Theoretische Grundlagen und Anwendung der Zarka-Methode

Workshop „Vereinfachte Ermüdungsnachweise"
Erlangen, 20.06.2008

Hartwig Hübel
FH Lausitz, Cottbus

Inhalts-Übersicht

→ Teil A: Einführung

Teil B: mon. Belastung

Teil C: zykl. Belastung – elastisches Einspielen

Teil D: zykl. Belastung – plastisches Einspielen:
Ke + Ratcheting

Teil E: zykl. Belastung: Ratch.-Inter.-Diagramme

Zusammenfassung

Zarka-Methode
- wozu? -

Berechnung plastischer Strukturen:
Spannungen, Dehnungen, Verformungen, …

bei monotoner, hauptsächlich aber bei zyklischer Belastung

bestimmte Anforderungen an Belastungshistogramm

bestimmte Anforderungen an das Werkstoffmodell

Näherung an "exakte" step-by-step (inkrementelle) Analyse bei geringerem Berechnungsaufwand

Rückblick (Anfang ´80-er)

Veröffentlichung durch Zarka (Ecole Polytechnique):
ab 1979

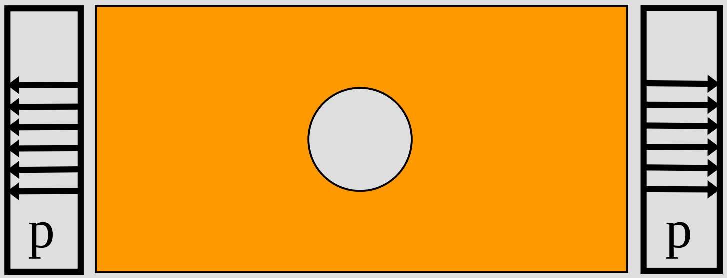
Anwendungen durch Zarka selbst:
- sehr gute Ergebnisqualität (Näherungen fast exakt)
- bei sehr geringem Berechnungsaufwand

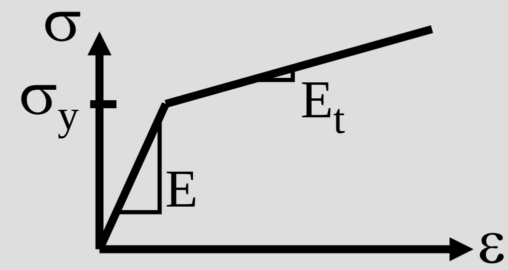
aber:
- keine vollständige Beschreibung der Methode
- heuristisch motivierte Annahmen
- bleibt in Fachöffentlichkeit unverstanden:
  "... erst recht nicht nach diesem Vortrag" (O.T.Bruhns),
  "obskur" (G. Maier)

daher:
- INTERATOM beauftragt Zarka mit Implementierung in ein FE-Programm und Beispielrechnung in Bergisch Gladbach
  → Lochscheibe

Interatom: Lochscheibe

Anwendungsbeispiel Lochscheibe:
- 1-achsige kraftgesteuerte Wechselbelastung
- lin. kin. Verfestigung (2 verschiedene Materialdatensätze)



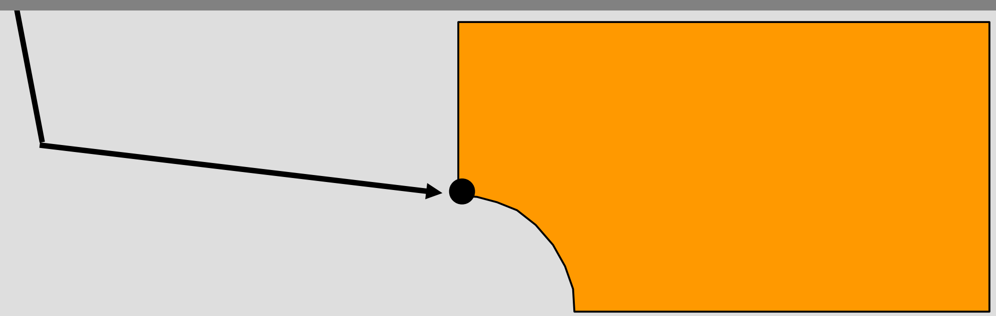


Ergebnis mit 1. Materialdatensatz: z.B. max. Axialdehnung:

→ "exakte" FZT (step-by-step): ε_{max} = 0,46%

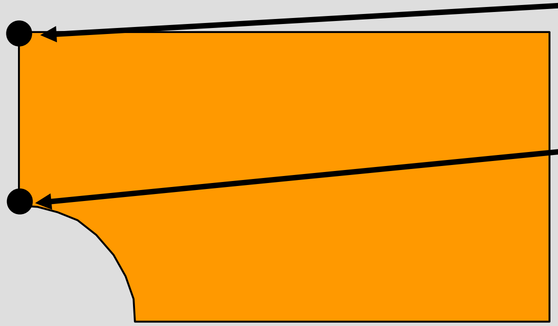
→ Zarka (lower bound): ε_{max} = 0,76%

(upper bound): 0,90%



Interatom: Lochscheibe (2)

Ergebnis mit 2. Materialdatensatz: z.B. max. Axialdehnung:
→ "exakte" FZT (step-by-step): ε_{max} = 0,23%
→ Zarka (lower bound): ε_{max} = 0,90%
(upper bound): 0,64% (Lochrand)
2,0% (an Außenseite)



- ϟ Dehnungen an Außenseite größer als am Lochrand!
- ϟ upper bound < lower bound
- ϟ Mitteldehnung 0,26% (statt tatsächlich 0)

→ Zarka-Methode erscheint quantitativ und qualitativ unzuverlässig

Zwischenstand

Zarka-Methode:
- bleibt zunächst unverständlich
- in von Zarka selbst veröffentlichten Beispielen sehr gut
- laut Beispielrechnung bei Interatom unter Aufsicht von Zarka aber praktisch unbrauchbar

⇓

Dilemma

Inhalts-Übersicht

Theorie der Zarka-Methode

zur Ermittlung des Zustandes eines BT am Ende eines Belastungshistogramms (direkte Methode)

Ausgangspunkt: "exakte" Fließzonentheorie
(mit bestimmten Annahmen für Werkstoffmodell und Belastung)

klassisch:

gesamtes Belastungshistogramm **schrittweise** abarbeiten (step-by-step)

in jedem Belastungs**schritt** mehrere lineare Analysen
(iterative Verbesserung des Gleichgewichts → N.-R.)

Zarka:

äquivalente Umformulierung der exakten FZT
(Einführung transformierter interner Variabler = TIV)

Abschätzungen der TIV für den **Endzustand** des Belastungshistogrammes

im **Endzustand** mehrere lineare Analyse
(iterative Verbesserung → meA)

Werkstoffmodell allg.

Werkstoffmodell: übliche Annahmen für Stähle
(wenn Zeitabhängigkeit vernachlässigbar und nur moderates Plastizieren auftritt):

Additivität bei „kleinen" Verzerrungen:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{th}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{el}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{pl}}$$

Volumenkonstanz bzgl. ε^{pl}:

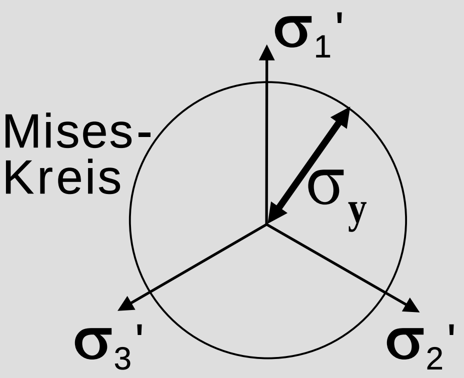
$$\boldsymbol{\varepsilon}_1^{\mathbf{pl}} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{\mathbf{pl}} + \boldsymbol{\varepsilon}_3^{\mathbf{pl}} = \mathbf{0}$$

plastisches Verhalten hängt nicht vom hydrostatischen Spannungszustand ab, sondern nur von seinem Deviator:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{ij}}^{'} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{ij}} - \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{H}}\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{ij}} \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{H}} = \tfrac{1}{3}(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 + \boldsymbol{\sigma}_3)$$

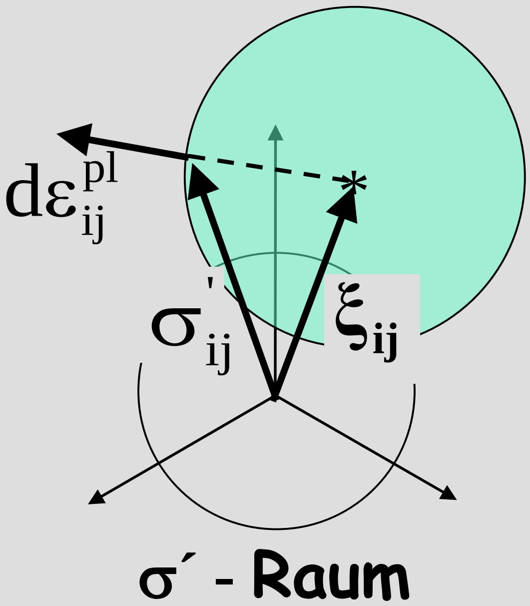
Werkstoffmodell allg. (2)

eine Fließfläche begrenzt den Bereich elastischen Verhaltens im Spannungsraum; Mises-Fließbedingung → Kreis im deviatorischen Hauptspannungsraum



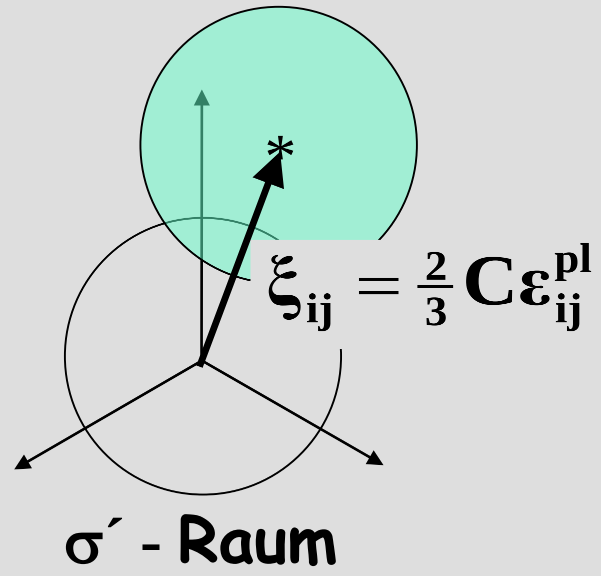
Verfestigung:
die Fließfläche kann sich verschieben (kinematische Verfestigung) und vergrößern (isotrope Verfestigung)
→ interne Variable

Normalenregel: Richtung des plast. Verzerrungsdifferentials ist gegeben durch die äußere Normale zur Fließfläche



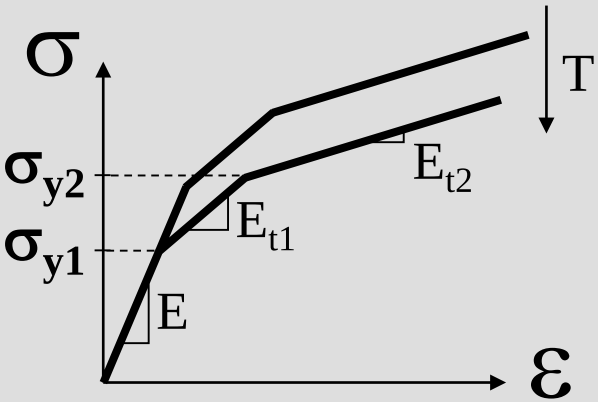
spezielle Anforderung an Werkstoffmodell für Zarka-Methode

kinematische Verfestigung:
multilinear, am einfachsten linear
(Prager-Ziegler: $\xi \sim \varepsilon^{pl}$)
→ nur Struktur-Ratcheting erfassbar, kein Material-Ratcheting



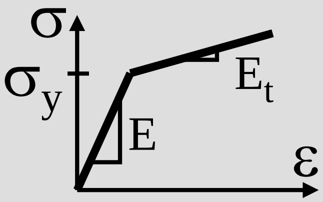
isotrope Verfestigung:
ausgeschlossen

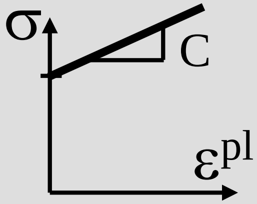
Temperaturabhängigkeit:
zulässig nur für Streckgrenze σ_y,
nicht für E, ν, E_t



