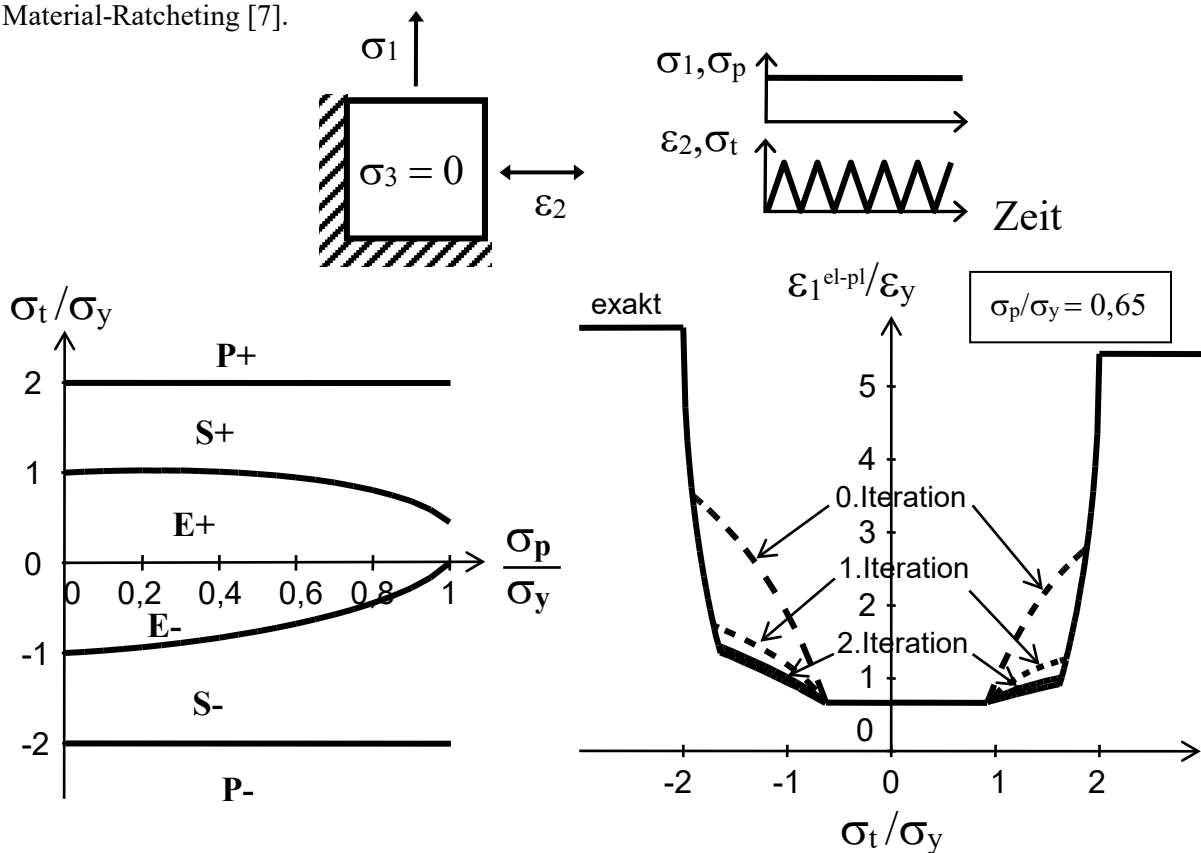


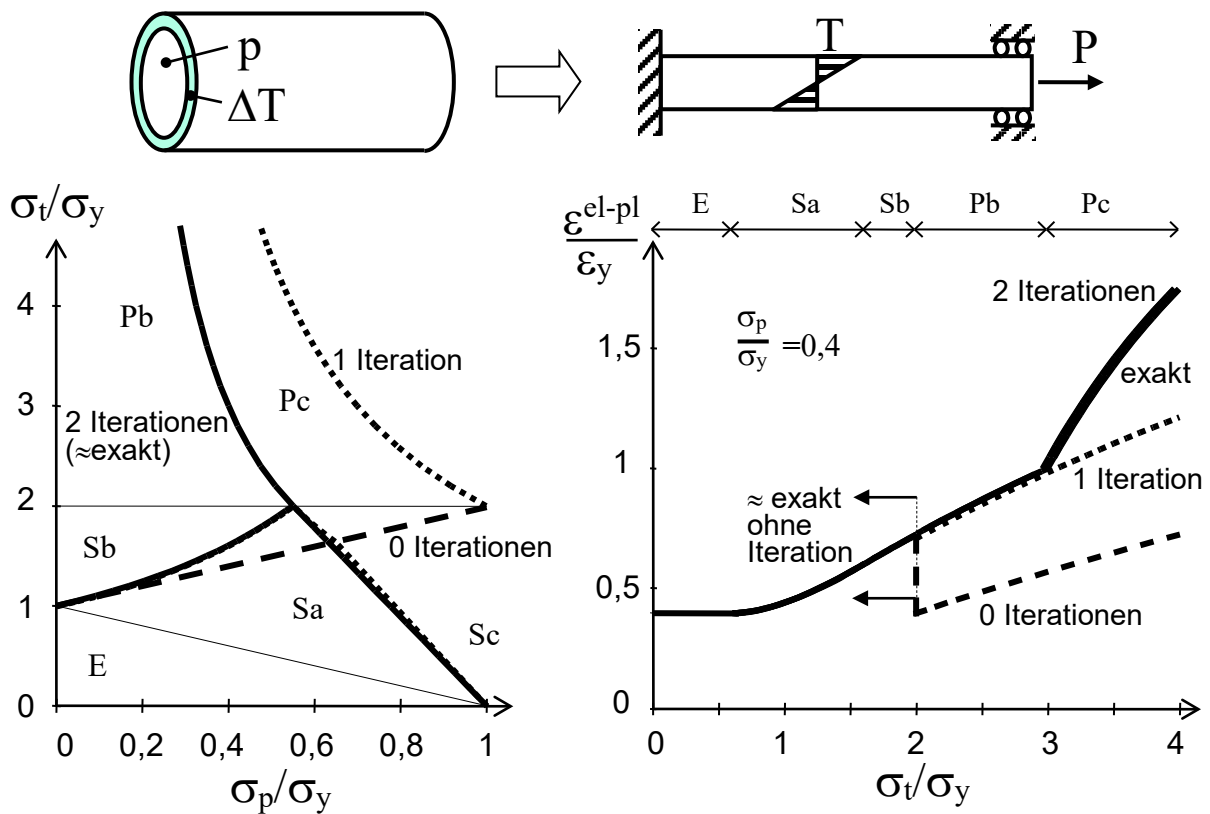
Bild 11: Plastische Dehnungsakkumulation bei ebenem Spannungszustand ($E_t/E=0,1$; $\nu=0,3$); Accumulation of plastic strain for plane stress condition ($E_t/E=0,1$; $\nu=0,3$)

Bild 11 zeigt das Ratcheting-Interaktionsdiagramm für $\nu=0,3$ (mit den elastischen, elastisch einspielenden und plastisch einspielenden Belastungsbereichen E, S und P jeweils für Zug und Druck) sowie die akkumulierte elastisch-plastische Dehnung in Richtung der Primärspannung für den Einspielzustand beim minimalen Belastungszustand ($\sigma_t=0$) für ein bestimmtes Niveau der Primärspannung. Bedingt durch directionale Spannungsumlagerungen sind bei der VFZT mehrere iterative Verbesserungen notwendig. Nach der zweiten Iteration (also nach drei meA) gibt es nur noch sehr geringe Unterschiede zur exakten Lösung. Für diese müssen je nach Belastungsniveau und Werkstoffparame-

tern teilweise Tausende von Belastungszyklen durchfahren werden. Zum Berechnungsablauf nach der VFZT und für andere Primärspannungsniveaus oder Querdehnzahlen siehe [6].

