

**Prof. Dr.-Ing. H. Hübel**

Anwendung der Vereinfachten Fließzonentheorie auf der  
Grundlage der Zarka-Methode mit einem  
Finite-Elemente-Programm

- Teil I -

Abschlußdatum: Dezember 1999

Autor: Hübel, Hartwig

Anmerkung:

Dieser Bericht wurde von Prof. Dr.-Ing. H. Hübel im Auftrag des Bundesministeriums für Umwelt, Naturschutz und Reaktorsicherheit als Unterauftrag im Rahmen des Vorhabens SR 2298 erstellt. Die Verantwortung für den Inhalt liegt jedoch allein beim Auftragnehmer. Der Eigentümer behält sich alle Rechte vor. Insbesondere darf dieser Bericht nur mit Zustimmung des Auftraggebers/Zuwendungsgebers zitiert, ganz oder teilweise vervielfältigt bzw. Dritten zugänglich gemacht werden.

Dieser Bericht gibt die Meinung und Auffassung des Auftragnehmers wieder und muß nicht mit der Meinung des auftraggebenden Bundesministeriums für Umwelt, Naturschutz und Reaktorsicherheit übereinstimmen.



## **Kurzfassung**

Die Vereinfachte Fließzonentheorie dient der Berechnung der elastisch-plastischen Beanspruchungen einer Struktur infolge monotoner oder zyklischer Belastung auf der Basis der Zarka-Methode. Sie wurde bereits in den Vorhaben SR 2221, SR 2226 und in früheren Unteraufträgen zum Vorhaben SR 2298 vorgestellt und ihre Leistungsfähigkeit durch umfangreiche Beispielrechnungen relativ einfacher Strukturen mittels Handrechnung belegt. Für realistische und somit kompliziertere Konfigurationen von Bauteilgeometrie und Belastung ist dagegen eine Implementierung der Vereinfachten Fließzonentheorie in ein Finite-Elemente-Programm erforderlich. Dies setzt eine Anpassung der Theorie an diskrete anstelle kontinuierlicher Systeme voraus. Das anzuwendende Finite-Elemente-Programm muß bestimmte Anforderungen erfüllen, um eine Implementierung zu gestatten. Anhand beispielhafter Anwendungen wird in Teil I des Vorhabens gezeigt, daß die Vereinfachte Fließzonentheorie auch auf Finite-Elemente-Modelle anwendbar ist. In Teil II sollte dann untersucht werden, ob sie auch bei realistischen Strukturen geeignet ist, mit relativ geringem Berechnungsaufwand die elastisch-plastische Dehnungsschwingbreite (zur Berechnung der Ermüdungsausnutzung) und die akkumulierte Dehnung im Einspielzustand (für einen Ratcheting-Nachweis) in guter Näherung bei geringem Berechnungsaufwand zu bestimmen. Dieser Teil wurde jedoch durch das BMU nicht mehr in Auftrag gegeben.

## **Abstract**

The simplified theory of plastic zones aims at determining the elastic-plastic stresses and strains in a structure subjected to monotonic or cyclic loading. It is based on Zarka's method and was presented in previous contracts SR 2221, SR 2226 and in earlier subcontracts to SR 2298. Its performance was demonstrated by several examples of relatively simple structures which could be analysed by hand calculation. For analysing more realistic and thus more complicated configurations of geometry and loading, the simplified theory of plastic zones needs to be implemented into a finite element program. For this purpose it is required to adapt the theory to discrete instead of continuous systems. The finite element program to be used must satisfy specific requirements. In part I of the present contract the simplified theory of plastic zones is applied to some examples to demonstrate that it is applicable in a finite element environment. In part II its suitability for approximating the elastic plastic strain range (required for fatigue assessment) and the accumulated strain (required for ratcheting assessment) under realistic conditions with little computational effort should be investigated. However, this part was not supported by the BMU.



## Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>2. Grundgedanke der Vereinfachten Fließzonentheorie</b>	<b>9</b>
2.1 Werkstoffgesetz	9
2.2 Belastung	10
2.3 Theorie	11
2.4 Bisher berechnete Strukturen	14
<b>3. Implementierung der VFZT in Finite-Elemente-Programme</b>	<b>17</b>
3.1 VFZT bei diskreten Strukturen	17
3.2 Anforderungen an das FE-Programm	19
3.3 Ablaufplan	20
3.4 Implementierung in ANSYS	22
<b>4. Anwendung der VFZT auf einfache Strukturen</b>	<b>25</b>
4.1 Zweistab-Modell (hintereinander) hinsichtlich Dehnschwingbreite	26
4.2 Ebener Spannungszustand hinsichtlich Dehnschwingbreite	29
4.3 Zweistab-Modell (parallel) hinsichtlich Dehnungsakkumulation	31
4.4 Ebener Spannungszustand hinsichtlich Dehnungsakkumulation	34
<b>5. Anwendung der VFZT auf realistische Strukturen</b>	<b>37</b>
<b>6. Schrifttum</b>	<b>38</b>



## **1. Einleitung**

Die Vereinfachte Fließzonentheorie (VFZT) dient zur Berechnung der elastisch-plastischen Beanspruchungen einer Struktur infolge monotoner oder zyklischer Belastung. Sie beruht auf der Zarka-Methode. Ihre theoretischen Grundlagen wurden bereits in den Vorhaben SR 2221, SR 2226 und SR 2298 ([1], [2]) vorgestellt und ausführlich diskutiert. Dort wurden auch umfangreiche Beispielrechnungen an relativ einfachen Strukturen mittels Handrechnung durchgeführt. Es zeigte sich, daß mit geringem Berechnungsaufwand (nämlich wenigen elastischen Analysen und einigen „lokalen“ Berechnungen) die Spannungs- und Dehnungskomponenten sowie die Verformung an jeder Stelle der Struktur in sehr guter Näherung bestimmt werden kann.

Dies gilt nicht nur für den maximalen Belastungszustand bei monotoner Belastung, sondern auch für den Einspielzustand bei zyklischer Belastung, der für die physikalische Lebensdauer des Bauteils maßgebend ist. Hierfür wird sowohl die elastisch-plastische Dehnungsschwingbreite berechnet, die für einen Ermüdungsnachweis benötigt wird, als auch die zyklisch akkumulierte elastisch-plastische Dehnung, die für den Ratcheting-Nachweis durch Begrenzung der Dehnungen nach einigen KTA-Regeln erforderlich ist (z.B. [3]). Ferner werden auch die zugehörigen Verformungen berechnet, die bestimmend sein können für die funktionale Lebensdauer eines Bauteils, wenn infolge Ratcheting etwa Undichtigkeiten von Flanschverbindungen auftreten. Bei herkömmlichen Berechnungen nach der exakten Fließzonentheorie müssen in solchen Fällen oft hunderte oder gar Tausende von Belastungszyklen inkrementell durchgerechnet werden, was wegen der jeweils erforderlichen Gleichgewichtsiterationen leicht einem Berechnungsaufwand von einigen zig-tausend elastischen Analysen entsprechen kann. Dagegen genügen bei der Vereinfachten Fließzonentheorie meist wenige linear elastische Analysen, bei denen in spezieller Weise jeweils die elastischen Materialdaten und die Belastung iterativ modifiziert werden.

Für realistische und somit kompliziertere Konfigurationen von Bauteilgeometrie und Belastung ist eine Implementierung der Vereinfachten Fließzonentheorie in ein Finite-Elemente-Programm erforderlich. Dabei ist zu beachten, daß die VFZT bei Anwendung auf diskrete anstelle kontinuierlicher Systeme gewisser Anpassungen bedarf. Ferner muß das Finite-Elemente-Programm bestimmte Anforderungen erfüllen, damit die Modifikation der elastischen Materialdaten sowie das Aufbringen der speziell erforderlichen Belastungen überhaupt vorgenommen werden kann.

Anhand beispielhafter Anwendungen auf einige einfache Systeme wird in Teil I gezeigt, daß die Vereinfachte Fließzonentheorie prinzipiell auch auf Finite-Elemente-Modelle anwendbar ist. Die Vereinfachte Fließzonentheorie sollte dann in Teil II auch auf eine realistische

Struktur angewendet werden, um beispielhaft zu prüfen, ob sie auch geeignet ist, in praktischen Anwendungsfällen und somit bei komplizierteren Konfigurationen von Bauteilgeometrie und Belastung mit relativ geringem Berechnungsaufwand die elastisch-plastische Dehnungsschwingbreite, die akkumulierte elastisch-plastische Dehnung im Einspielzustand und die Verformung in guter Näherung zu bestimmen. Dieser Teil II wurde durch das BMU jedoch nicht mehr beauftragt.

## **2. Grundgedanke der Vereinfachten Fließzonentheorie**

Die Theorie der Vereinfachten Fließzonentheorie auf der Grundlage der Zarka-Methode wurde bereits in [1] (zur Berechnung der elastisch-plastischen Dehnschwingbreite bei zyklischer Belastung), in [2] (zur Berechnung der elastisch-plastischen akkumulierten Dehnungen bei zyklischer Belastung) und in [4] (bei monotoner Belastung) ausführlich dokumentiert, kritisch kommentiert und durch Beispielrechnungen erläutert. Diese Darstellungen bezogen sich alle auf kontinuierliche Strukturen, bei denen also alle gewünschten Daten (Materialdaten, Spannungskomponenten usw.) an jeder beliebigen Stelle der Struktur mit den Raumkoordinaten  $x, y, z$  vorliegen.

Der folgende kurze Abriß der Theorie der VFZT gilt für solche kontinuierlichen Strukturen. Es wird nur zyklische Belastung betrachtet. Es soll dabei genügen, die Berechnung der Dehnschwingbreite darzustellen. Die Berechnung der akkumulierten Dehnungen erfolgt in ähnlicher Weise, jedoch getrennt hiervon.

Besonderheiten, die bei diskreten Strukturen (z.B. Finite Elemente Modelle) zu beachten sind, werden in Abschnitt 3.1 behandelt.

### **2.1 Werkstoffgesetz**

An das Werkstoffgesetz werden bestimmte Anforderungen gestellt. So muß eine Fließfläche existieren. Im folgenden wird von einer Mises-Fließfläche ausgegangen. Kinematische Verfestigung kann (und muß sogar bei numerischer Berechnung) berücksichtigt werden durch eine multilineare Beschreibung, die als einfachsten Sonderfall lineare kinematische Verfestigung (bilineares Spannungs-Dehnungs-Diagramm) enthält, was im folgenden zugrunde gelegt wird (*Abbildung 1*). Zur Theorie und beispielhaften Anwendung bei trilinearem Spannungs-Dehnungs-Diagramm siehe [2]. Isotrope Verfestigung kann nicht direkt berücksichtigt werden, lediglich indirekt durch geeignete Wahl der Streckgrenze. Alle elastischen und plastischen Materialdaten - mit Ausnahme der Streckgrenze - müssen während des plastischen Prozesses konstant bleiben, dürfen also etwa bei thermischer Belastung nicht von der Temperatur abhängen (dagegen dürfen sie ortsabhängig sein).