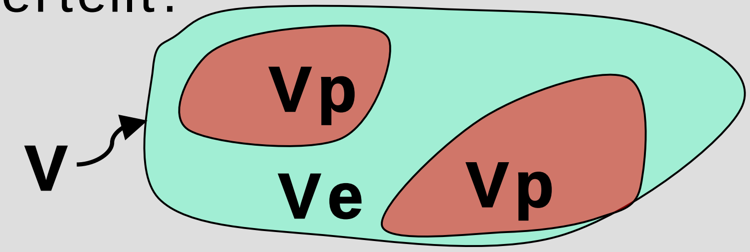
äquivalente Umformulierung der exakten FZT

hier am Beispiel:
- 1-achsiger Spannungszustand
- bilineares $\sigma-\varepsilon$-Diagramm (lin. kinem. Verfest.)
- monotone Belastung





das Volumen V eines Tragwerks wird unterteilt:
- Fließzone: $|\sigma| \geq \sigma_y \rightarrow$ Vp
- elast. Bereich: $|\sigma| < \sigma_y \rightarrow$ Ve

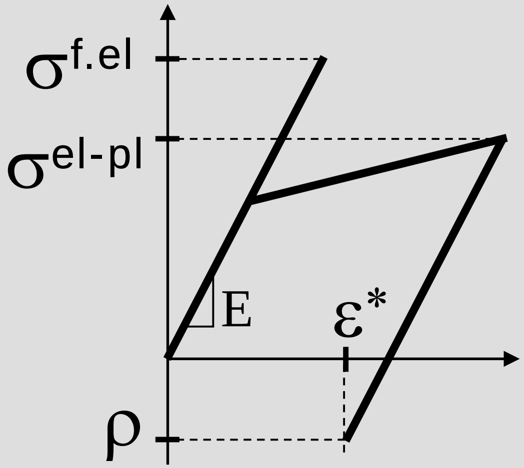


äquivalente Umformulierung der exakten FZT (2)

Art der Analyse	**in Vp**	**in Ve**	**Belast.**
exakte FZT (el-pl)	$\varepsilon^{el\text{-}pl} = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{pl}$ $\rightarrow\ \varepsilon^{el\text{-}pl} = \sigma^{el\text{-}pl}/E + \xi/C$	$\varepsilon^{el\text{-}pl} = \varepsilon^{el}$ $\rightarrow\ \varepsilon^{el\text{-}pl} = \sigma^{el\text{-}pl}/E$	ja
fiktiv elast. (f.el)	$\varepsilon^{f.el} = \sigma^{f.el}/E$	$\varepsilon^{f.el} = \sigma^{f.el}/E$	ja
Differenz	$\underbrace{\varepsilon^{el\text{-}pl}-\varepsilon^{f.el}}_{\varepsilon^*} = (\underbrace{\sigma^{el\text{-}pl}-\sigma^{f.el}}_{\rho})/E + \xi/C$	$\underbrace{\varepsilon^{el\text{-}pl}-\varepsilon^{f.el}}_{\varepsilon^*} = (\underbrace{\sigma^{el\text{-}pl}-\sigma^{f.el}}_{\rho})/E$	nein

ρ Restspannung

$\boldsymbol{\varepsilon}^*$ Restdehnung



äquivalente Umformulierung der exakten FZT (3)

nach Einführung einer "transformierten internen Variable" Y:

$$\mathbf{Y} \overset{\text{def}}{=} \xi - \rho$$

Art der Analyse	in Vp	in Ve	Belastung
Differenz	$\varepsilon^* = \rho / E + (\rho + \mathbf{Y}) / C$ $= \rho\,(1/E + 1/C) + \mathbf{Y}/C$	$\varepsilon^* = \rho / E$	nein

dies entspricht einem linear elastischen Problem mit zwei unterschiedlichen E-Moduln (in Vp und Ve) und Belastung durch Anfangsdehnungen ε_0 in Vp:

Differenz	$\varepsilon^* = \rho / E^* + \varepsilon_0$ mit $1/E^* = 1/E + 1/C$	$\varepsilon^* = \rho / E$	Anf.dehnung in Vp: $\varepsilon_0 = \mathbf{Y}/C$

Lösung durch eine "modifizierte elastische Analy<se" (meA), sofern Vp und Y bekannt;
modifiziert sind: elast. Materialdaten (E^*) und Belastung (ε_0)

ja und?

wieso soll es nun vorteilhaft sein, nach Zarka

$$\varepsilon^* = \rho\,(1/E+1/C) + \mathbf{Y}/C$$

zu schreiben statt entweder klassisch

$$\varepsilon^* = \rho / E + \xi / C$$ für den Restspannungszustand

oder auch direkt

$$\varepsilon = \sigma^{el\text{-}pl} / E + \xi / C$$ für den Belastungszustand,

bzw.: welchen Vorteil bietet die Einführung von Y gegenüber ξ ?

→ eigentliche Idee der Zarka-Methode:
Y kann abgeschätzt werden,
während wir von ξ praktisch nichts wissen!

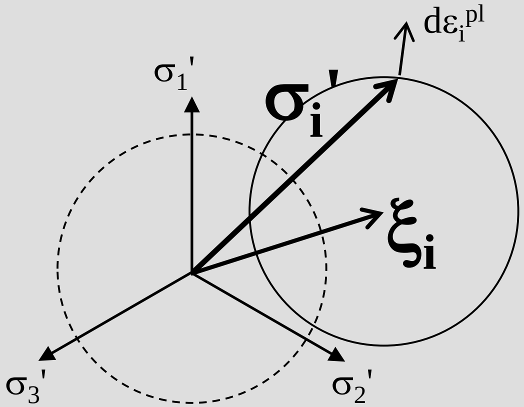
dazu: Fließbedingung umformulieren,
z.B. für 1-achsige Zugspannung unter monotoner Belastung:

$$\sigma=\xi+\sigma_{\mathbf{y}} \rightarrow \sigma=(Y+\rho)+\sigma_{\mathbf{y}} \rightarrow \sigma-\rho=Y+\sigma_{\mathbf{y}} \rightarrow \sigma^{\mathbf{f.el}}=Y+\sigma_{\mathbf{y}} \rightarrow Y=\sigma^{\mathbf{f.el}}-\sigma_{\mathbf{y}}$$

Y-Raum

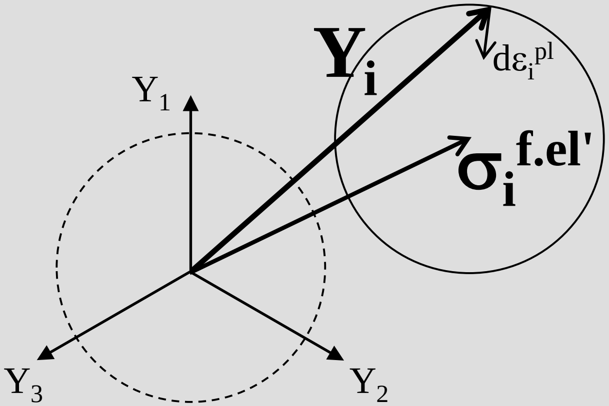
allg. kann die Fließfläche im Raum der TIV (Y-Raum) ähnlich dargestellt werden wie im deviatorischen Spannungsraum:

σ' - Raum:



- Mises-Kreis um ξ
- Radius σ_y
- $d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$ in Richtung der äußeren Normalen

Y- Raum:

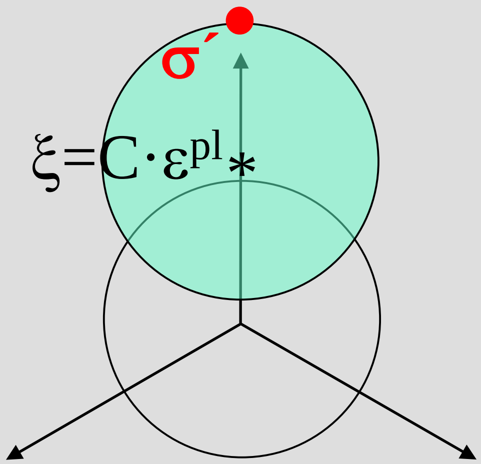


- Mises-Kreis um $\sigma^{f.el}$
- Radius σ_y
- $d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$ in Richtung der inneren Normalen

Abschätzung von Y (monotone Belastung)

hier: - 1-achsiger Spannungszustand
- bilineares σ–ε-Diagramm (lin. kinem. Verfest.)
- der Einfachheit halber erst mal für monotone Belastung

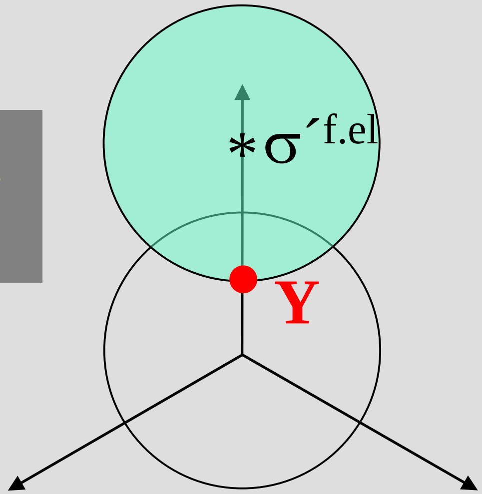
zunächst im σ´- Raum:



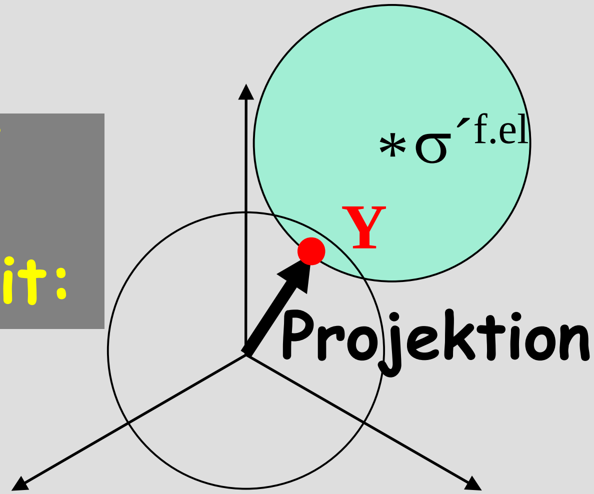
- Lage des Mises-Kreises bleibt vor der el-pl Analyse unbekannt, denn σ´ ist unbekannt und nicht gut abschätzbar, wie auch ξ (bzw. ε^{pl});
- denn diese hängen über die Feldgleichungen (Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen) auf komplizierte Weise stark von der Umgebung ab, also vom Verhalten benachbarter Stellen des Tragwerks

Abschätzung von Y (2)

anders im Y- Raum:



bzw. bei Mehr-achsigkeit:



- Lage des Mises-Kreises von vornherein bekannt (weil f.el. Lösung ohne weiteres bekannt)
- bei 1-achsiger Spannung kann sich Y während der Belastung nur in dieser Richtung auf diesen Mises-Kreis hin entwickeln, ist also sofort genau bekannt!

→ es genügt lokale Betrachtung für exakte Lösung!

- bei *räumlichen* Spannungs-zuständen ist Y zwar streng genommen unbekannt, aber es zeigt sich, dass Y nur schwach von den Feldgleichungen abhängt
- daher auf rein lokaler Basis gut abschätzbar: durch Projektion auf Mises-Kreis

→ es genügt lokale Betrachtung als Näherung!