6.3 Bree-Fall

Der Bree-Fall besitzt eine große Bedeutung, weil er eine Grundlage für Ratcheting-Nachweise in Regelwerken darstellt (z.B. KTA 3201.2). Ihm liegt ein dünnwandiges gerades Rohr unter konstantem Innendruck und zyklischem radialen Temperaturgradienten (lineare Temperaturverteilung über die Wanddicke) zugrunde. Bree hat in [9] diesen Fall durch einen Balken unter Normalkraft (die die konstante Primärspannung σ_p hervorruft) und linearer Temperaturverteilung über die Balkenhöhe (wodurch die zyklische Sekundärspannung σ_t erzeugt wird) angenähert (Bild 12) und dessen Verhalten bei linear elastisch - ideal plastischem Werkstoffverhalten untersucht. In Bild 12 ist sein Verhalten nach Berechnungen mit der VFZT bei linearer kinematischer Verfestigung dargestellt. Die Berechnungsdetails können [6] entnommen werden.



**Bild 12: Plastische Dehnungsakkumulation beim Bree-Fall ($E_t/E=0,1$);
Accumulation of plastic strain for Bree-model ($E_t/E=0.1$)**

Das Ratcheting-Interaktionsdiagramm zeigt, daß drei Belastungsbereiche Sa, Sb und Sc existieren, die alle zu elastischem Einspielen führen, deren Endzustand jedoch durch unterschiedliches Verhalten gekennzeichnet ist. Ähnlich gibt es zwei Belastungsbereiche mit unterschiedlichem plastischen Einspielverhalten (Pb und Pc). In den Bereichen Sc und Pc können die akkumulierten Dehnungen sehr

groß werden. Bei der VFZT sind bis zu zwei iterative Verbesserungen erforderlich (also drei meA), um den richtigen Einspielmechanismus zu finden. Die gleiche Feststellung gilt für die akkumulierten elastisch-plastischen Dehnungen des einachsigen Ersatzmodells von Bree im Einspielzustand. Auch hier sind je nach Belastungskombination und Werkstoffparametern bei der exakten Analyse wieder u.U. Tausende von Belastungszyklen zu durchfahren, bis der Einspielzustand erreicht ist.

7. Schrifttum

- [1] Zarka,J., Frelat,J., Inglebert,G. and Kasmai-Navidi,P: A new Approach in Inelastic Analysis of Structures, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1988 bzw. 1990
- [2] Zarka,J., Engel,J.J. and Inglebert,G.: On a Simplified Inelastic Analysis of Structures, Nuclear Engineering and Design **57** (1980), pp 333-368
- [3] Zarka,J.: Simplified Analysis of Inelastic Structures, CISM Seminar A.Sawczuk in Memoriam "Simplified Analysis of Inelastic Structures Subjected to Statical or Dynamical Loadings", Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1985
- [4] Zarka,J.: Direct Analysis of Elastic-Plastic Structures with 'Overlay' Materials during Cyclic Loading, Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol.15, pp 225-235 (1989)
- [5] Maier,G., Comi.,C., Corigliani,A., Perego,U. and Hübel,H.: Bounds and estimates on inelastic deformations, Commission of the European Communities, contract RA1-0162-I and RA1-0168-D, EUR 16555 EN, 1992
- [6] Hübel,H.: Berechnung akkumulierter Dehnungen nach der Vereinfachten Fließzonentheorie auf der Grundlage der Zarka-Methode bei zyklischer Belastung (Ratcheting-Nachweis); Bericht für das BMU, Februar 1999 (Vorhaben SR 2226 und SR 2298)
- [7] Hübel,H.: Basic conditions for material and structural ratcheting, Nuclear Engineering and Design 162 (1996) 55-65 (siehe auch "Ratcheting Phenomena", SMiRT 12, paper L08/1, 1993)
- [8] Hübel,H.: Ermittlung realistischer Ke-Faktoren (Plastizierungsfaktoren) als Grundlage für die Präzisierung des kerntechnischen Regelwerkes hinsichtlich der Ermüdungsanalyse; Schriftenreihe "Reaktorsicherheit und Strahlenschutz" des BMU, BMU-1997-481, August 1996 (Vorhaben SR 2221)
- [9] Bree,J.: Elastic-plastic behaviour of thin tubes subjected to internal pressure and intermittent high-heat fluxes with application to fast-nuclear-reactor fuel elements, J. Strain Analysis, Vol.2, No. 3, 1967, pp 226-238
- [10] Hübel,H.: Vereinfachte Fließzonentheorie mit ANSYS, 17. CAD-FEM Users' Meeting, 6.-8. Oktober 1999, Sonthofen