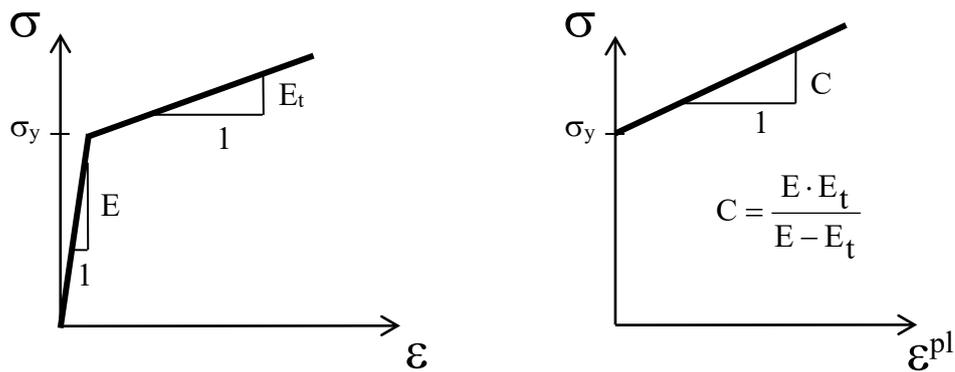


Abbildung 1: Spannungs-Dehnungs-Diagramm

Damit lassen sich nicht alle möglichen Ursachen für Material-Ratcheting erfassen. Von den in [7] aufgeführten Ursachen lassen sich so die Zunahme der Mitteldehnung infolge isotroper Verfestigung sowie infolge eines Mittelspannungseinflusses und infolge von temperature history effects nicht erfassen. Sofern diese Material-Effekte überhaupt auftreten, was nach Kenntnis des Autors für die beiden zuletzt genannten experimentell nicht hinreichend abgesichert und schon gar nicht quantifiziert ist, sind andere Materialmodelle heranzuziehen (z.B. nach Mroz, Chaboche, Ohno-Wang), die nicht direkt als Grundlage für die Vereinfachte Fließzonen­theorie dienen können. Indirekt könnten die in diesen Modellen auftretenden bounding surfaces dadurch simuliert werden, daß der letzte Ast eines multilinearen Spannungs-Dehnungs-Diagramms keine Verfestigung mehr aufweist ( $E_t=0$ ). Da die VFZT aus numerischen Gründen jedoch bei  $E_t=0$ , also in diesem Ast des Spannungs-Dehnungs-Diagramms, nicht angewendet werden kann, wäre dann mit der VFZT nachzuweisen, daß dieser Ast gar nicht aktiviert wird, also daß der Einspielzustand schon vorher erreicht wird.

## 2.2 Belastung

Es wird im folgenden davon ausgegangen, daß die zyklische Belastung „radial zyklisch“ ist. Dies bedeutet, daß die Belastung zwischen nur zwei extremalen Belastungszuständen („maximaler“ und „minimaler“ Belastungszustand genannt) variiert, und daß sich die fiktiv elastisch berechneten Spannungskomponenten während des gesamten Belastungszyklus stets proportional zueinander ändern.

Radiale zyklische Belastung ist etwa beim Bree-Fall gegeben, der die Grundlage für viele vereinfachte Methoden zur Ratcheting-Beurteilung darstellt, und auch dem KTA-Regelwerk zugrunde liegt. Dabei wird ein prismatisches Rohr unter konstantem Innendruck betrachtet, das einem zyklischen radialen Temperaturgradienten unterworfen ist. D.h., es liegt eine Temperaturverteilung vor, deren Form unveränderlich ist (z.B. linear über die Wanddicke), so daß die Temperaturen zeitlich mit einer ortsunabhängigen Funktion variieren. Hier wird also der Temperaturgradient direkt als Belastung aufgebracht.

Anders ist es, wenn die Belastung aus einer Temperaturtransiente besteht, die während ihres Ablaufes radiale Temperaturgradienten unterschiedlicher Form hervorruft, und insbesondere, wenn das Rohr nicht prismatisch ist, sondern etwa ein Wanddickenübergang vorliegt, bei dem auch axiale Temperaturgradienten entstehen, deren zeitlicher Auf- und Abbau gegenüber den radialen Temperaturgradienten phasenversetzt erfolgt. In solchen Fällen tritt zu den anderen Näherungen der VFZT (in seinem hier behandelten Entwicklungsstadium) noch die Näherung der „künstlichen“ Radialisierung der eigentlich nichtradialen zyklischen Belastung. Dabei stellt sich die Frage, welches Paar von Belastungszeitpunkten die beiden extremalen Belastungszustände repräsentieren soll.

In [2] wurde bereits angedeutet, daß die VFZT an sich auch das Potential besitzt, im Zuge seiner Weiterentwicklung auch hinsichtlich nichtradialer zyklischer Belastung erweitert zu werden. Diese Erweiterung liegt jedoch noch nicht anwendungsbereit vor.

Bei den weiteren Darstellungen wird der Einfachheit halber davon ausgegangen, daß der minimale Belastungszustand alleine nicht zum Plastizieren führt. Wie sonst zu verfahren wäre kann [2] entnommen werden.

## 2.3 Theorie

Zum Verständnis der Bedeutung einiger Ausdrücke, die bei der VFZT verwendet werden, mag folgende kurze Übersicht über die der VFZT zugrunde liegende Idee zur Berechnung der Schwingbreiten dienen (*Abbildung 2*).

Anstelle der detaillierten elastisch-plastischen Analyse nach der exakten FZT wird die Differenz zwischen elastisch-plastischem und fiktiv elastischem (d.h. nach der Elastizitätstheorie berechnetem) Zustand betrachtet. Durch Einführung der sog. (und zunächst noch unbekanntem) „transformierten internen Variable“  $\Delta Y$  kann dieser Differenzzustand so umformuliert werden, daß er wieder durch ein elastisches Werkstoffgesetz beschrieben werden kann. Allerdings sind hierbei dann die elastischen Materialdaten  $E$  und  $\nu$  modifiziert (als  $E^*$  und  $\nu^*$  bezeichnet), und außerdem werden als modifizierte Belastung Anfangsdehnungen  $\varepsilon_0$  aufgebracht, die von  $\Delta Y$  abhängen. Die tatsächlichen Belastungen, der die Struktur unterworfen ist (Eigengewicht, Innendruck, Temperaturfelder, Auflagerbewegungen usw.), müssen dafür (als Differenzbelastung zwischen der detailliert elastisch-plastischen und der fiktiv elastischen Analyse) hier Null gesetzt werden. Die Auflagerbedingungen der Struktur bleiben jedoch in ihrer Art unverändert. Wegen der beiden Modifikationen wird diese Analyse „modifizierte elastische Analyse“ (meA) genannt. Nach ihrer Durchführung lassen sich die elastisch-plastischen Ergebnisse (Dehnungen, Spannungen, Verformungen usw.) gewinnen aus Superposition der Ergebnisse der meA mit denen der fiktiv elastischen Analyse.

Art der Analyse	Werkstoffgesetz	Belastung	Randbed.
detailliert elast.-plastisch (nach exakter FZT)	$\Delta\varepsilon^{\text{el-pl}} = \Delta\sigma^{\text{el-pl}}/E + \Delta\varepsilon^{\text{pl}}$	ja	ja
fiktiv elastisch (f.el) (nach Elastizitätstheorie)	$\Delta\varepsilon^{\text{f.el}} = \Delta\sigma^{\text{f.el}}/E$	ja	ja
Differenz	$\underbrace{\Delta\varepsilon^{\text{el-pl}} - \Delta\varepsilon^{\text{f.el}}}_{\Delta\varepsilon^*} = \underbrace{(\Delta\sigma^{\text{el-pl}} - \Delta\sigma^{\text{f.el}})}_{\Delta\rho} / E + \underbrace{\Delta\varepsilon^{\text{pl}}}_{(\Delta\rho + \frac{3}{2}\Delta Y)/C}$ $\Rightarrow \Delta\varepsilon^* = \Delta\rho (1/E + 1/C) + \frac{3}{2}\Delta Y/C$	nein	ja
modifiziert elastisch (meA) (nach VFZT)	bzw. $\Delta\varepsilon^* = \Delta\rho/E^*$ mit $1/E^* = 1/E + 1/C$	Anf.dehnung: $\varepsilon_0 = \frac{3}{2}\Delta Y/C$	ja

Abbildung 2: Zur Herleitung der VFZT für die Berechnung der Dehnschwingbreite (bei einachsigem Spannungszustand und bilinearem Werkstoffgesetz)

So wurde das elastisch-plastische Problem in ein äquivalentes modifiziert elastisches Problem umformuliert, ohne daß bisher irgendwelche Näherungen eingeführt wurden. Eine Lösung ist

damit jedoch noch nicht gewonnen, solange die transformierte interne Variable  $\Delta Y$  noch nicht an jeder Stelle der Struktur bekannt ist. Diese ist jedoch näherungsweise recht gut abzuschätzen. Hierfür wurden in [1] und [2] Strategien beschrieben. Da die Materialdaten nur in den plastischen Teilen der Struktur modifiziert und Anfangsdehnungen auch nur dort aufgebracht werden, ist zunächst jeweils die Fließzone  $V_p$  abzuschätzen. Das ist der Teil der Struktur, in dem Wechsellastung stattfindet. Beide Abschätzungen können nach Durchführung der modifizierten elastischen Analyse iterativ verbessert werden.

Die benötigten Gleichungen zur Berechnung der Schwingbreiten lauten für Hauptspannungszustände ( $i=1, 2, 3$ ):

Feststellung, ob es überhaupt zu Wechsellastung (plastisches Einspielen) kommt:

$$\Delta\sigma_v^{f.el} \begin{cases} \leq 2\sigma_y & \text{an jeder Stelle } x, y, z \text{ der Struktur} \rightarrow \text{elastisches Einspielen} \\ > 2\sigma_y & \text{an mindestens einer Stelle } x, y, z \text{ der Struktur} \rightarrow \text{plastisches Einspielen} \end{cases} \quad (1)$$

erste Abschätzung der Fließzone:

$$\Delta\sigma_{v(x,y,z)}^{f.el} \begin{cases} \leq 2\sigma_y & \rightarrow V_e \text{ (lokales elastisches Einspielen)} \\ > 2\sigma_y & \rightarrow V_p \text{ (lokales plastisches Einspielen)} \end{cases} \quad (2)$$

modifizierte elastische Materialdaten:

$$\text{in } V_p: E^* = E_t \quad ; \quad \nu^* = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \nu\right) \frac{E_t}{E} \quad (3)$$

erste Abschätzung der transformierten internen Variablen:

$$\text{in } V_p: \Delta Y_i = \left( \sigma_{i,max}^{f.el'} - \sigma_{i,min}^{f.el'} \right) \left( 1 - \frac{2\sigma_y}{\Delta\sigma_v^{f.el}} \right) \quad (4)$$

mit den deviatorischen Spannungskomponenten:

$$\sigma_i' = \sigma_i - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (5)$$

Anfangsdehnungen:

$$\text{in } V_p: \varepsilon_{i0} = \frac{3}{2} \frac{E - E_t}{E \cdot E_t} \Delta Y_i \quad (6)$$

Superposition der Ergebnisse, z.B. der Spannungs- und Dehnungskomponenten:

$$\Delta\sigma_i = \Delta\sigma_i^{f.el} + \Delta\rho_i \quad ; \quad \Delta\varepsilon_i^{el-pl} = \Delta\varepsilon_i^{f.el} + \Delta\varepsilon_i^* \quad (7)$$

wenn das Ergebnis der meA die Restspannungsschwingbreite  $\Delta\rho$  und die (modifizierte) elastische Dehnschwingbreite  $\Delta\varepsilon^*$  ist.