Berechnungsablauf
(mon. Belast., 1-achsige Spannung)

fiktiv elastische Analyse (f.el) des max. Belastungszustandes → $\sigma^{f.el}$

↓

schätze die Ausdehnung der Fließzone Vp → **Vp**

berechne die TIV Y → **Y**

↓

modifiziere Belastung:
tatsächliche Belast. → Anf.dehn. ε_0

modifiziere E-Modul:
$E \rightarrow E^*$

modifizierte elastische Analyse (meA) → **ρ**

↓

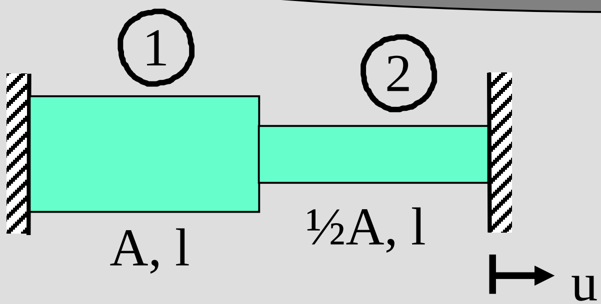
elastisch-plastische Lösung durch Superposition, z.B. $\sigma^{el\text{-}pl} = \sigma^{f.el} + \rho$ → **$\sigma^{el\text{-}pl}$, $\varepsilon^{el\text{-}pl}$, Verform. usw.**

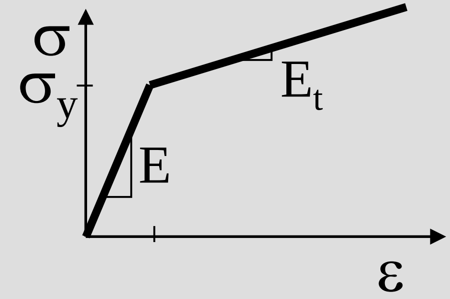
↓

iterative Verbesserung von Vp

bei 1-achsiger Spannung: Y stets exakt bekannt in Fließzone Vp;
iterative Verbesserung hier also nur für Identifizierung von Vp

Bsp. 1: Zweistab-Modell (hintereinander) (mon. Belast., 1-achsig)





Gleichgewicht:	$N_1 = N_2$	$\rightarrow \sigma_2 = 2\sigma_1$
Verträglichkeit:	$\Delta l_1 + \Delta l_2 = u$	$\rightarrow \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = u/l$

Zarka: Stab 2 → Vp: $\varepsilon_2^* = \varepsilon_{0,2} + \dfrac{\rho_2}{E_t}$ mit $\varepsilon_{0,2} = \dfrac{\sigma_2^{f.el} - \sigma_y}{C}$ aus $Y_2 = (\sigma_2^{f.el} - \sigma_y)$

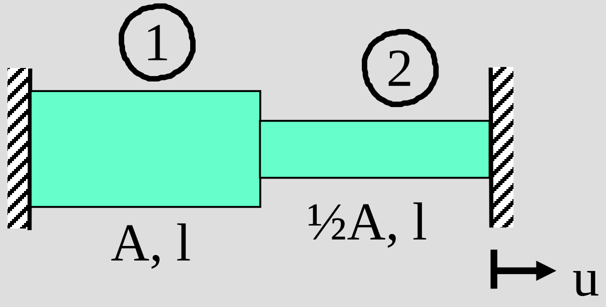
Annahme: Stab 1 → Ve: $\varepsilon_1^* = \dfrac{\rho_1}{E}$

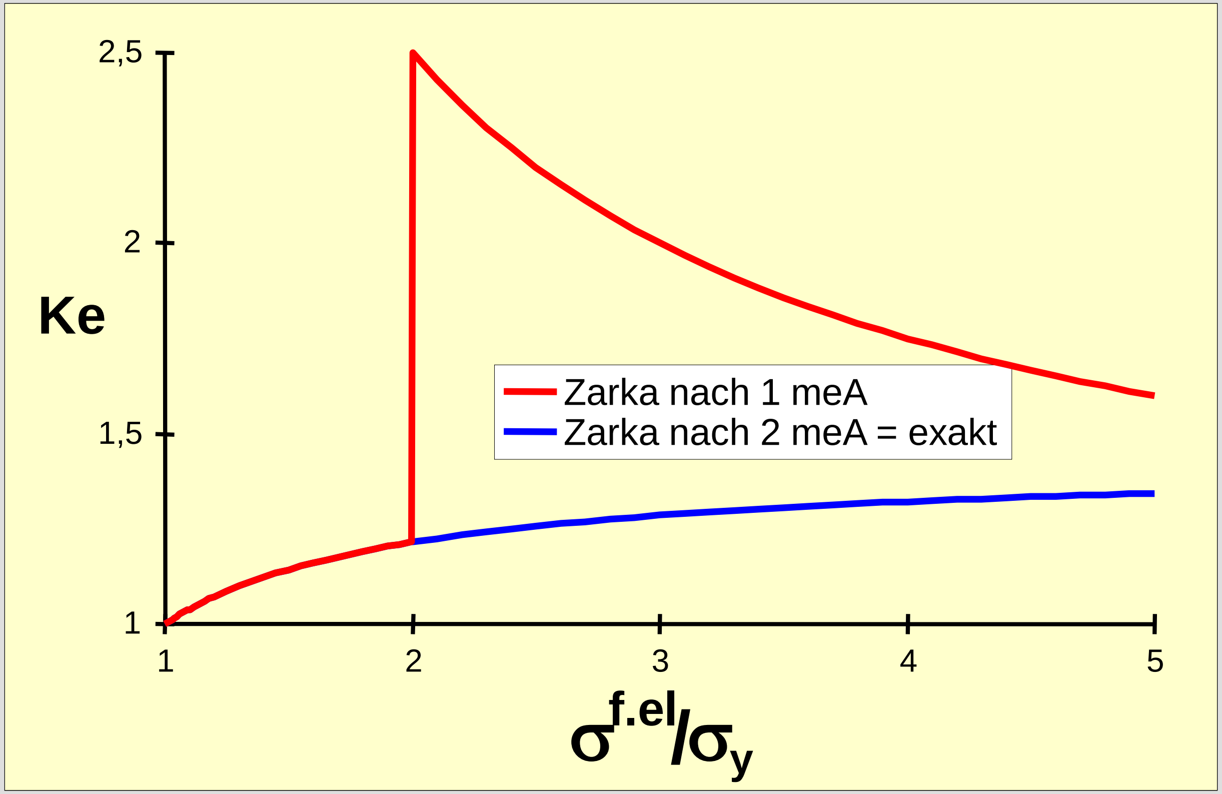
meA (aus $\rho_2 = 2\rho_1$ und $\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* = 0$):

$$\rightarrow \rho_2 = -\frac{(\sigma_2^{f.el} - \sigma_y)}{2 + \frac{E}{E_t}} \frac{E}{C} \quad \rightarrow \quad \sigma_2^{el-pl} = \sigma_2^{f.el} + \rho_2$$

Bsp. 1: (2)

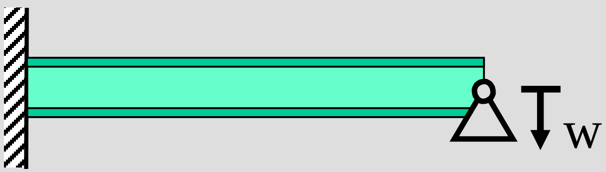
z.B. für E_t/E=0,1 als plast. Dehnungserhöhungsfaktor Ke über das Belastungsniveau:

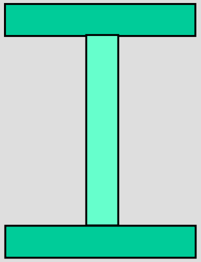


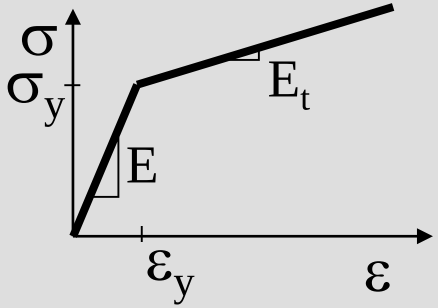


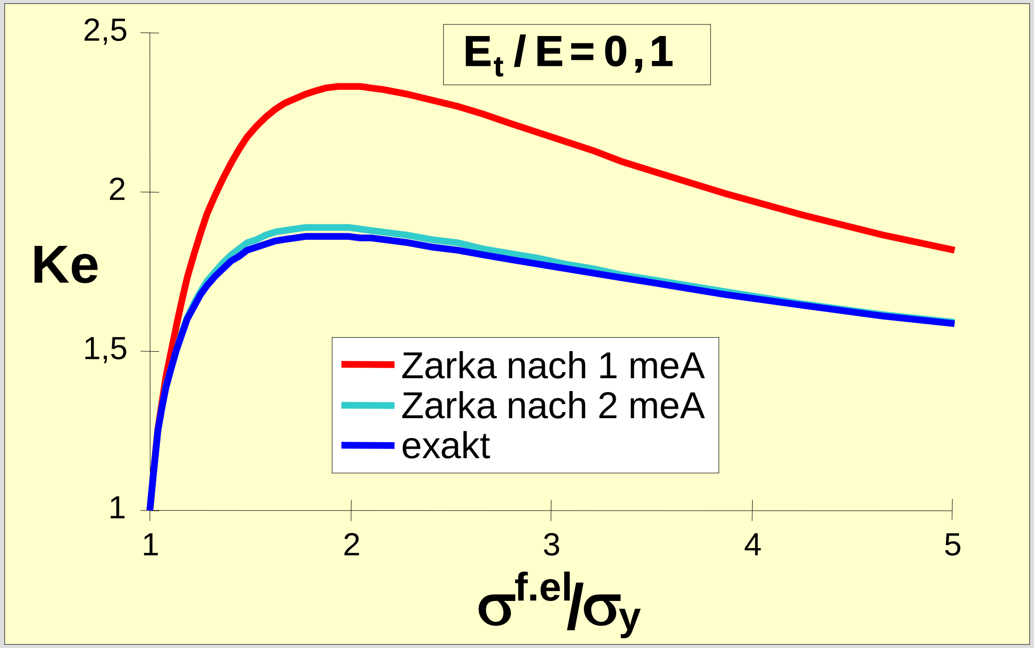
Ergebnis: Zarka = exakt nach spätestens 2 meA

Bsp. 2:
Balken mit I-Profil
(mon. Belast., 1-achsig)









Ergebnis: Zarka bietet gute Näherung nach 2 meA

Implementierung in ANSYS

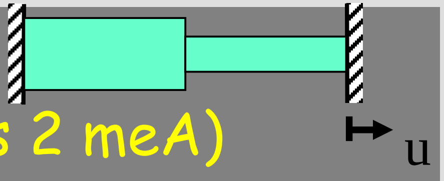
Implementierung in ein FE-Programm:

- Möglichkeit zur Vorgabe von Anfangsdehnungen (oder -spannungen) als Belastung
- Ausführung der verschiedenen linear elastischen Analysen (f.el, meA)
- Iterations-Algorithmus für Bestimmung von Vp (und bei mehrachsiger Spannung auch für Y)
- Superposition der f.el- und der meA-Ergebnisse

in ANSYS:

- realisiert über die User-subroutine "ustress"
- bisher nur für bilineares σ-ε-Diagramm und T-unabh. σ_y

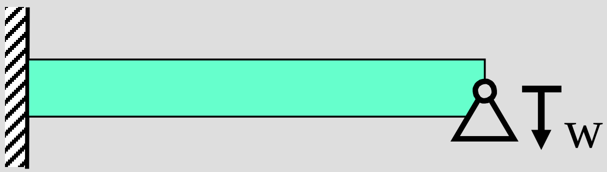
z.B. Zweistab-Modell (hintereinander):

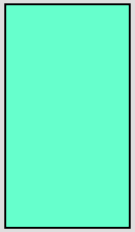


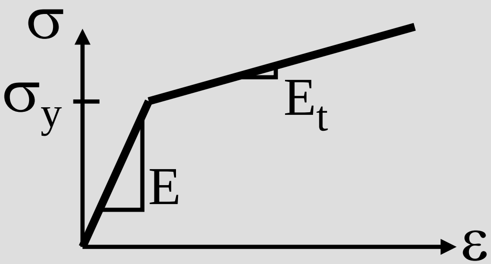
Zarka-Methode: 2 oder 3 lin. Analysen (1 f.el + 1 bis 2 meA)

"exakte" FZT: z.B. 7 oder 14 lin. Analysen (abh. vom Belastungsniveau) für full Newton-Raphson mit adaptive descent bei voreingestellten Konvergenzkriterien