Aus den nach Gl.(7) durch Superposition gewonnenen Schwingbreiten der Spannungskomponenten kann die Vergleichsspannungsschwingbreite  $\Delta\sigma_v$  gebildet werden, die ihrerseits genutzt werden kann zur iterativen Verbesserung der Fließzone  $V_p$ :

iterativ verbesserte Abschätzung der Fließzone:

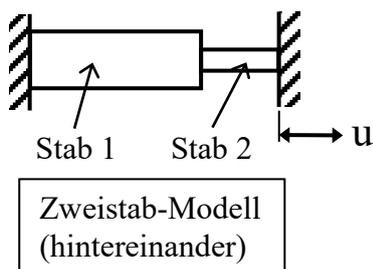
$$\Delta\sigma_{v(x,y,z)} \begin{cases} \leq 2\sigma_y \rightarrow V_e \text{ (lokales elastisches Einspielen)} \\ > 2\sigma_y \rightarrow V_p \text{ (lokales plastisches Einspielen)} \end{cases} \quad (8)$$

Die transformierte interne Variable  $\Delta Y$  dagegen kann nach dem derzeitigen Entwicklungsstand der Theorie bei der Schwingbreiten-Berechnung noch nicht iterativ verbessert werden. Dies hat zur Folge, daß direktionale Umlagerungen hierbei im Gegensatz zu den akkumulierten Dehnungen nicht voll erfaßbar sind (siehe jedoch Abschnitt 4.2).

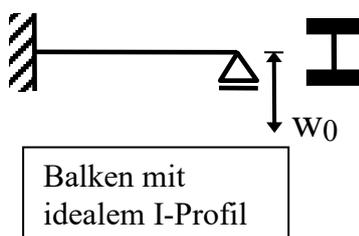
## 2.4 Bisher berechnete Strukturen

In [1] und [2] wurde die VFZT beispielhaft auf einige relativ einfache Strukturen unter zyklischer Belastung angewendet, die einer Berechnung von Hand noch zugänglich sind und daher als kontinuierliche Strukturen behandelt werden können. Diese Beispiele können der Verifikation von Implementierungen der VFZT in Finite Elemente Programme dienen.

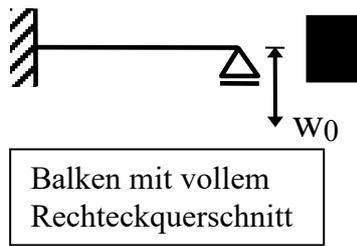
Die elastisch-plastische Dehnschwingbreite wurde bei folgenden Konfigurationen untersucht:



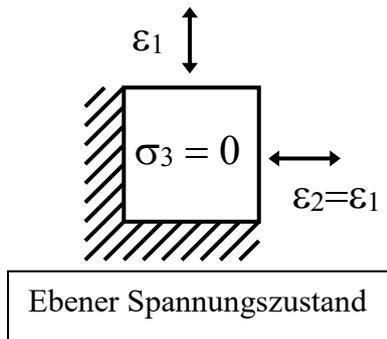
Dieses Zweistab-Modell, das aus zwei hintereinander geschalteten Stäben unterschiedlicher Querschnittsfläche und Länge besteht (Kerbeffekte am Querschnitts-Übergang vernachlässigt), repräsentiert den einfachsten Fall örtlicher Spannungsumlagerung. Direktionale Umlagerungen können wegen des einachsigen Spannungszustandes nicht auftreten. Das exakte Ergebnis wird durch die VFZT je nach Belastungsniveau nach spätestens 2 meA erzielt, da es für  $V_p$  nur zwei Möglichkeiten gibt (nur Stab 2 oder beide Stäbe plastisch).



Dieser Biegebalken mit idealem Sandwich-Querschnitt trägt Biegung nur durch Membranspannungen unterschiedlichen Vorzeichens in den Flanschen ab. Örtliche Umlagerungen sind so nur in Längsrichtung möglich. Direktionale Umlagerungen können wegen des einachsigen Spannungszustandes nicht auftreten. Obwohl für  $V_p$  je nach Belastungsniveau unendlich viele Möglichkeiten bestehen, wird eine gute Näherung an die exakten Ergebnisse bereits nach 2 meA erreicht.



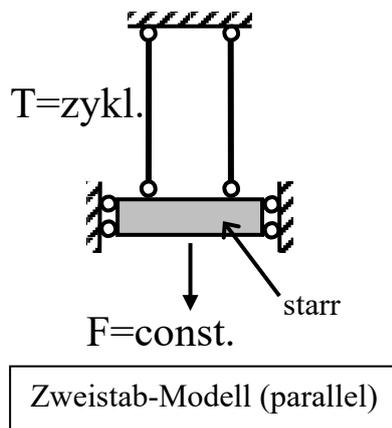
Bei diesem Biegebalken mit vollem Rechteck-Querschnitt treten örtliche Spannungsumlagerungen in Längsrichtung und über die Balkenhöhe auf. Somit gibt es für  $V_p$  je nach Belastungsniveau unendlich viele Möglichkeiten. Direktionale Umlagerungen können wegen des einachsigen Spannungszustandes nicht auftreten. Eine Handrechnung ist bei der VFZT nur für  $E_t=0$  möglich. Die Geschwindigkeit der Näherung durch die VFZT an das exakte Ergebnis hängt dabei vom Belastungsniveau ab.



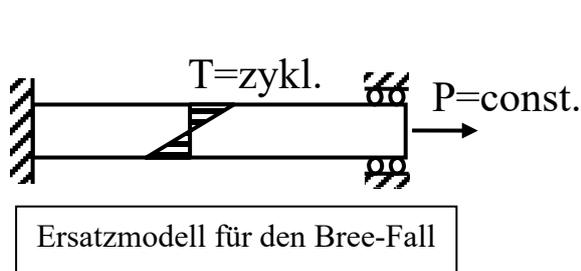
Der ebene Spannungszustand wird einer equi-biaxialen dehnungsgesteuerten Belastung unterworfen. Es sind weder örtliche noch direktionale Spannungsumlagerungen möglich. Somit wird das exakte Ergebnis ohne Iteration schon nach 1 meA erreicht.

Es wurde stets mit nur wenigen meA eine sehr gute Näherung an exakte Ergebnisse erreicht.

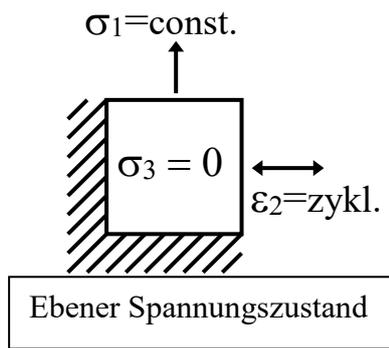
Die elastisch-plastischen akkumulierten Dehnungen (Ratcheting) wurden bei folgenden Konfigurationen untersucht:



Dieses Zweistab-Modell, das aus zwei parallel geschalteten Stäben besteht, die stets gleich lang bleiben, repräsentiert den einfachsten Fall von Struktur-Ratcheting. Direktionale Umlagerungen können wegen des einachsigen Spannungszustandes nicht auftreten. Das exakte Ergebnis wird durch die VFZT je nach Belastungsniveau nach spätestens 2 meA erzielt, da es für  $V_p$  nur zwei Möglichkeiten gibt (nur der rechte oder beide Stäbe plastisch).



Ein Rohr unter konstantem Innendruck und zyklischem radialen Temperaturgradienten wurde von Bree auf das nebenstehende Ersatzmodell zurückgeführt, bei dem nur noch ein einachsiger Spannungszustand vorliegt. Direktionale Umlagerungen können so nicht mehr auftreten. Das exakte Ergebnis wird durch die VFZT je nach Belastungs-Konfiguration nach spätestens 2 meA erzielt.



Der ebene Spannungszustand wird in einer Richtung einer spannungsgesteuerten Belastung und in die andere Richtung einer dehnungsgesteuerten Belastung unterworfen. Dies ist ein Beispiel für Material-Ratcheting. Örtliche Spannungsumlagerungen sind nicht möglich. Das exakte Ergebnis wird ohne Iteration schon nach 1 meA erreicht.

Auch bei diesen Beispielen wurde durchweg mit nur wenigen meA eine sehr gute Näherung an die exakten Ergebnisse erreicht.

### **3. Implementierung in Finite-Elemente-Programme**

Es erheben sich die Fragen, ob die VFZT auch in einer Finite-Elemente-Umgebung eingesetzt werden kann, welche Änderungen hierfür gegebenenfalls erforderlich sind, welche Anforderungen das zu benutzende FE-Programm erfüllen muß, ob spezielle Erfordernisse hinsichtlich der FE-Modellbildung bestehen, und ob die bei der Behandlung kontinuierlicher Strukturen gewonnenen Erfahrungen zur Ergebnisgenauigkeit und zum erforderlichen Berechnungsaufwand (siehe Abschnitt 2.4) auch bei diskreten Strukturen gelten.

Darüber hinaus bietet erst die Implementierung in ein FE-Programm die Möglichkeit, die Leistungsfähigkeit der VFZT unter realistischen Bedingungen, also bei komplizierteren Bauteilgeometrien und Belastungen, testen zu können.

#### **3.1 VFZT bei diskreten Strukturen**

Die Finite-Elemente-Methode beruht auf der Diskretisierung einer kontinuierlichen Struktur, indem diese in eine endliche Zahl endlich großer („finiten“) Elemente zerlegt wird. Der diskrete Charakter der Methode rührt daher, daß die Berechnungen nur an einer abzählbaren Menge bestimmter Stellen in der Struktur erfolgen (entweder an den Knoten- oder an den Integrationspunkten).

In Bezug auf die VFZT bedeutet dies, daß nicht jede beliebige Stelle mit den Raumkoordinaten  $x, y, z$  nach Gl.(2) daraufhin untersucht werden kann, ob sie zur Fließzone  $V_p$  gehört, um dort gegebenenfalls nach Gl.en (3) bis (6) die Materialdaten modifizieren und Anfangsdehnungen aufbringen zu können. Diese Einschränkung alleine wird noch als nicht gravierend betrachtet, da sie im Grund bloß dem Charakter der FE-Methode als numerischer Näherungsmethode selbst entspricht, wie sie auch bei anderen Anwendungen alltäglich ist, etwa bei Belastungsvorgaben durch Temperaturfelder, und mit der man auch bei der Ergebnisausgabe und Interpretation etwa von Spannungen und Dehnungen selbst bei fiktiv elastischen Analysen konfrontiert ist.

Die VFZT verursacht also keine besonderen Probleme, wenn Gl.en (2) bis (6) nur an den Koordinaten  $x, y, z$  von Integrations- oder Knotenpunkten konsistent angewendet werden

können. Diese konsistente Anwendung ist bei den in der Berechnungspraxis üblichen kommerziellen FE-Programmen jedoch in der Regel nicht möglich. So ist die Vorgabe von Materialdaten nach Gl.(3) nur für ganze Elemente möglich, nicht für einzelne Integrationspunkte. Liegt das gesamte Element innerhalb der elastischen Zone  $V_e$  oder ganz innerhalb der Fließzone  $V_p$ , so können die elastischen Materialdaten diesem Element korrekt zugewiesen werden. Andernfalls, also bei den Elementen, durch die die Trennung zwischen  $V_e$  und  $V_p$  verläuft, ist eine Methodik zu wählen, durch die eine Entscheidung zu treffen ist, ob dieses Element entweder  $V_e$  oder  $V_p$  zugewiesen wird. Hierfür kann etwa zugrunde gelegt werden:

- die Vergleichsspannungsschwingbreite in Elementmitte
- das arithmetische Mittel der Vergleichsspannungsschwingbreiten aller Integrationspunkte oder Knotenpunkte dieses Elementes
- die Anzahl der Integrationspunkte oder Knotenpunkte, an denen die Vergleichsspannungsschwingbreite die doppelte Streckgrenze überschreitet (z.B. Entscheidung für  $V_p$ , wenn dies in mehr als 50% aller Integrationspunkte dieses Elementes der Fall ist).

Während die Zuweisung der Materialdaten  $E^*$  und  $\nu^*$  in der Regel nur elementweise erfolgen kann, besteht bei den Anfangsdehnungen je nach FE-Programm eher die Möglichkeit, sie den Integrationspunkten oder Knotenpunkten zu weisen zu können. Im Bereich der Grenze zwischen  $V_e$  und  $V_p$  ergeben sich dabei allerdings Probleme, weil eine konsistente Vorgehensweise dann nicht möglich ist:

- wie ist mit einem Integrations- oder Knotenpunkt zu verfahren, der eigentlich zu  $V_e$  (bzw.  $V_p$ ) gehört, dessen zugehöriges Element aber beispielsweise nach einer der oben aufgeführten Möglichkeiten gänzlich  $V_p$  (bzw.  $V_e$ ) zugewiesen wurde? macht es Sinn, an der Stelle, die eigentlich nicht zu  $V_p$  gehört, trotzdem Anfangsdehnungen vorzugeben (bzw. keine vorzugeben, obwohl die Stelle eigentlich zu  $V_p$  gehört)?
- bei Vorgabe von Anfangsdehnungen an Knotenpunkten eines Elementes, das zu  $V_p$  gehört, kommt es zur Inkonsistenz mit einem Nachbarelement, das denselben Knoten besitzt, aber  $V_e$  zugewiesen wird
- ähnlich kommt es auch zur Inkonsistenz mit einem Nachbarelement, wenn an allen Integrationspunkten eines Elementes dieselben Anfangsdehnungen vorgegeben werden, um (wie auch bei der Entscheidung, ob dieses Element zu  $V_p$  oder zu  $V_e$  zählen soll) einen mittleren Zustand dieses Elementes zu beschreiben.

Diese Probleme treten durch Beeinflussung der Ergebnisgenauigkeit um so deutlicher zutage, je gröber das FE-Netz ist. Bei unbefriedigender Lösung dieser Probleme besteht die Gefahr, daß die Ergebnisse mit der VFZT in besonderem Maße (also stärker als ohnehin immer bei

der FE-Methode als numerischer Näherungsmethode der Fall) sensitiv sind hinsichtlich der FE-Modellbildung.

### 3.2 Anforderungen an das FE-Programm

Aus dem im vorigen Abschnitt Gesagten ergibt sich, daß das FE-Programm, in das die VFZT zu implementieren ist, möglichst folgende Arbeitsschritte ermöglichen sollte:

- *Änderung der Materialdaten* in jedem einzelnen Integrationspunkt (die modifizierten elastischen Materialdaten sind nach Gl.(3) in der gesamten Fließzone überall gleich, so daß bei ortsunabhängigen elastischen Materialdaten und Verfestigungsmoduln nur zwei unterschiedliche tatsächliche bzw. modifizierte elastische Materialdatensätze erforderlich sind: einer für  $V_e$ , einer für  $V_p$ ); sonst siehe Abschnitt 3.1
- Vorgabe beliebiger *Anfangsdehnungen*, und zwar am besten in jedem einzelnen Integrationspunkt (im Allgemeinen sechs unterschiedliche Verzerrungskomponenten, die nach Gl.en (4) und (6) in jedem Integrationspunkt unterschiedlich sind); sonst siehe Abschnitt 3.1
- Zugriff zu *Berechnungsergebnissen* in Form von Spannungskomponenten an den Integrationspunkten
- automatisierte Ausführung der *lokalen Berechnungen* (an den einzelnen Integrations- und Knotenpunkten): Abfrage der Ungleichungen (1) und (2), Berechnung von  $\Delta Y_i$  nach Gl.(4), Superposition vor allem der Spannungen, aber zumindest nach beendeter Iteration auch der Dehnungen, Verformungen, Auflagerreaktionen usw. entsprechend Gl.(7)
- zur Superposition nach Gl.(7) Zugriff *gleichzeitig* auf die Berechnungsergebnisse *unterschiedlicher Analysen* (der fiktiv elastischen und der modifiziert elastischen), die nicht nur als unterschiedliche Lastfälle derselben Struktur betrachtet werden können, da ihnen wegen unterschiedlicher Materialdaten unterschiedliche Steifigkeitmatrizen zugrunde liegen
- *Steuerung der meA* (d.h. Modifikation der Materialdaten, Zuweisung der Anfangsdehnungen, Kommando zur Ausführung der meA)

Die Kommandos zur Ausführung dieser Arbeiten sollten am besten über die normale Benutzeroberfläche eingegeben werden können. Da ihr Ablauf algorithmisch formuliert werden kann, können die Kommandos dann in Makros zusammengefaßt werden, deren Ausführung an bestimmten Stellen einer Eingabedatei kommandiert wird. Häufig sind Berechnungen, die in der Sprache der Benutzeroberfläche programmiert sind, jedoch relativ langsam. In diesem Fall, und wenn diese Sprache gar nicht ausreicht zur Formulierung obiger Arbeitsschritte, ist es notwendig, eine Programmierung der VFZT als user-subroutine vorzunehmen. Diese wird meist in den Programmiersprachen FORTRAN oder C++

geschrieben und muß vor ihrer Nutzung erst noch kompiliert und gelinkt werden. User-subroutines sind an vom Hersteller des FE-Programms genau definierte Schnittstellen zur Übergabe von Berechnungsdaten gebunden. Es ist nicht unbedingt bei jedem FE-Programm davon auszugehen, daß eine für den hier besprochenen Anwendungszweck geeignet definierte Schnittstelle existiert.

Die oben aufgeführten Anforderungen an FE-Programme zur Implementierung der VFZT werden nach gegenwärtiger Kenntnis des Autors von keinem der in der einschlägigen Industrie üblicherweise eingesetzten FE-Programme direkt erfüllt. So sind je nach FE-Programm unterschiedliche Kunstgriffe erforderlich, die zu Lasten

- der erreichbaren Berechnungsgenauigkeit
- der Berechnungsgeschwindigkeit
- des Benutzungskomforts

gehen können. In Abschnitt 3.4 werden einige Aspekte angesprochen, die bei der Implementierung der VFZT in ANSYS aufgetreten sind.

### **3.3 Ablaufplan**

Die in Abschnitt 2.3 dargelegte Theorie der VFZT ist in dem Sinne vollständig beschrieben, als für eine Anwendung auf eine konkrete Berechnungssituation keine subjektiven Einschätzungen des Berechners eingehen. Insbesondere bieten die Vorschriften zur Abschätzung der Fließzone  $V_p$  und der internen Variable  $Y$  keinen Ermessensspielraum. Sie lassen sich also algorithmisch formulieren.

Im folgenden wird ein möglicher Algorithmus der VFZT für eine Implementierung in ein FE-Programm in groben Zügen aufgezeigt. Dabei wird von dem häufigen Fall ausgegangen, daß die Materialdaten nur elementweise modifiziert werden können, Anfangsdehnungen aber integrationspunktweise vorgegeben werden können. Die Darstellung ist beschränkt auf die Berechnung der Schwingbreiten bei zyklischer Belastung. Es wird davon ausgegangen, daß es nur einen Werkstoff gibt, dessen tatsächliche elastische Materialparameter  $E$  und  $\nu$  als Materialdatensatz Nr. 1 und die modifizierten elastischen Materialparameter  $E^*$  und  $\nu^*$  nach Gl.(3) als Materialdatensatz Nr. 2 vorliegen.

- 1) f.el. Analyse des min. Belastungszustandes  $\rightarrow \sigma_{i,\min}^{f.el}$
- 2) f.el. Analyse des max. Belastungszustandes  $\rightarrow \sigma_{i,\max}^{f.el}$
- 3) Schleife über alle Integrationspunkte:
  - 3.1) berechne komponentenweise die Schwingbreite  $\Delta\sigma_i^{f.el} = \sigma_{i,\max}^{f.el} - \sigma_{i,\min}^{f.el}$
  - 3.2) berechne daraus die Mises-Vergleichsspannungs-Schwingbreite  $\Delta\sigma_v^{f.el}$
  - 3.3) stelle fest, an welchen Integrationspunkten  $\Delta\sigma_v^{f.el} > 2\sigma_y$
  - 3.4) berechne  $\varepsilon_{i0}$  nach Gl.(4) bis (6)
- 4) stelle fest, ob nach Gl.(1) global plastisches Einspielen auftritt: wenn nein  $\implies$  14)
- 5) Schleife über alle Elemente:
  - 5.1) stelle fest, ob 3.3) erfüllt in  $>50\%$  aller Integrationspunkte dieses Elementes;
  - 5.2) wenn ja: bringe Anfangsdehnungen  $\varepsilon_{i0}$  an allen Integrationspunkten dieses Elementes auf;
  - 5.3) wenn ja: setze Materialdatensatz dieses Elementes auf Nr. 2
- 6) setze die tatsächliche Belastung der f.el. Analysen = 0
- 7) modifizierte elastische Analyse (meA)  $\rightarrow \Delta\rho_i$
- 8) Schleife über alle Integrationspunkte:
  - 8.1) berechne komponentenweise (Superposition):  $\Delta\sigma_i^{el-pl} = \Delta\sigma_i^{f.el} + \Delta\rho_i$
  - 8.2) berechne daraus die Mises-Vergleichsspannungs-Schwingbreite  $\Delta\sigma_v$
  - 8.3) stelle fest, an welchen Integrationspunkten  $\Delta\sigma_v > 2\sigma_y$
- 9) Schleife über alle Elemente:
  - 9.1) stelle fest, ob 8.3) erfüllt in  $>50\%$  aller Integrationspunkte dieses Elementes;
  - 9.2) wenn ja: bringe Anfangsdehnungen  $\varepsilon_{i0}$  an allen Integrationspunkten dieses Elementes auf;
  - 9.3) wenn ja: setze Materialdatensatz dieses Elementes auf Nr. 2;
  - 9.4) wenn nein: lösche die evt. früher aufgebrachten Anfangsdehnungen  $\varepsilon_{i0}$  an allen Integrationspunkten dieses Elementes;
  - 9.5) wenn nein: setze Materialdatensatz dieses Elementes gegebenenfalls zurück auf Nr. 1
- 10) modifizierte elastische Analyse (meA)  $\rightarrow \Delta\rho_i$
- 11) wenn sich  $\Delta\rho_i$  stark geändert hat gegenüber  $\Delta\rho_i$  im vorigen Iterationsschritt:  $\implies$  8)
- 12) komponentenweise Superposition aller Integrationspunkt-, Knoten-, Element-Ergebnisse usw. nach Gl.(7): Schwingbreiten der Spannungen, Dehnungen, Verformungen, Auflagerreaktionen usw.
- 13) daraus dann Bildung zusammengesetzter Ergebnisse (Schwingbreiten der Vergleichsspannungen, Hauptspannungen usw.)
- 14) Ende

Abbildung 3: Beispiel eines Ablaufplans der VFZT zur Berechnung der Schwingbreiten bei zyklischer Belastung

### 3.4 Implementierung in ANSYS

Es liegen zwei unterschiedliche Programmierungen der VFZT vor, die beide die VFZT durch das FE-Programm ANSYS nutzbar machen: in [5] wurde das Programm VEFZOT in der ANSYS Parametersprache APDL programmiert, in [6] als FORTRAN-Unterprogramm. Beide Arten sind geeignet zur Behandlung monotoner Belastung und können bei zyklischer Belastung sowohl die Dehnschwingbreite als auch die akkumulierten Dehnungen berechnen. Die Berechnungen sind in beiden Programmen sehr unterschiedlich organisiert, obwohl sie sich beide an dem im vorigen Abschnitt vorgestellten Ablaufplan orientieren. Bei dem Programm VEFZOT werden die Anfangsdehnungen in den Knoten bzw. im Element berechnet und aufgebracht (siehe unten), bei dem FORTRAN-Unterprogramm in den Integrationspunkten. Bei beiden ist wegen mancher spezieller Eigenarten von ANSYS, die eine optimale Implementierung der VFZT verhindern, eine Reihe von Anpassungen der VFZT erforderlich.