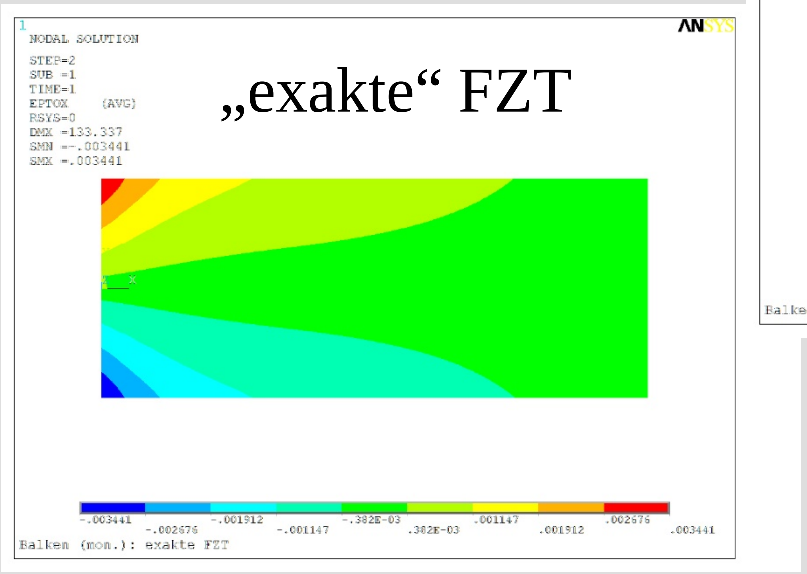
Bsp. 3: Balken mit Rechteck-Profil (mon. Belast., 1-achsig)

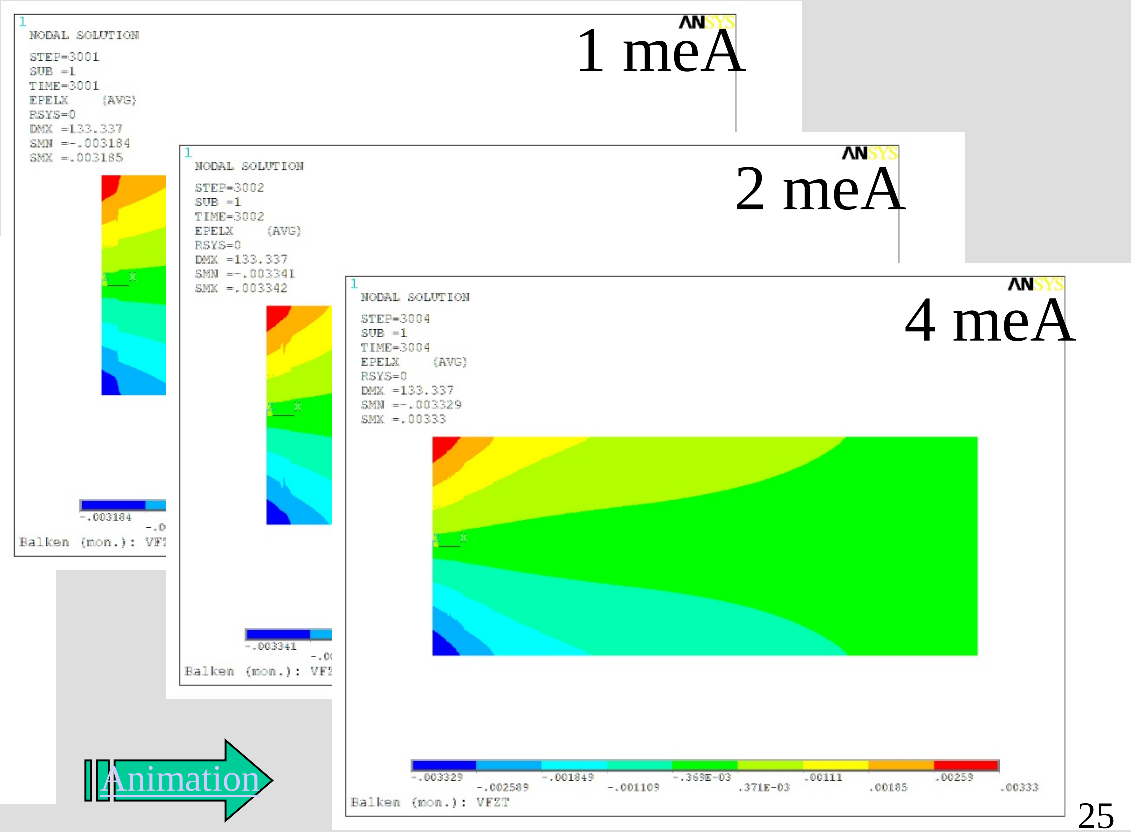






z.B. Dehnungen für
$E_t/E = 0{,}05$
$\sigma^{f.el}/\sigma_y = 2{,}0$:





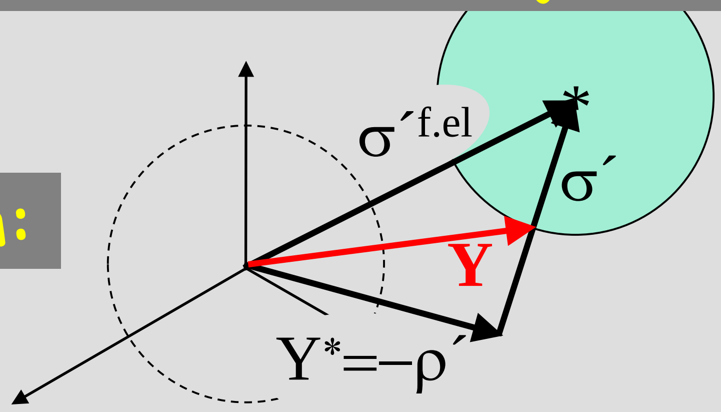
Animation

iterative Verbesserung von Y (mehrachsige Spannung)

bei 1-achsiger Spannung:
Verhältnis der Spannungskomponenten zueinander ist während des Belastungsprozesses immer konstant ($\sigma_2/\sigma_1 = \sigma_3/\sigma_1 = 0$)
→ direktionale Spannungsumlagerung nicht möglich
→ die TIV Y ist von vornherein bekannt

bei mehrachsige Spannung:
→ direktionaler Umlagerung möglich
→ Bestimmung der TIV durch Projektion des Koordinatenursprungs auf Mises-Kreis im Y-Raum ist nur eine Näherung
→ iterative Verbesserung von Y mit heuristisch motivierten Annahmen, z.B. durch Projektion von $Y^* = -\rho'$:

Y- Raum:



spezielle Details (bzgl. Projektion, iterativer Verbesserung von Vp usw.): Zarka-Methode → VFZT

Berechnungsablauf (mon. Belast., mehrachs. Spannung)

fiktiv elastische Analyse (f.el) des max. Belastungszustandes → $\sigma^{f.el}$

↓

schätze die Ausdehnung der Fließzone Vp → **Vp**

schätze die TIV Y ab → **Y**

↓

modifiziere Belastung:
tatsächliche Belast. → Anf.dehn. ε_0

modifiziere elastische Parameter:
E, ν → E*, ν^*

modifizierte elastische Analyse (meA) → ρ

↓

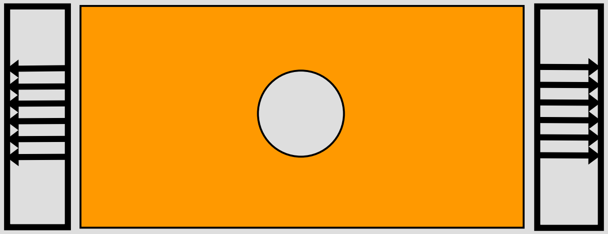
elastisch-plastische Lösung durch Superposition, z.B. $\sigma^{el\text{-}pl} = \sigma^{f.el} + \rho$ → $\sigma^{el\text{-}pl}$, $\varepsilon^{el\text{-}pl}$, **Verform. usw.**

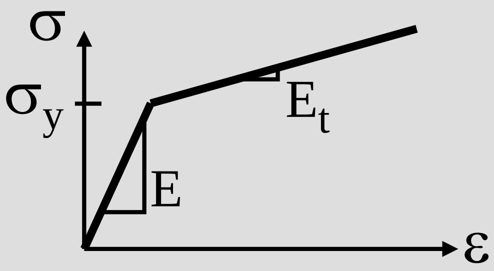
↓

iterative Verbesserung von Vp und von Y

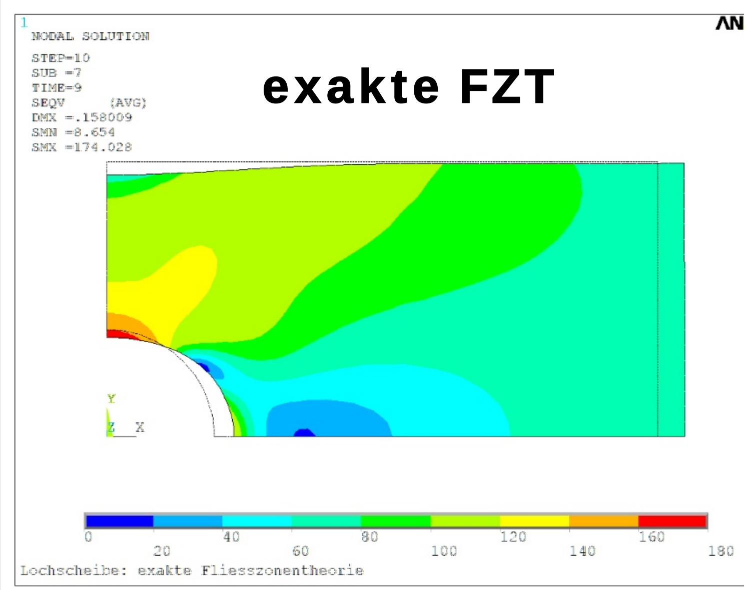
Bsp. 4: Lochscheibe (mon. Belast., mehrachsig)

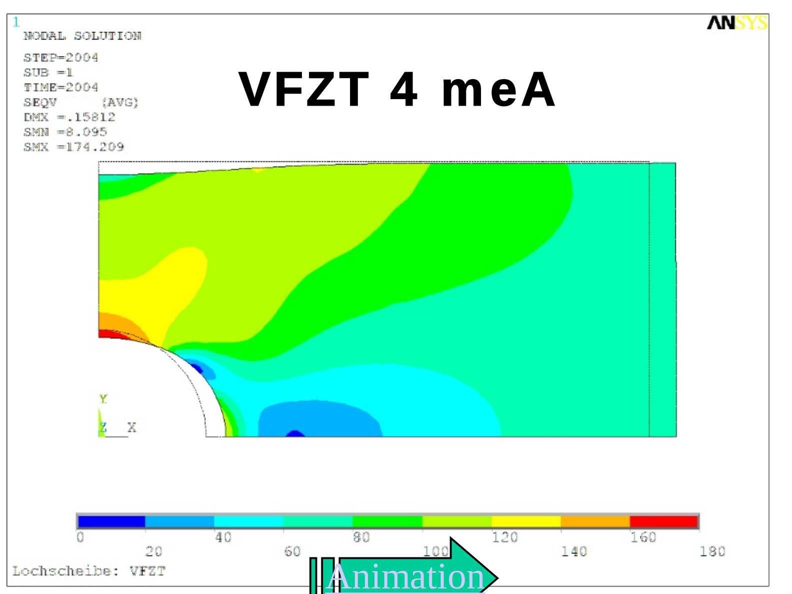
damit nun erneut Interatom-Lochscheibe gerechnet:





Verform.
+
Mises-Vglssp.

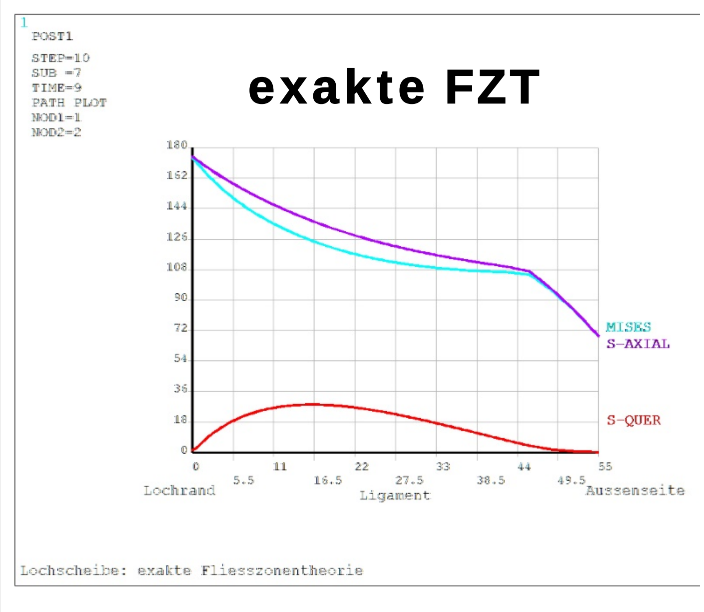


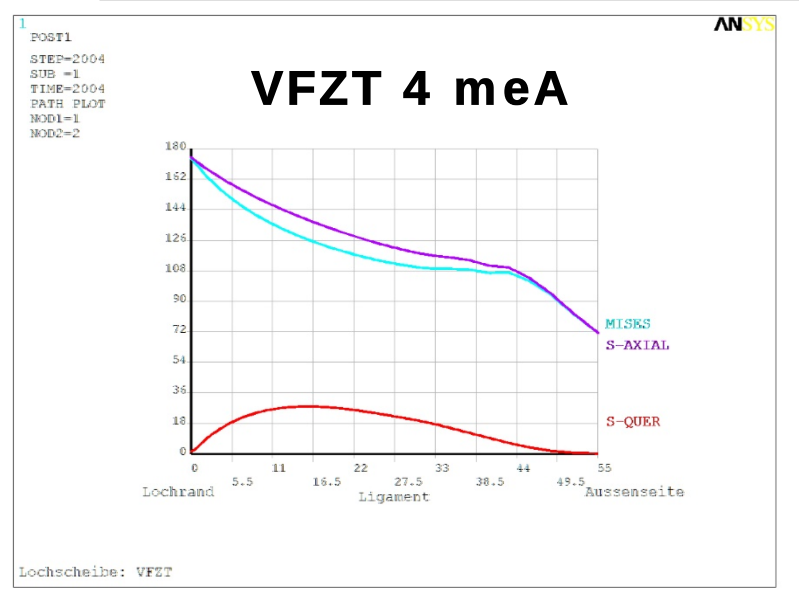


Animation

Bsp. 4 (2)

Pfad entlang Ligament (Spann- ungen):



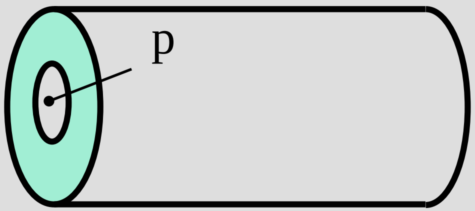


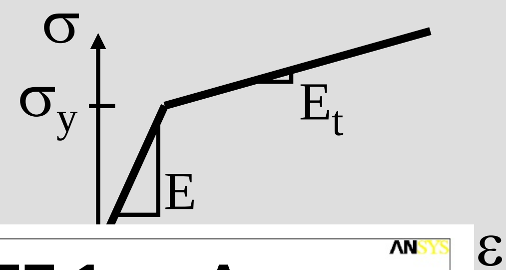
Ergebnis:

ε_x = 0,59 % „exakte“ FZT
0,59 % VFZT 4 meA
(0,36 % zum Vgl. nach Neuber)

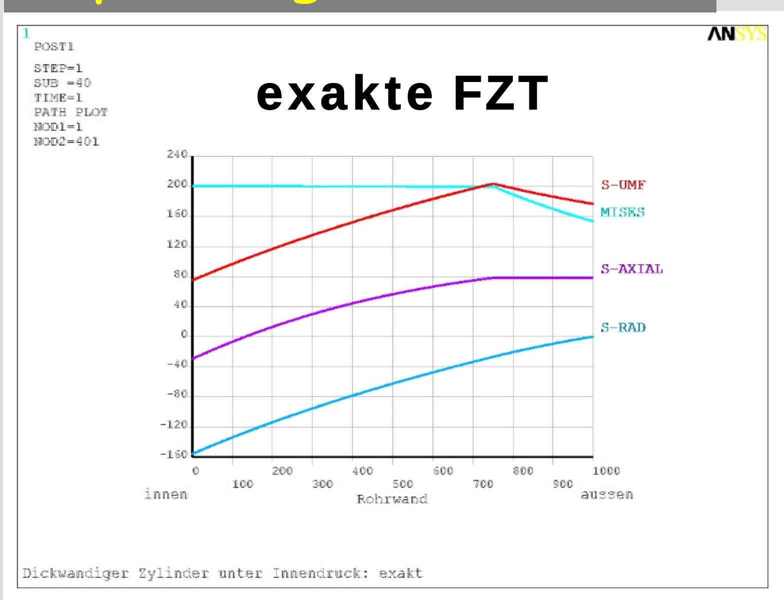
→ sehr gute Ergebnisqualität nach 4 meA
→ warum damals bei Interatom so schlecht? (evt. ohne iterative Verbesserung?)

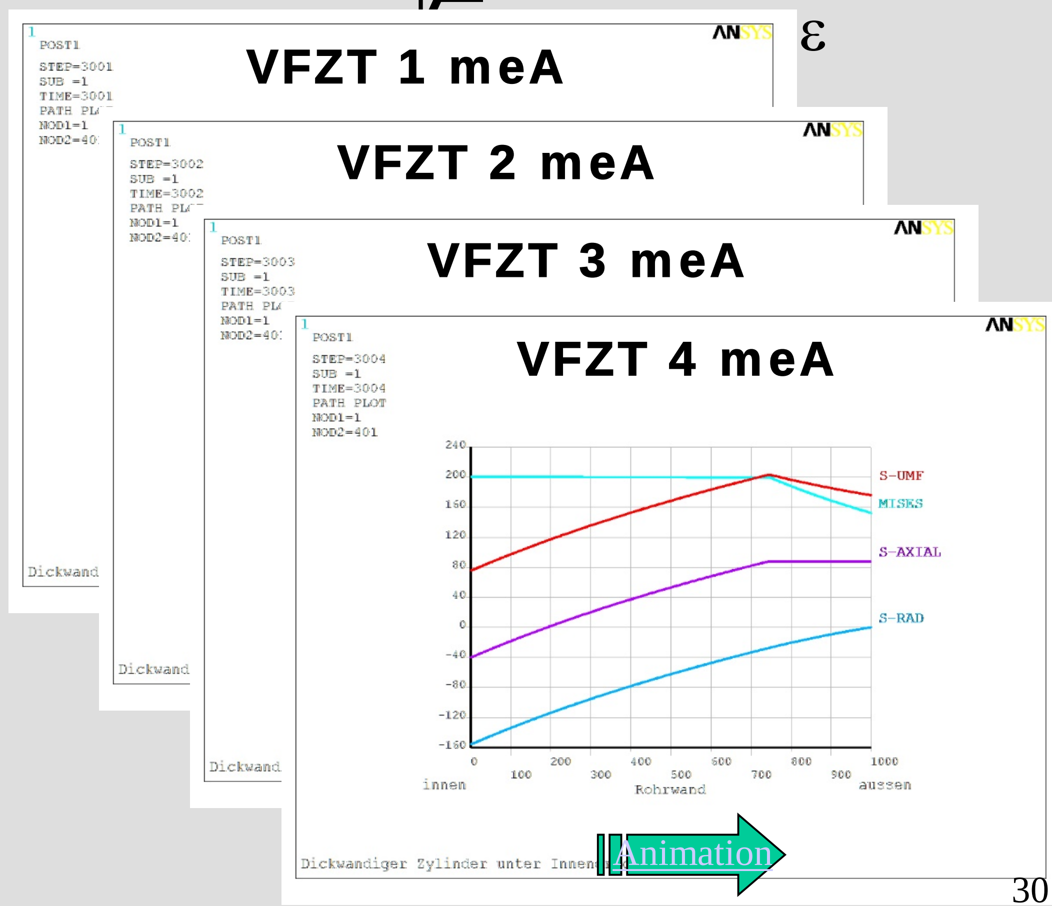
Bsp. 5: dickwandiger Zylinder (mon. Belast., mehrachsig)



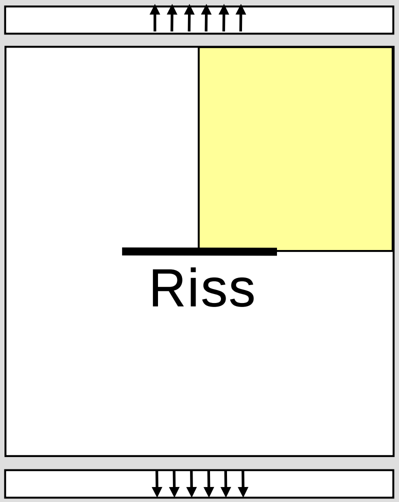


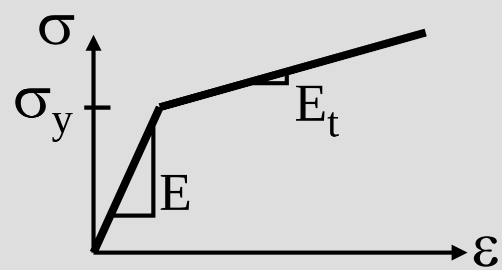
Pfad über Wanddicke (Spannungen):





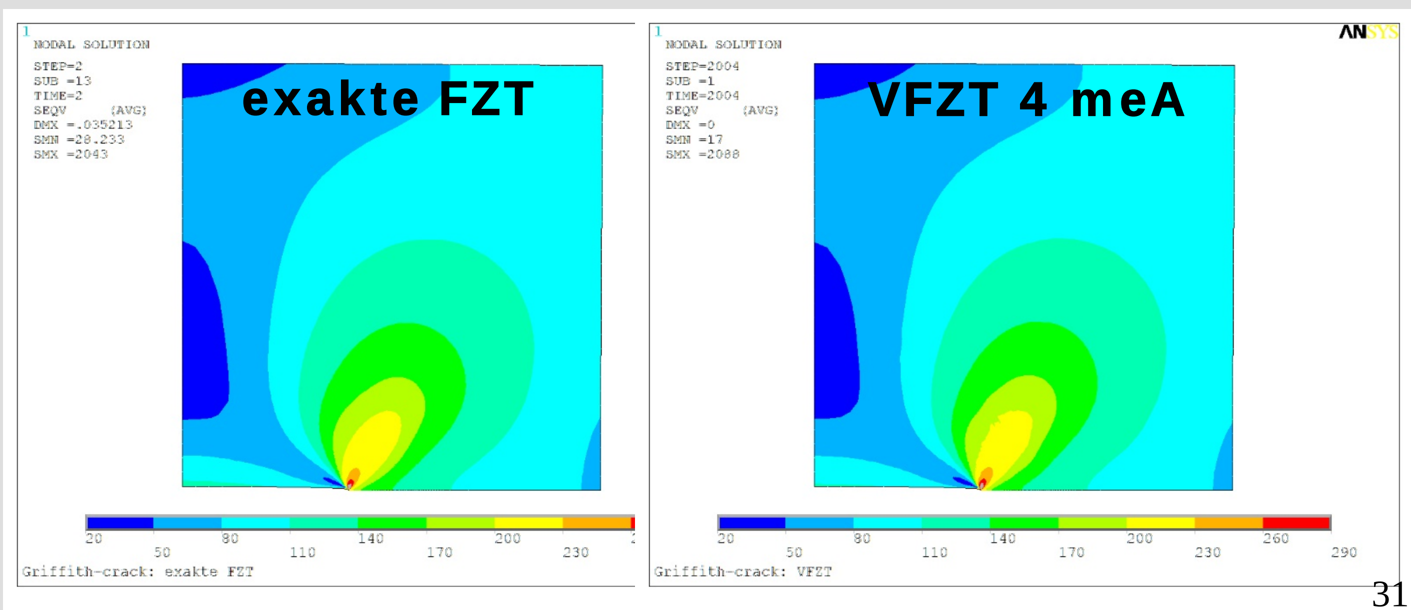
Bsp. 6: Griffith-Riss (mon. Belast., mehrachsig)





$E_t/E=0,1$
$\nu=0,3$

Mises-Vglssp.



Zwischenstand: mon. Belastung

Zarka-Methode (bzw. VFZT):

- bisher nur monotone Belastung betrachtet
- bei bisherigen Beispielen nach wenigen meA gute Näherung an alle gewünschten Größen (Spannungs- und Dehnungs-komponenten, Verformungen, ...)
- Ersparnis an Rechenzeit gegenüber der „exakten“ FZT mit Newton-Raphson-Iteration:
  nur moderat; ließe sich evt. auch anders realisieren (large step, grobe Konvergenztoleranzen)

⇓

Haupt-Einsatzgebiet wird zyklische Belastung sein!

Inhalts-Übersicht

Teil A: Einführung

Teil B: mon. Belastung

→ Teil C: zykl. Belastung – elastisches Einspielen

Teil D: zykl. Belastung – plastisches Einspielen:
Ke + Ratcheting

Teil E: zykl. Belastung: Ratch.-Inter.-Diagramme

Zusammenfassung

Einspielen infolge zyklischer Belastung

ist die Belastung nicht monoton, sondern veränderlich, so spielt jedes Bauteil bei unbeschränkter Verfestigung ein (nach endlich oder unendlich vielen Belastungszyklen)

bis dahin werden Beanspruchungen von einem Belastungszyklus zum nächsten einsinnig akkumuliert, also z. B. die Dehnungen immer größer

→ bleiben zwar endlich ("finites Ratcheting"), aber wie groß?