So ist es beispielweise bei ANSYS (zumindest bis ANSYS 5.5) nicht ohne weiteres möglich, Anfangsdehnungen als Belastung aufzubringen – weder an Knoten, noch an Integrationspunkten. Eine entsprechende Belastungsoption (initial strains, über real constants zu definieren) existiert nur bei einigen Stab-Elementen, und auch dort nur (entsprechend der Stabwerks-Theorie) mit linearer Verteilung über den Querschnitt und somit quasi nur als Längenänderung und Krümmung der Stabachse. Dies wäre allenfalls für die Berechnung von Fachwerk-Strukturen (z.B. mit dem LINK1-Element) mit der VFZT ausreichend, aber nicht bei einem Biegebalken, da dort die Anfangsdehnungen nichtlinear über die Querschnittshöhe verlaufen (siehe [1]).

Eine indirekte Vorgabe der Anfangsdehnungen durch thermische Dehnungen aufgrund vorzugebender Temperaturfelder ist zwar bei einachsigen Spannungszuständen ausreichend, genügt aber bei mehrachsigen Spannungszuständen nicht, da die Anfangsdehnungen der VFZT im Gegensatz zu thermischen Dehnungen deviatorischen Charakter besitzen (die Summe ihrer drei Normaldehnungen ist Null, bewirken also keine Volumenänderung). Hierfür ist also auch noch die Definition eines eigenen Materialdatensatzes mit orthotropen Wärmeausdehnungskoeffizienten für jedes Element in  $V_p$  erforderlich. Diese Wärmeausdehnungskoeffizienten müssen dann im Verhältnis der deviatorischen Hauptspannungen zueinander stehen:

$$\alpha_x : \alpha_y : \alpha_z = 1 : \frac{\sigma_y^{f,el'}}{\sigma_x^{f,el'}} : \frac{\sigma_z^{f,el'}}{\sigma_x^{f,el'}} \quad (9)$$

Liegt nicht von vornherein ein Hauptspannungszustand vor, so muß zuerst eine entsprechende Koordinatentransformation vorgenommen werden. Es muß also für jedes Element in Vp auch noch ein eigenes gedrehtes Koordinatensystem eingeführt werden.

Die Temperaturen können in den Elementknoten vorgegeben werden und simulieren dort nach Gl.(9) direkt die Anfangsdehnungen in Hauptrichtung x (wg.  $\alpha_x=1$ ). Die Anfangsdehnungen in die beiden anderen Hauptrichtungen werden so durch Gl.(9) in diesen Knoten aber nicht unbedingt richtig erzeugt, da  $\alpha_y$  und  $\alpha_z$  Eigenschaften des Elementes sind und nicht der jeweiligen Knoten und somit nicht für jeden Knoten individuell berechnet werden können.

Testrechnungen zeigen, daß mit VEFZOT teilweise gute Ergebnisse erzielt werden können. Die Berechnungserfahrung hat allerdings auch gezeigt, daß es Situationen gibt, in denen die zur Programmierung der VFZT mit der APDL erforderlichen Umwege und Kniffe (wie oben bezüglich der Anfangsdehnungen beschrieben) zu einer unbefriedigenden Ergebnisqualität führen.

Die von ANSYS bereitgestellten Schnittstellen für user-subroutines sind nicht optimal für die Bedürfnisse zur Implementierung der VFZT in ANSYS definiert. Deshalb waren für die Programmierung in [6] auch einige Kniffe erforderlich. Eine Auswirkung hiervon ist beispielsweise, daß die elastisch-plastischen Dehnungen nur über eine Definition von „etables“ ausgegeben werden können, nicht als Knoten- oder Element-Ergebnisse. Dennoch zeigen die durchgeführten Berechnungen durchweg eine sehr gute Ergebnisqualität. Darüberhinaus laufen sie wesentlich schneller ab als mit VEFZOT.

Die user-subroutine wurde durch einige Makros unterstützt, die den Berechnungsablauf steuern und in einer Makro-Bibliothek zusammengefaßt sind. Der Berechner braucht daher für eine Anwendung der VFZT über die Durchführung der fiktiv elastischen Analysen hinaus in seiner Eingabedatei (neben der obligatorischen Bereitstellung der elastisch-plastischen Materialdaten) nur fünf Kommandos zu setzen:

- Pfadname der Makro-Bibliothek:

\*ulib,MakroBibliothek(zykl)

- Anzahl der durchzuführenden meA:

ANZMEA=3 (z.B.)

- Kommando zur Ausführung des Makros zur Berechnung der modifizierten elastischen Materialparameter:

\*use,material

- Kommando zur Ausführung des Makros für die Durchführung der meA:

\*use,mod\_elast\_Analysen

- Kommando zur Ausführung des Makros für die Superposition der Ergebnisse aus fiktiv elastischer und modifiziert elastischer Analyse:

\*use,auswertung

Die in den folgenden Kapiteln durchgeführten Berechnungen werden alle mit der user-subroutine durchgeführt.

## **4. Anwendung der VFZT auf einfache Strukturen**

Die Programmierung der VFZT durch eine user-subroutine für ANSYS [6] (siehe auch Abschnitt 3.4) soll hier benutzt werden für einige Beispielrechnungen einfacher Strukturen mit der FE-Methode. Diese können dann verglichen werden mit woanders ([1, 2]) mit kontinuierlicher Theorie erhaltenen Ergebnissen. So können diese Berechnungen einerseits zur Verifikation der FE-Implementierung dienen, andererseits aber auch gerade durch ihre Einfachheit Einblicke in ihr numerisches Verhalten gestatten.

Es werden in vier unterschiedlichen Beispielen die beiden bei zyklischer Belastung für einen Lebensdauernachweis nach dem KTA-Regelwerk erforderlichen elastisch-plastischen Beanspruchungsgrößen berechnet. Hierfür werden jeweils zwei die plastische Dehnschwingbreiten-Erhöhung und die plastische Dehnungsakkumulation aufzeigende Strukturen herangezogen. Die Dehnschwingbreite  $\Delta\varepsilon$  ist ein die Ermüdung bestimmendes Maß. Die akkumulierte Dehnung  $\varepsilon_{\max}$  ist im Rahmen eines Ratcheting-Nachweises mit einer zulässigen Dehngrenze zu vergleichen, *Abbildung 4* (nach dem KTA-Regelwerk 5% bzgl. der Spitzendehnung  $\varepsilon_p$  über die Wanddicke im Grundwerkstoff; nach anderen Regelwerken wie beispielsweise dem ASME-Code Case N47 oder dem RCC-MR wird zusätzlich oder statt dessen die Einhaltung der Dehngrenzen für die Membrandehnung  $\varepsilon_M$  und Membran- plus Biegedehnung  $\varepsilon_{M+B}$  gefordert).

In Kapitel 5 werden dann praxisnähere Beispiele durchgerechnet.

Alle Berechnungen in Kapiteln 4 und 5 wurden mit ANSYS 5.3, ANSYS 5.4 bzw. ANSYS 5.5 durchgeführt.

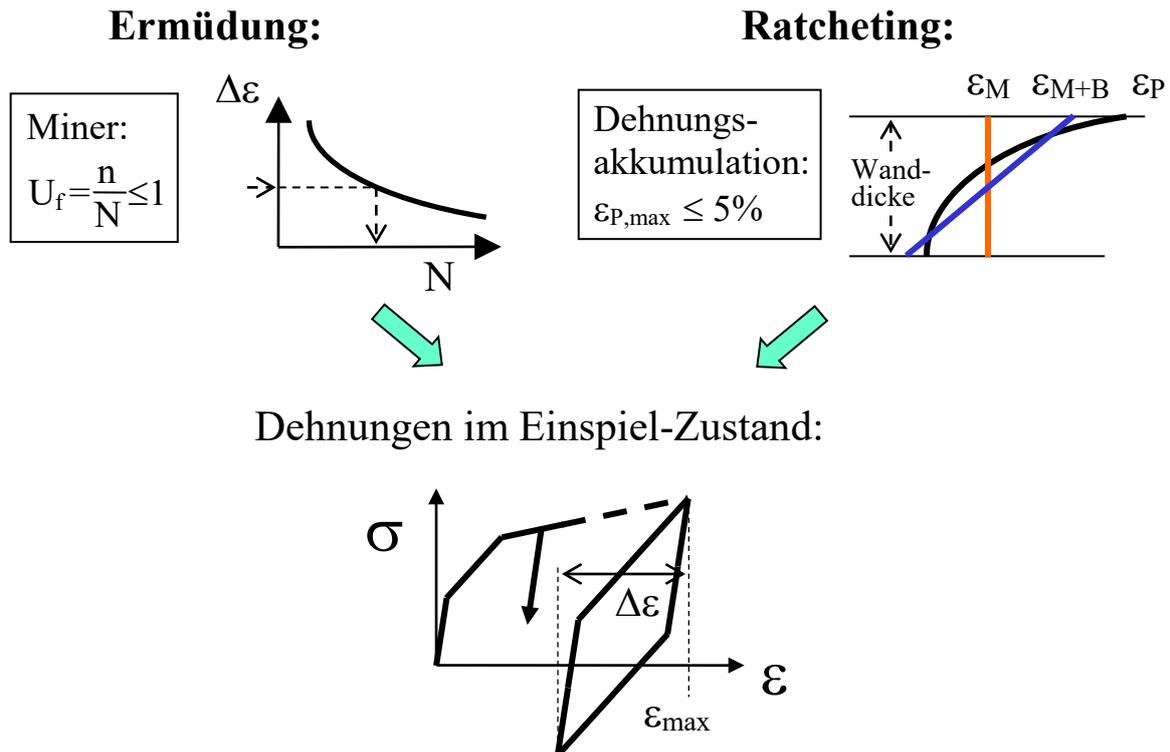


Abbildung 4: Maßgebende Beanspruchungsgrößen für einen Lebensdauernachweis

#### 4.1 Zweistab-Modell (hintereinander) hinsichtlich Dehnschwingbreite

Zwei Stäbe unterschiedlicher Querschnittsfläche ( $A_1=1$ ,  $A_2=0,5$ ), unterschiedlicher Länge, ( $l_1=2$ ,  $l_2=1$ ) aber gleichen Werkstoffes werden nach *Abbildung 5* so miteinander verbunden, daß sie infolge der weggesteuerten Belastung  $u$  nur Normalkräfte erfahren. Kerbeffekte am Übergang der beiden Querschnitte werden vernachlässigt.

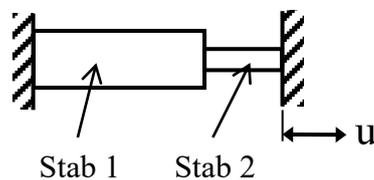


Abbildung 5: Zweistab-Modell (hintereinander)

Es werden zwei unterschiedliche Belastungsschwingbreiten untersucht, die beide plastisches Einspielen hervorrufen:

$\Delta u=6$  ( $u=1 \dots 7$ ) und  $\Delta u=12$  ( $u=1 \dots 13$ )

Entsprechend Abschnitt 2.1 wird lineare kinematische Verfestigung angenommen mit den Materialdaten

$$E=200.000$$

$$\nu=0,0$$

$$\sigma_y=200$$

$$E_t=10.000$$

Wegen des einachsigen Spannungszustandes ist eine direktionale Spannungsumlagerung nicht möglich, sondern allenfalls eine örtliche. Dies bedeutet, daß die Fließzone  $V_p$  nicht von vornherein bekannt ist, sondern bei der VFZT erst iterativ gefunden werden muß. Die transformierte interne Variable  $\Delta Y$  ist mit Gl.(4) hingegen in  $V_p$  von vornherein exakt bekannt. Da es für die Fließzone nur zwei Möglichkeiten gibt (entweder spielt nur Stab 2 lokal plastisch ein, während Stab 1 lokal elastisch einspielt; oder beide Stäbe spielen lokal plastisch ein), muß die VFZT mit höchstens einer iterativen Verbesserung (also zwei meA) zum exakten Ergebnis führen.

Das Finite-Elemente-Modell wurde gebildet aus zwei PLANE42-Elementen mit ebenem Spannungszustand, deren Quer-Verschiebungen an der Stelle des Querschnitts-Überganges voneinander entkoppelt wurden, um im Plastischen keine Kerbeffekte infolge behinderter Querdehnung zu erhalten (im Elastischen ohnehin keine wg.  $\nu=0$ ).

Die mit ANSYS nach der VFZT bzw. der exakten FZT erhaltenen Ergebnisse sind in Tabelle 1 aufgelistet. Sie stimmen mit den entsprechenden Handrechnungen in [1] exakt überein.

Der Einspielzustand wird bei der exakten Analyse bereits nach einem Zyklus erreicht, wofür drei Lastschritte (erstmalige minimale Belastung, maximale Belastung, Entlastung auf den minimalen Belastungszustand) mit insgesamt 14 Gleichgewichtssiterationen erforderlich waren. Die VFZT kommt mit einem etwas geringeren Berechnungsaufwand aus, nämlich maximal 2 meA, also 4 linearen Analysen. Der geringere Berechnungsaufwand bei der VFZT fällt bei dieser einfachen Struktur also noch nicht stark ins Gewicht.

Die Axial-Dehnschwingbreiten sind in *Abbildung 6* noch einmal graphisch veranschaulicht. Man erkennt, daß die mit ANSYS erzielten Ergebnisse nach der VFZT nach spätestens 2 meA

identisch sind mit denen nach der exakten FZT. In beiden Belastungsfällen wird nur Stab 2 zyklisch plastisch, was durch die VFZT beim Belastungsfall  $\Delta u=6$  bereits mit der ersten meA richtig erkannt wird, während beim Belastungsfall  $\Delta u=12$  die Fließzone zunächst falsch abgeschätzt wird, so daß das exakte Ergebnis erst nach der zweiten meA erreicht wird.

<b>Belastung <math>\Delta u=6</math></b>		Axial-Spannungsschwingbreite	Dehnungsschwingbreite		
			Axial-	y-Quer-	z-Quer-
<b>Stab 1</b>	VFZT: 1. meA	209,52	0,10476%	0	0
	2. meA	209,52	0,10476%	0	0
	exakt	209,52	0,10476%	0	0
<b>Stab 2</b>	VFZT: 1. meA	419,05	0,39048%	0,09048%	0,09048%
	2. meA	419,05	0,39048%	0,09048%	0,09048%
	exakt	419,05	0,39048%	0,09050%	0,09046%

<b>Belastung <math>\Delta u=12</math></b>		Axial-Spannungsschwingbreite	Dehnungsschwingbreite		
			Axial-	y-Quer-	z-Quer-
<b>Stab 1</b>	VFZT: 1. meA	315,00	-0,65000%	0,40375%	0,40375%
	2. meA	238,10	0,11905%	0	0
	exakt	238,09	0,11905%	0	0
<b>Stab 2</b>	VFZT: 1. meA	630,00	2,50000%	-1,09250%	-1,09250%
	2. meA	476,19	0,96191%	-0,36191%	-0,36191%
	exakt	476,19	0,96190%	-0,36191%	-0,36191%

Tabelle1: Berechnungsergebnisse vom Zweistab-Modell (hintereinander)

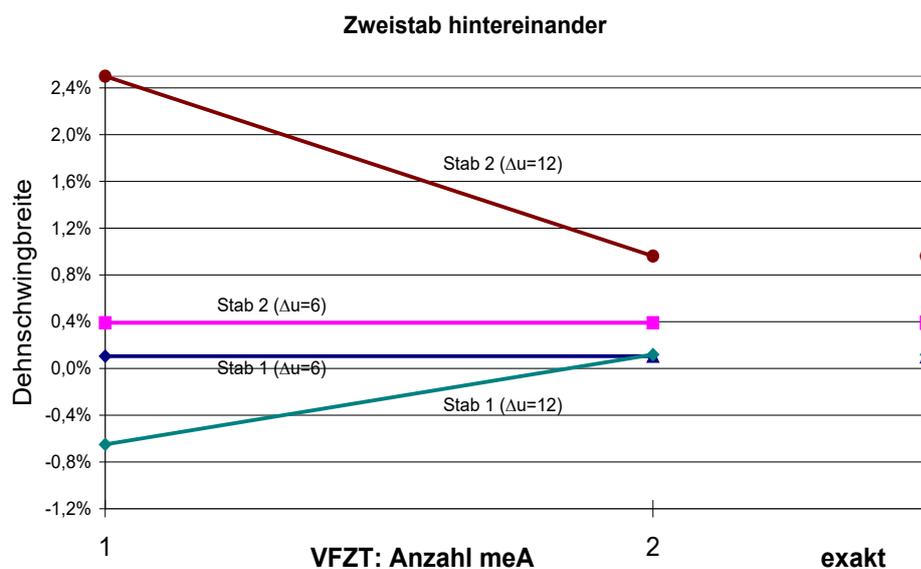
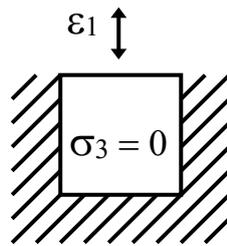


Abbildung 6: Axial-Dehnschwingbreiten beim Zweistab-Modell (hintereinander)

## 4.2 Ebener Spannungszustand hinsichtlich Dehnschwingbreite

Ein quadratisches Element der Kantenlänge 1 (*Abbildung 7*) wird einem ebenen Spannungszustand unterworfen. Die Belastung erfolgt in die beiden anderen Richtungen dehnungsgesteuert so, daß die Querdehnung  $\varepsilon_2$  verhindert wird, während  $\varepsilon_1$  zwischen 0,04 % und 1,04 % zyklert.



*Abbildung 7:* Ein Element unter biaxialer dehnungsgesteuerter Belastung.

Das bilineare Werkstoffverhalten ist gekennzeichnet durch die Materialdaten

$$\begin{aligned} E &= 200.000 \\ \nu &= 0,3 \\ \sigma_y &= 200 \\ E_t &= 12.000 \end{aligned}$$

Die Fließzone ist wegen der Homogenität des Beanspruchungszustandes unmittelbar bekannt. Jedoch gibt es directionale Spannungumlagerungen (weil die Querdehnung im Plastischen anders ist als im Elastischen), die zur Folge haben, daß bei der VFZT die transformierte interne Variable  $\Delta Y$  iterativ abgeschätzt werden muß.

Es kommt zum plastischen Einspielen. Dieser Zustand wird bei der exakten FZT nach dem 4. Zyklus mit insgesamt 16 Gleichgewichtssiterationen erreicht. Die VFZT benötigt lediglich 2 meA, also insgesamt 4 lineare Analysen.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 dargestellt. Bei der VFZT findet keine iterative Verbesserung der Spannungen statt. Die Dehnungen ändern sich jedoch von der 1. zur 2. meA beträchtlich (siehe auch *Abbildung 8*). Danach gibt es keine weitere Änderung mehr. Mit der 2. meA ist eine gute Näherung an die Ergebnisse nach der exakten FZT erreicht hinsichtlich der Schwingbreite der maximalen Spannungskomponente, der Vergleichsspannung und der Dehnungskomponente (in der einen Richtung, in der die Dehnung nicht vorgegeben ist). Die

kleinere Spannungskomponente in Querrichtung wird dagegen nicht so gut angenähert. Die Ursache hierfür ist darin zu sehen, daß die Schwingbreite hier nach der in [1] beschriebenen unteren Abschätzung ermittelt wurde, die die direktionale Spannungsumlagerung unterschätzt (für  $\nu=0,5$  werden dagegen von der VFZT die exakten Ergebnisse gefunden). Eine alternative Bestimmung der Schwingbreiten kann folgendermaßen erfolgen: Die halbe Belastungsschwingbreite wird als monotone Belastung aufgebracht (bei monotoner Belastung kann durch die VFZT die direktionale Spannungsumlagerung berücksichtigt werden). Die so durch monotone Berechnung erhaltenen Ergebnisse der VFZT werden dann verdoppelt. Die so erhaltenen Ergebnisse sind in Tabelle 2 als VFZT-Alternative mit aufgeführt.