2 unterschiedliche Einspielzustände zu unterscheiden:

- elastisches Einspielen: im Einspielzustand kommt es nur noch zu rein elastischen Zustandsänderungen; bis dahin aufgetretene plastische Verzerrungen sind dann "eingefroren"
- plastisches Einspielen: im Einspielzustand kommt es zu Wechselplastizieren → Ermüdung (Faktor Ke)

Einspielen infolge zyklischer Belastung (2)

Feststellung der Natur des Einspielzustandes:

ist allein auf Grund der fiktiv elastisch berechneten Beanspruchungen möglich:

wenn

$$\Delta\sigma_v^{f.el} \leq 2\,\sigma_y$$

zwischen allen Belastungszuständen → elastisches Einspielen (ES)

sonst → plastisches Einspielen (PS)

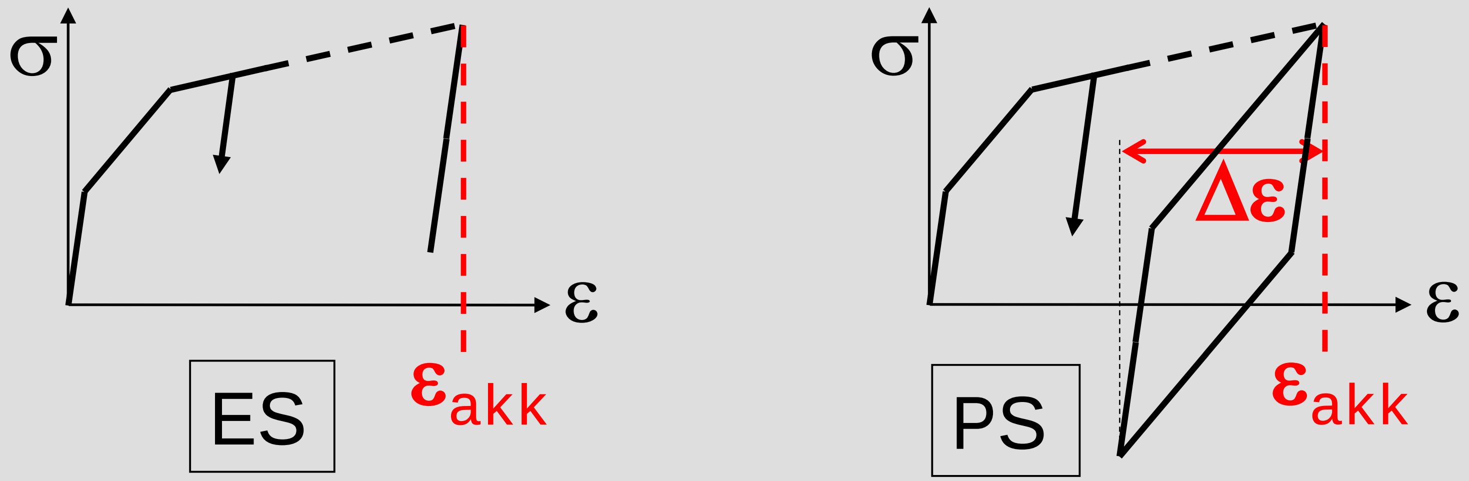
Ermittlung der Beanspruchungszustände im Einspielzustand (akkum. Dehnung, Dehnschwingbreite, ...):

- entweder durch inkrementelle Analysen
- oder durch direkte Methoden (z.B. Zarka-Methode); dabei bleiben einige Informationen unbekannt, z.B. Anzahl der erforderlichen Zyklen bis zum Einspielen

Zarka-Methode für zyklische Belastung

die Zarka-Methode ist eine direkte Methode zur:

- Abschätzung der bis zum Erreichen des Einspielens akkumulierten Verzerrungen ε_{akk}
  → Ratcheting-Nachweis bei ES und PS



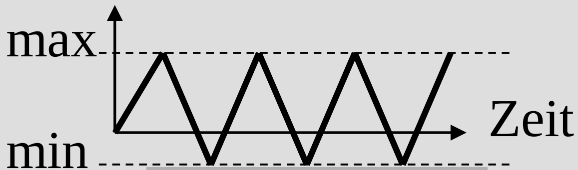
- und bei PS auch zur Abschätzung der Dehnschwingbreite $\Delta\varepsilon$ (bzw. Faktor Ke) und somit auch der Mitteldehnung ε_m
  → Ermüdungs-Nachweis

Abschätzung von Y bei ES

hier: - bilineares σ–ε-Diagramm (lin. kinem. Verfest.)
- Beschränkung auf 2 Belastungszustände "max" und "min"

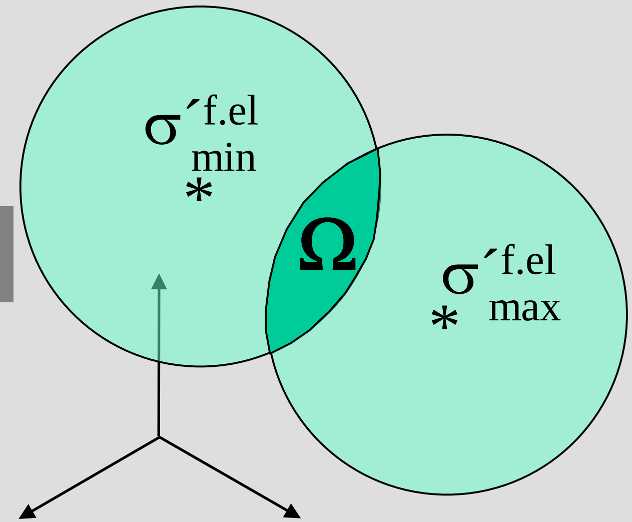
Belastungs-Histogramm:

konst. Belast.



zykl. Belast.

Y- Raum:

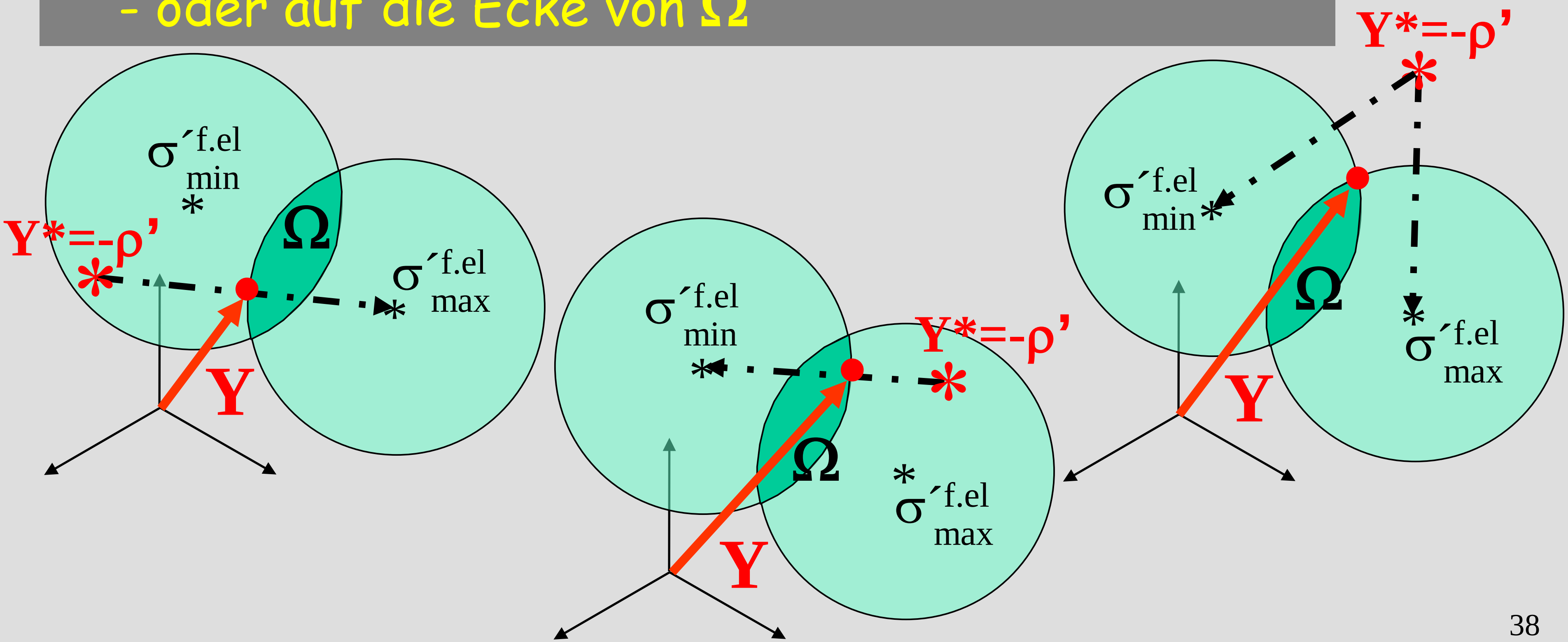


nachdem sich elastisches Einspielen eingestellt hat, treten keine weiteren plastischen Vorgänge mehr auf
→ Y ist konstant

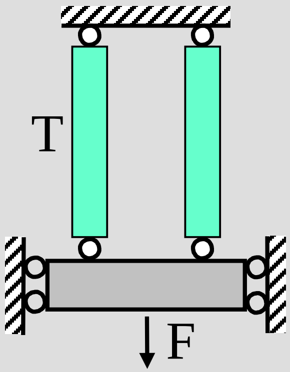
Y-Zustände außerhalb des Mises-Kreises unzulässig
→ Y muss in der Schnittfläche Ω der beiden Mises-Kreise liegen

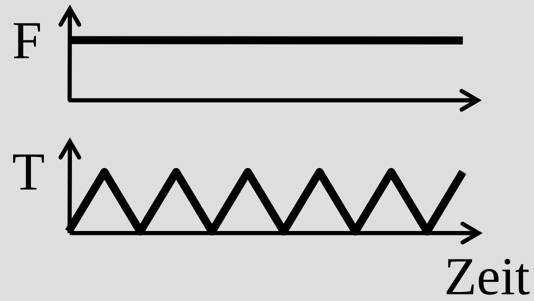
Abschätzung von Y bei ES (2)

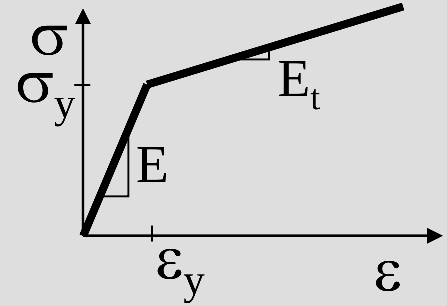
wenn $Y^*=-\rho'$ außerhalb Ω
→ Vp
→ Projektion von Y* auf Ω, also bei 2 Belastungszuständen (max. und min.) 3 Möglichkeiten:
- entweder auf Mises-Kreis um max. $\sigma^{f.el}$
- oder auf Mises-Kreis um min. $\sigma^{f.el}$
- oder auf die Ecke von Ω



Bsp. 7:
Zweistab-Modell (parallel)
(ES, 1-achsig)

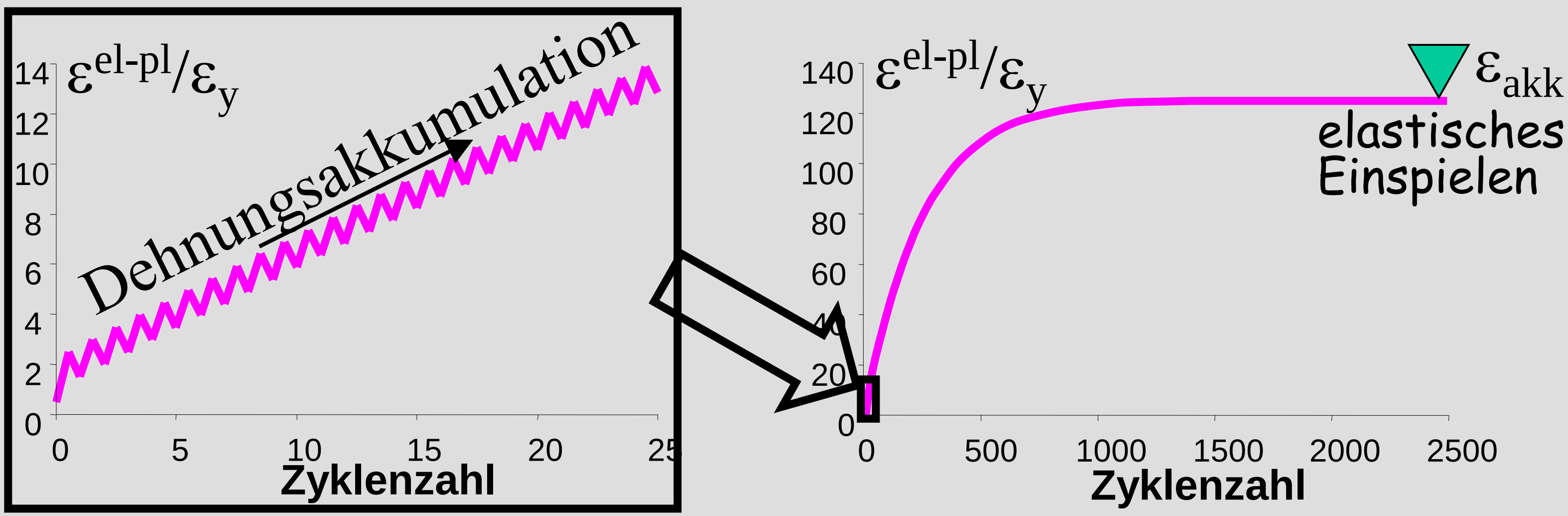




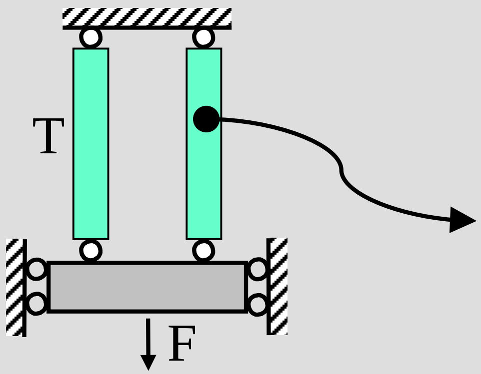


z.B. $E_t/E = .001$, $\sigma_p/\sigma_y = 0.5$, $\sigma_t/\sigma_y = 1.25$:

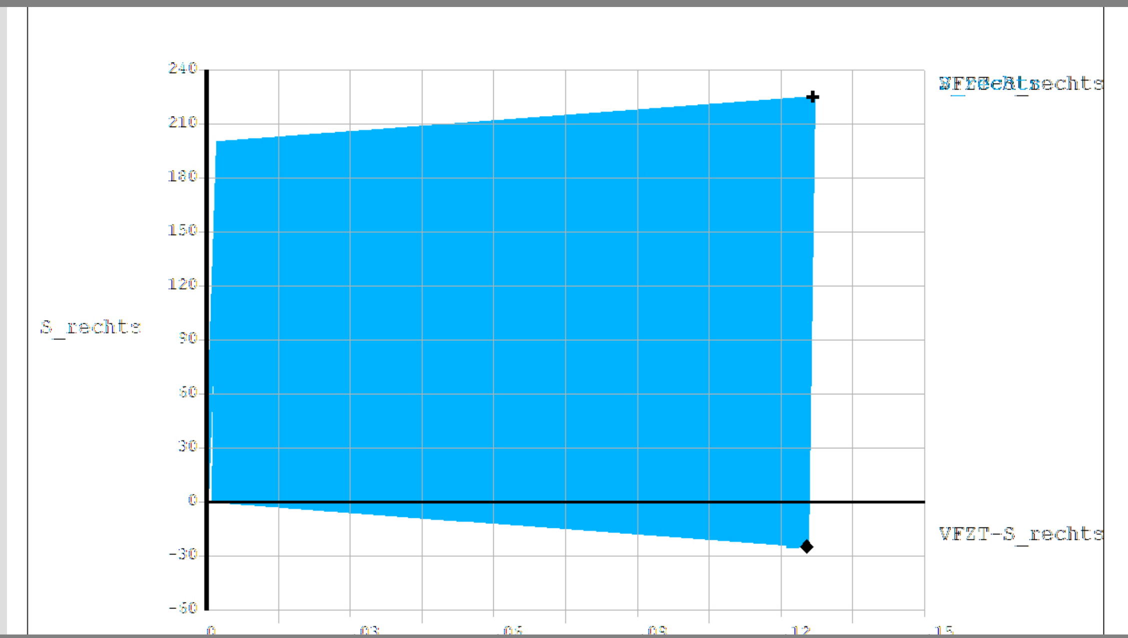
inkre-mentell



Bsp. 7: (2)



Lastumkehrpunkte im σ–ε-Diagramm:



Ergebnis ε_{akk}:

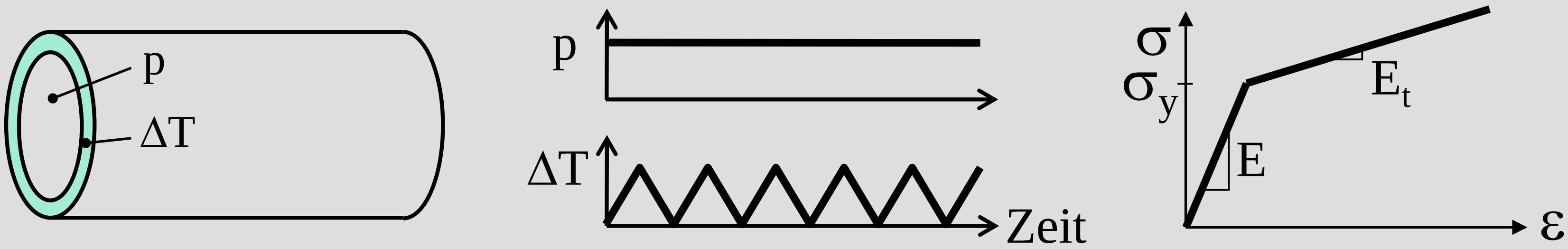
→ inkrementell und VFZT identisch, weil Y a priori exakt bekannt (wg. 1-Achsigkeit)

Berechnungsaufwand:

→ inkrementell: ca. 12.000 lineare Analysen (1.200 Zyklen * 2 Lastschritte * 5 Iterationen)

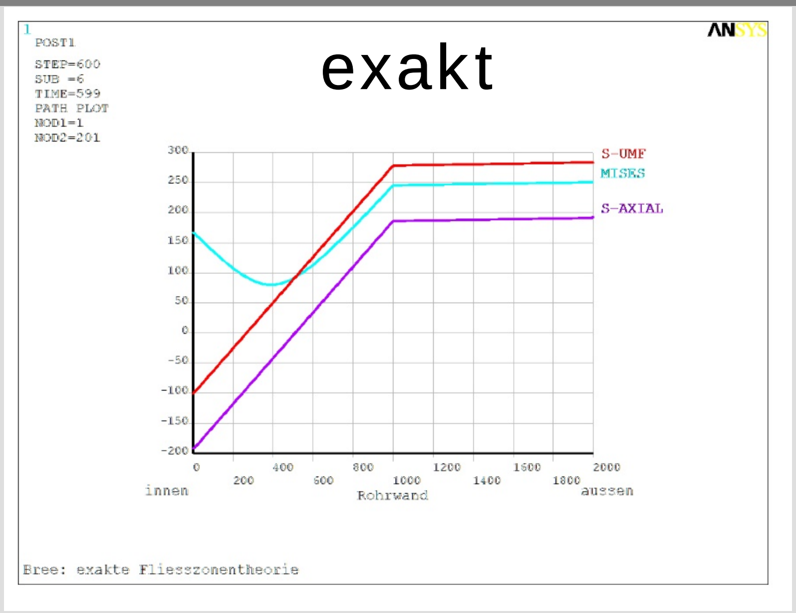
→ VFZT: 2 f.el. + 2 meA = 4 lineare Analysen

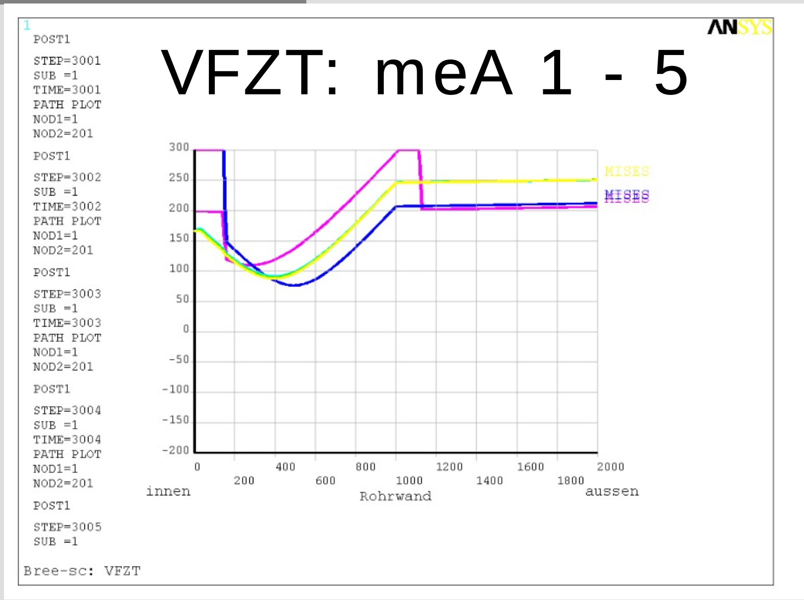
Bsp. 8: Bree-Fall (ES, mehrachsig)



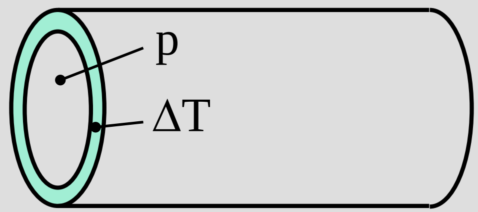
z.B. $E_t/E=.01$, $\sigma_p/\sigma_y=0.8$, $\sigma_t/\sigma_y=1.9$: ES nach ca. 180 Zyklen

Pfad über Wanddicke (Spannungen):



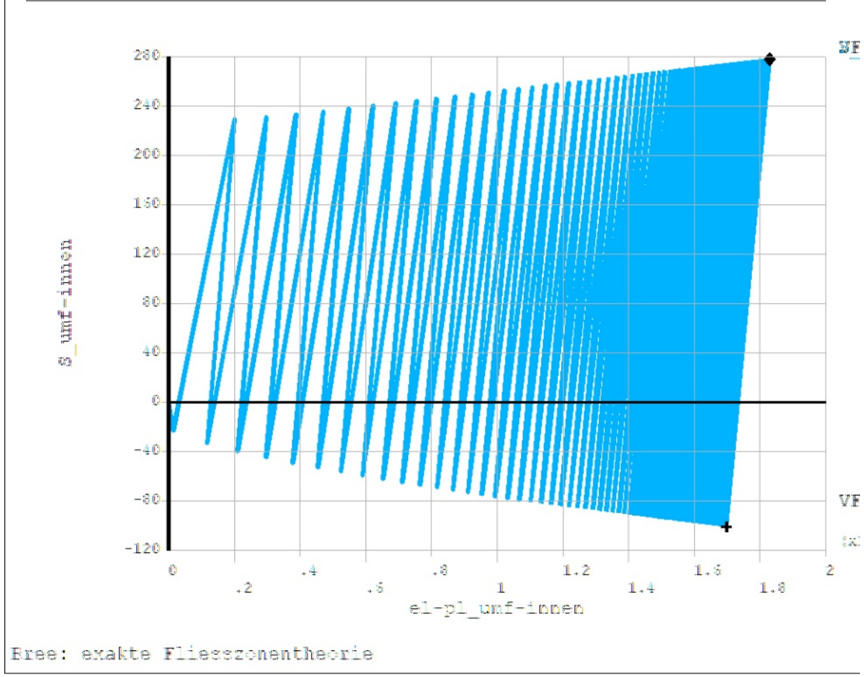


Bsp. 8: (2)