	Spannungsschwingbreite			Dehnungsschwingbreite in Richtung 3
	in Richtung 1	in Richtung 2	Vergleichs-	
VFZT: 1. meA	575,29	196,14	506,55	-5,51370%
2. meA	575,29	196,14	506,55	-0,84571%
exakt	586,17	266,49	508,33	-0,82837%
VFZT-Alternative:				
1. meA	575,29	196,14	506,55	-5,51374%
2. meA	581,32	327,50	504,78	-0,81824%
7. meA	584,96	279,74	506,75	-0,82706%

Tabelle 2: Berechnungsergebnisse Ein Element

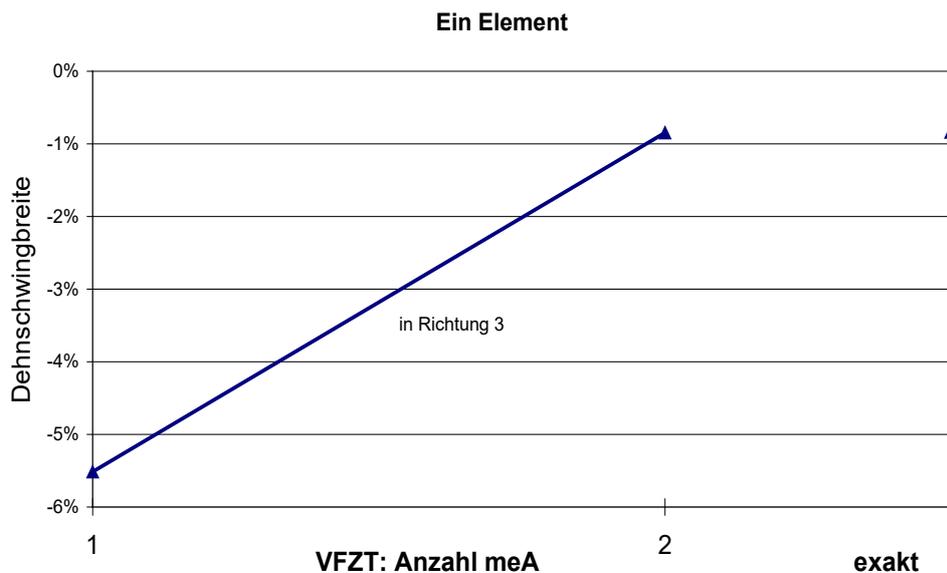


Abbildung 8: Ein Element: Dehnschwingbreite in Richtung 3

### 4.3 Zweistab-Modell (parallel) hinsichtlich Dehnungsakkumulation

Um einen einfachen Fall von Ratcheting zu simulieren wird auch hier wieder, wie in Abschnitt 4.1, ein Zweistab-Modell betrachtet. Die beiden Stäbe sind nun aber parallel zueinander, gleich lang ( $l=1$ ) und haben die gleiche Querschnittsfläche ( $A=1$ ) (*Abbildung 9*). Beide Stäbe sind so miteinander verbunden, dass sie stets gleich lang sind. Sie bestehen aus dem gleichen linear kinematisch verfestigenden Material mit den Parametern

$$\begin{aligned} E &= 200.000 \\ \nu &= 0,0 \\ \sigma_y &= 160 \\ E_t &= 8.000 \\ \alpha_t &= 1,8 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

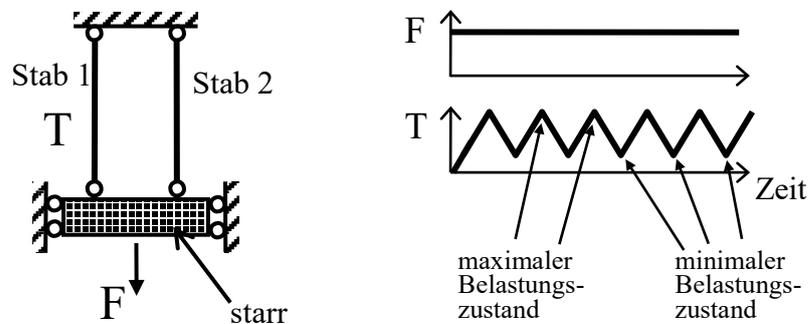


Abbildung 9 : Zweistab-Modell (parallel)

Die Belastung besteht aus einer konstanten Kraft  $F$  und einer zyklisch veränderlichen Temperatur in Stab 1. Es werden zwei unterschiedliche Belastungskombinationen berechnet (Darstellung im Ratcheting-Interaktions-Diagramm *Abbildung 10*):

- Fall a)  $F=224$  (Primärspannung  $\sigma_0=0,7$ -fache Streckgrenze)  
 $T=20 \dots 190$  (Sekundärsp.  $\sigma_t$  mit der Schwingbreite =  $1,9125$ -fache Streckgrenze)  
 führt zu elastischem Einspielen
- Fall b)  $F=192$  (Primärspannung  $\sigma_0=0,6$ -fache Streckgrenze)  
 $T=20 \dots 280$  (Sekundärsp.  $\sigma_t$  mit der Schwingbreite =  $2,925$ -fache Streckgrenze)  
 führt zu plastischem Einspielen

Aufgrund der Einachsigkeit des Spannungszustandes ist eine directionale Umlagerung der Beanspruchungen nicht möglich. Da es ferner nur zwei Möglichkeiten für die Fließzone gibt (entweder ist nur ein Stab plastisch oder beide), wird die VFZT maximal zwei  $meA$  benötigen.

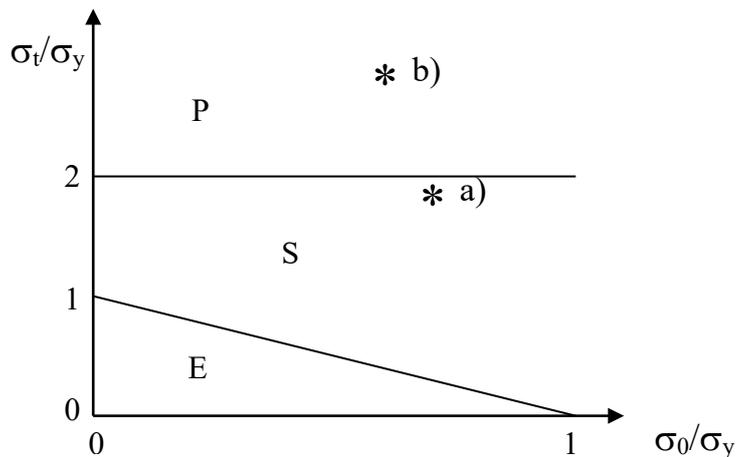


Abbildung 10: Zweistab-Modell (parallel): Belastungskombinationen im Ratcheting-Interaktions-Diagramm

Die Ergebnisse sind in Tabelle 3 für die im Einspielzustand akkumulierten Spannungen und Dehnungen beim minimalen und beim maximalen Belastungszustand dargestellt. Bei der exakten FZT ist im Fall a) selbst nach 100 Zyklen der Einspielzustand noch nicht erreicht, jedoch sind schon nach ca. 50 Zyklen die Dehnungszuwächse von Zyklus zu Zyklus recht klein (Abbildung 12). Für diese 50 Zyklen sind insgesamt ca. 400 Gleichgewichtssiterationen erforderlich, während die VFZT schon nach 2 meA, also insgesamt nur 4 linearen Analysen das exakte Ergebnis liefert.

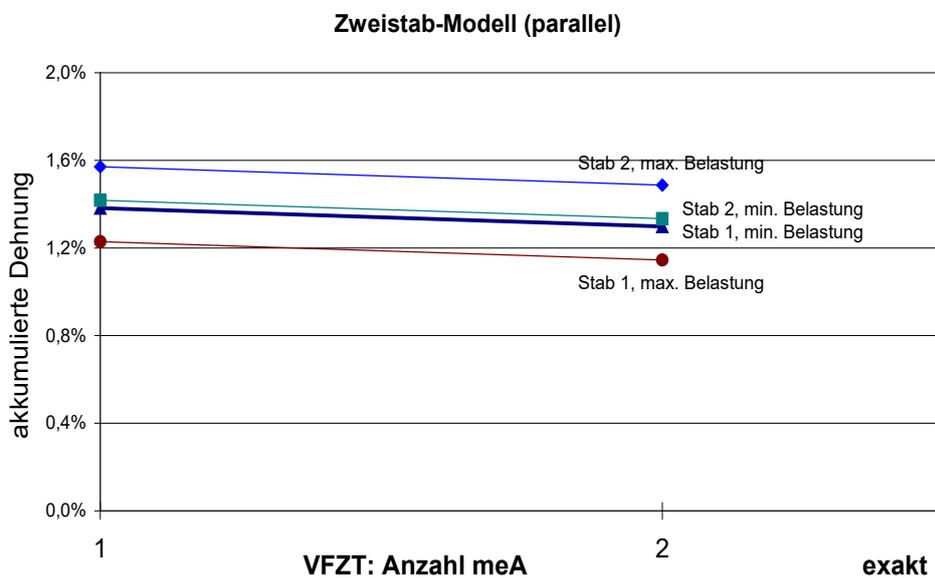
<b>Fall a)</b>		Spannung		Dehnung	
		Stab 1	Stab 2	Stab 1	Stab 2
min. Belastung	VFZT: 1. meA	250,72	-26,72	1,38200%	1,41800%
	2. meA	257,44	-33,44	1,29800%	1,33400%
	exakt	257,44	-33,44	1,29800%	1,33400%
max. Belastung	VFZT: 1. meA	-55,28	279,28	1,22900%	1,57100%
	2. meA	-48,56	272,56	1,14500%	1,48700%
	exakt	-48,56	272,56	1,14500%	1,48700%

<b>Fall b)</b>		Spannung		Dehnung	
		Stab 1	Stab 2	Stab 1	Stab 2
min. Belastung	VFZT: 1. meA	248,16	-56,16	1,18200%	1,21800%
	2. meA	248,16	-56,16	1,18200%	1,21800%
	exakt	248,16	-56,16	1,18200%	1,21800%
max. Belastung	VFZT: 1. meA	-77,76	269,76	0,94800%	1,45200%
	2. meA	-77,76	269,76	0,94800%	1,45200%
	exakt	-77,76	269,76	0,94800%	1,45200%

Tabelle 3: Berechnungsergebnisse Zweistab-Modell (parallel)

Im Fall b) wird laut exakter FZT der plastische Einspielzustand nach 7 Zyklen erreicht. Hierfür sind insgesamt ca. 150 Gleichgewichtsiterationen erforderlich. Die VFZT liefert die exakten Ergebnisse bereits nach 1 meA, also insgesamt nur 3 linearen Analysen.

Bemerkenswert ist, daß die akkumulierten Dehnungen im Fall a) bei elastischem Einspielen größer sind als im Fall b) bei plastischem Einspielen (weil die Primärspannungen größer sind). Die Änderung der akkumulierten Dehnungen mit der Anzahl der meA bei der VFZT ist für Fall a) in *Abbildung 11* veranschaulicht, die Entwicklung der akkumulierten Dehnungen über die Zyklenzahl bei der exakten FZT in *Abbildung 12*.



*Abbildung 11*: Akkumulierte elastisch-plastische Dehnungen beim Zweistab-Modell (parallel), Fall a), elastisches Einspielen

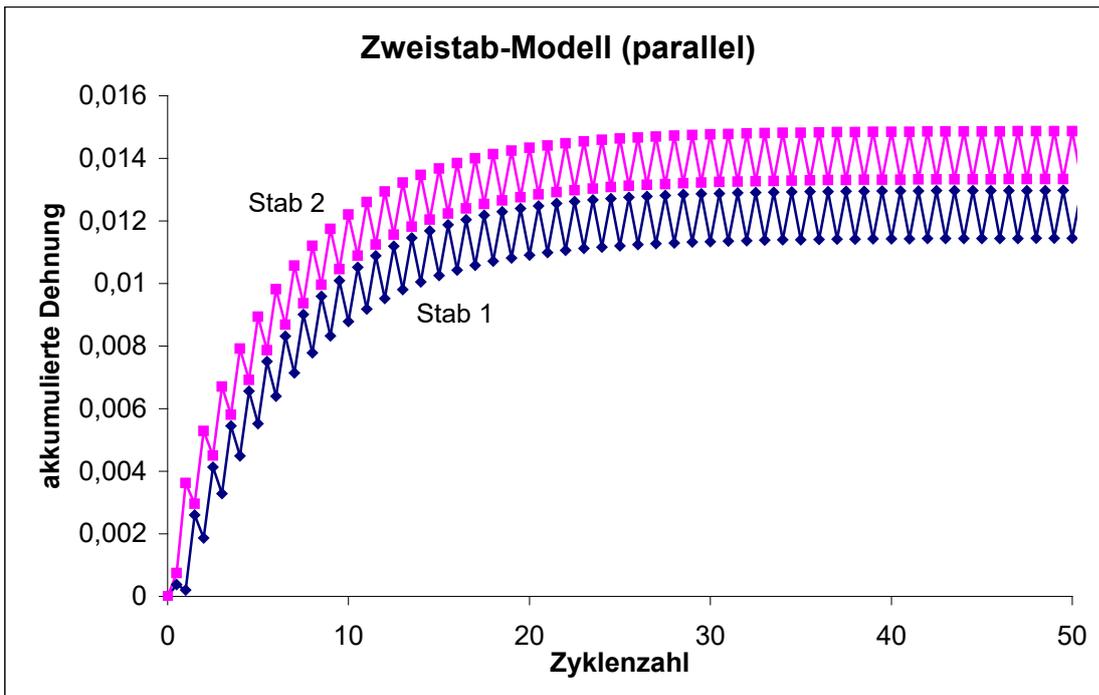


Abbildung 12: Entwicklung der akkumulierten elastisch-plastischen Dehnungen über die Zykluszahl bei Berechnung des Zweistab-Modells (parallel) nach der exakten FZT, Fall a), elastisches Einspielen

#### 4.4 Ebener Spannungszustand hinsichtlich Dehnungsakkumulation

Ein quadratisches Element (Kantenlänge 1) wird einem ebenen Spannungszustand unterworfen, in einer Richtung konstant spannungsgesteuert und quer dazu zyklisch dehnungsgesteuert belastet (Abbildung 13).

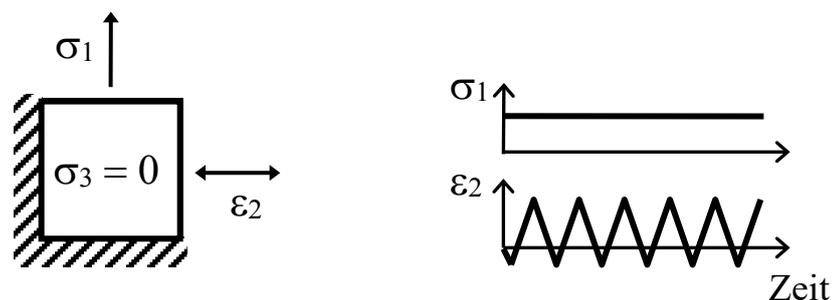


Abbildung 13: Ein Element unter spannungs- und dehnungsgesteuerter Belastung

Die Materialdaten des linear kinematisch verfestigenden Werkstoffes sind:

$$E=180.000$$

$$\begin{aligned} \nu &= 0,3 \\ \sigma_y &= 180 \\ E_t &= 9.000 \end{aligned}$$

Es werden zwei Belastungssituationen untersucht :

- Fall a)  $\sigma_1 = 108$  (Primärspannung = 0,6-fache Streckgrenze)  
 $\varepsilon_2 = -0,03\% \dots 0,16\%$  (Sekundärspannungsschwingbreite = 1,9-fache Streckgrenze)  
 führt zu elastischem Einspielen
- Fall b)  $\sigma_1 = 108$  (Primärspannung = 0,6-fache Streckgrenze)  
 $\varepsilon_2 = -0,05\% \dots 0,25\%$  (Sekundärspannungsschwingbreite = 3-fache Streckgrenze)  
 führt zu plastischem Einspielen

Die Berechnungsergebnisse für den jeweiligen Einspielzustand sind in Tabelle 4 dargestellt. Für Fall a) wurden mit der exakten FZT 500 Zyklen berechnet. Die plastische Dehnungsakkumulation ist dann noch nicht abgeschlossen. Aber schon nach ca. 300 Zyklen ist nur noch eine geringe Dehnungszunahme zu erkennen (*Abbildung 14*). Dazu wurden insgesamt ca. 4200 Gleichgewichtsiterationen durchgeführt. Die VFZT findet die exakten Ergebnisse bereits mit der ersten meA, so daß nur 3 lineare Analysen erforderlich waren. Hierfür wurde abweichend von den anderen Berechnungen die neuere Version 0.3 der user-subroutine für ANSYS benutzt, die im Gegensatz zu Version 0.2 [6] die in Abschnitt 6.1.1 von [2] beschriebene Ecke des Bereiches  $\Omega$  im Y-Raum findet (diese Ecke wird bei den oben angegebenen Belastungsparametern wirksam; bei anderen Belastungskombinationen, z.B. bei  $\varepsilon_2 = -0,03\% \dots 0,12\%$ , jedoch nicht unbedingt).

Im Fall b) scheint der exakten FZT zufolge nach ca. 150 Zyklen der plastische Einspielzustand erreicht zu sein. Jedenfalls ist im Rahmen der Ausgabe-Genauigkeit keine weitere Dehnungsakkumulation zu beobachten. Hierfür waren insgesamt ca. 1700 Gleichgewichtsiterationen erforderlich, während die VFZT mit einer einzigen meA auskommt, also mit 3 linearen Analysen.

<b>Fall a)</b>		Spannung		Dehnung	
		Richtung 2	Vergleichs-	Richtung 1	Richtung 3
min. Belastung	VFZT: 1. meA	-112,23	190,74	0,39474%	-0,36568%
	2. meA	-112,23	190,74	0,39474%	-0,36568%
	exakt	-112,23	190,74	0,39474%	-0,36568%
max. Belastung	VFZT: 1. meA	229,77	199,11	0,33774%	-0,42268%
	2. meA	229,77	199,11	0,33774%	-0,42268%
	exakt	229,77	199,11	0,33774%	-0,42268%

<b>Fall b)</b>		Spannung		Dehnung	
		Richtung 2	Vergleichs-	Richtung 1	Richtung 3
min. Belastung	VFZT: 1. meA	-122,58	199,82	0,91738%	-0,87062%
	2. meA	-122,58	199,82	0,91738%	-0,87062%
	exakt	-122,58	199,82	0,91738%	-0,87062%
max. Belastung	VFZT: 1. meA	246,42	213,95	0,80838%	-0,97962%
	2. meA	246,42	213,95	0,80838%	-0,97962%
	exakt	246,42	213,95	0,80838%	-0,97962%

Tabelle 4: Berechnungsergebnisse für ein Element unter spannungs- und dehnungsgesteuerter Belastung

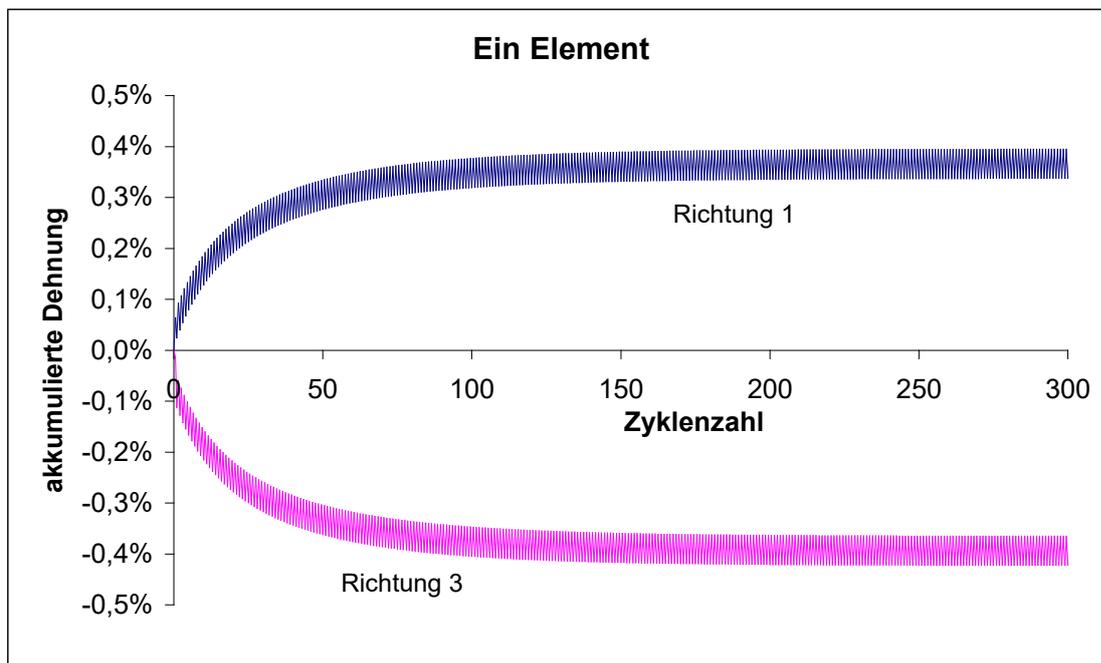


Abbildung 14: Ein Element unter spannungs- und dehnungsgesteuerter Belastung, Fall a), elastisches Einspielen: Entwicklung der Dehnungen über die Zyklenzahl laut exakter FZT

## **5. Anwendung der VFZT auf realistische Strukturen**

Die Bearbeitung dieses Punktes war für Teil 2 des Vorhabens vorgesehen, wurde jedoch durch das BMU nicht mehr beauftragt.

## **6. Schrifttum**

- [1] Hübel,H.: Ermittlung realistischer Ke-Faktoren (Plastizierungsfaktoren) als Grundlage für die Präzisierung des kerntechnischen Regelwerkes hinsichtlich der Ermüdungsanalyse; Schriftenreihe "Reaktorsicherheit und Strahlenschutz" des BMU, BMU-1997-481, August 1996 (Vorhaben SR 2221)
- [2] Hübel,H.: Berechnung akkumulierter Dehnungen nach der Vereinfachten Fließzonen-theorie auf der Grundlage der Zarka-Methode bei zyklischer Belastung (Ratcheting-Nachweis); Bericht für das BMU, Februar 1999 (Vorhaben SR 2226 und SR 2298)
- [3] Sicherheitstechnische Regel des KTA: KTA 3201.2, Komponenten des Primärkreises von Leichtwasserreaktoren, Teil 2, Fassung 6/96, Carl Heymanns Verlag KG, Köln, 1996
- [4] Hübel,H.: Vereinfachte Fließzonentheorie, BAUINGENIEUR Bd. 73 (1998), Nr.11 – November, S. 492- 502
- [5] Hübel,H.: Programm VEFZOT: APDL-Programmierung der VFZT für ANSYS, Version 0.0, 16. April 1998
- [6] Hübel,H.: User-Subroutine der VFZT für ANSYS, Version 0.2, Juni 1999
- [7] Hübel,H.: Basic conditions for material and structural ratcheting, Nuclear Engineering and Design 162 (1996) 55-65 (entspricht der Veröffentlichung "Ratcheting Phenomena", SMiRT 12, paper L08/1, 1993)