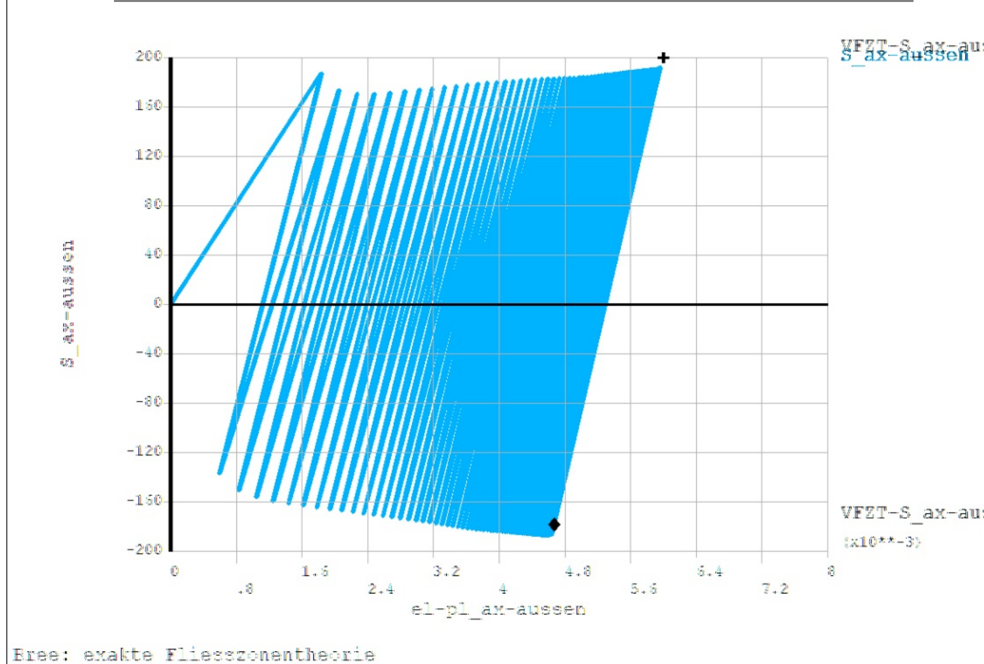


σ–ε-Histogramme (Lastumkehrpunkte):

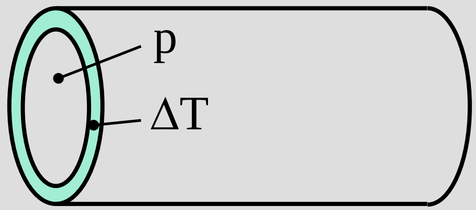
innen Umfangsrichtung:



außen Axialrichtung:



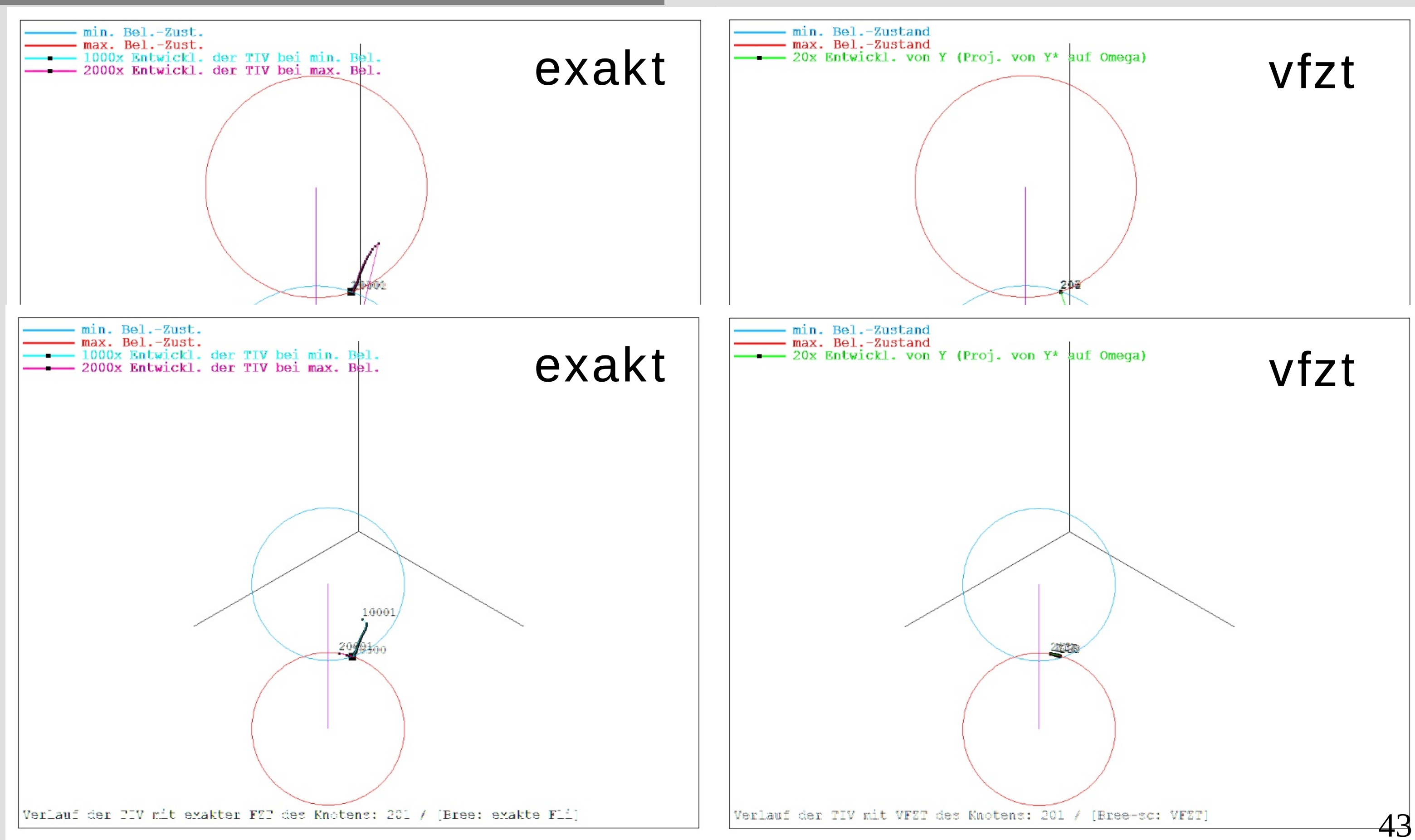
Bsp. 8: (3)



Entwicklung der TIV im Y-Raum:

innen

außen

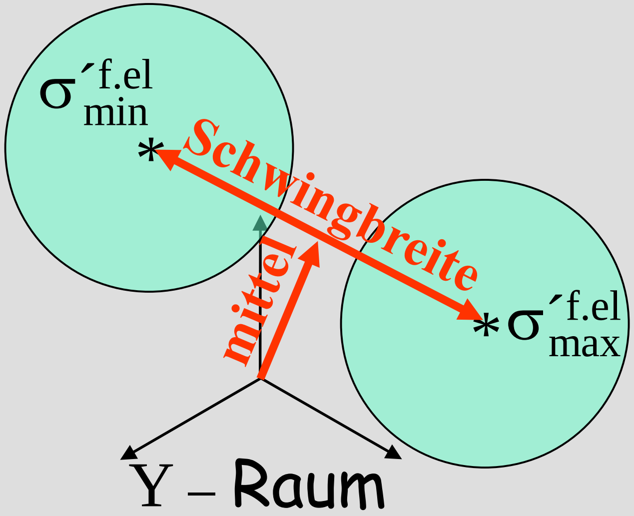


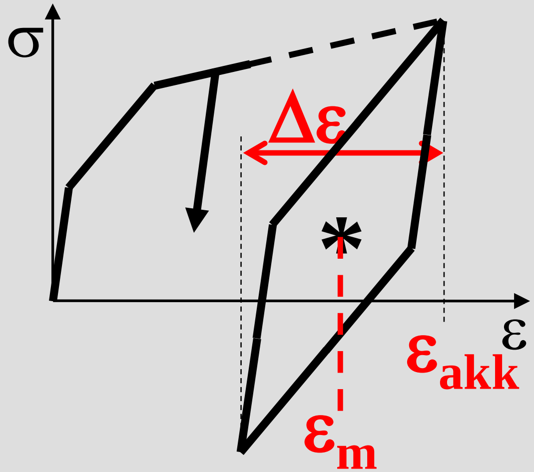
Inhalts-Übersicht

Abschätzung von Y bei PS

im Gegensatz zu ES erscheint bei PS eine Beschränkung auf 2 Belastungszustände ("max" und "min") erforderlich

plastisches Einspielen (PS):
wenn sich die beiden Mises-Kreise im Y-Raum an mindestens 1 Stelle des Bauteils **nicht** überschneiden





→ zwei Vorgänge getrennt voneinander behandeln:

1.) ΔY für Schwingbreite Δε (Faktor Ke)

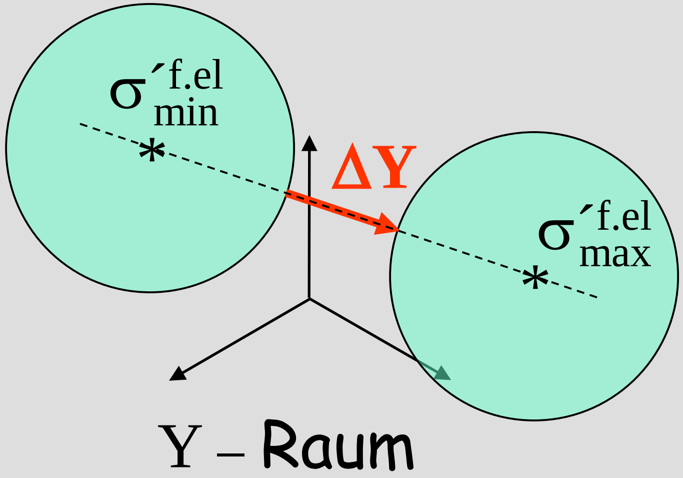
2.) Y_m für Mittelwert ε_m → $\varepsilon_{akk} = \varepsilon_m + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon$ (Ratcheting)

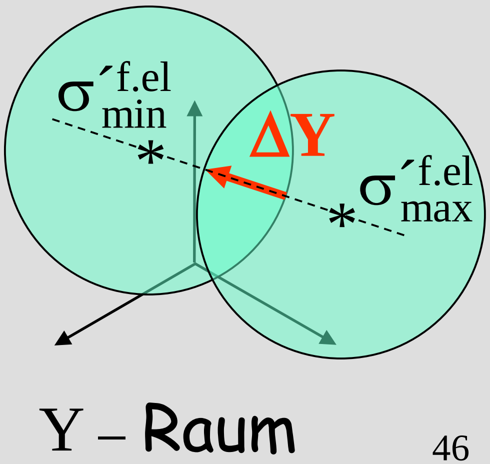
Abschätzung von ΔY bei PS (für Faktor Ke)

lt. Zarka 2 Möglichkeiten zur Abschätzung von ΔY:
upper und lower bound (ident. bei 1-achs. Spannung)

- upper bound:
  Richtungen $Y^{+/-}$ aus asymptotischem Verhalten bei ∞ großer Belastung beider Belastungszustände
  → wesentlich höherer Berechnungsaufwand
  → hier nicht weiter betrachtet
- lower bound:
  kürzester Abstand der beiden Mises-Kreise:

$V_{p,\Delta}$ wenn $\Delta\sigma_v > 2\sigma_y$
(sonst: $V_{e,\Delta}$):



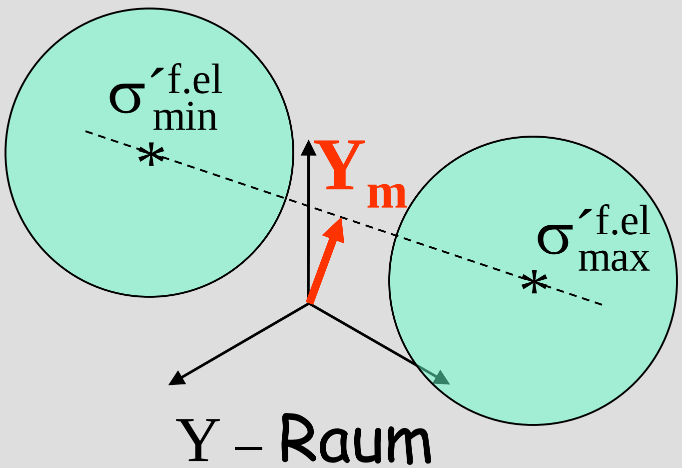


Abschätzung von Y_m bei PS (für Ratcheting)

Vp, wenn entweder $\sigma_{v,min} > \sigma_y$ oder $\sigma_{v,max} > \sigma_y$

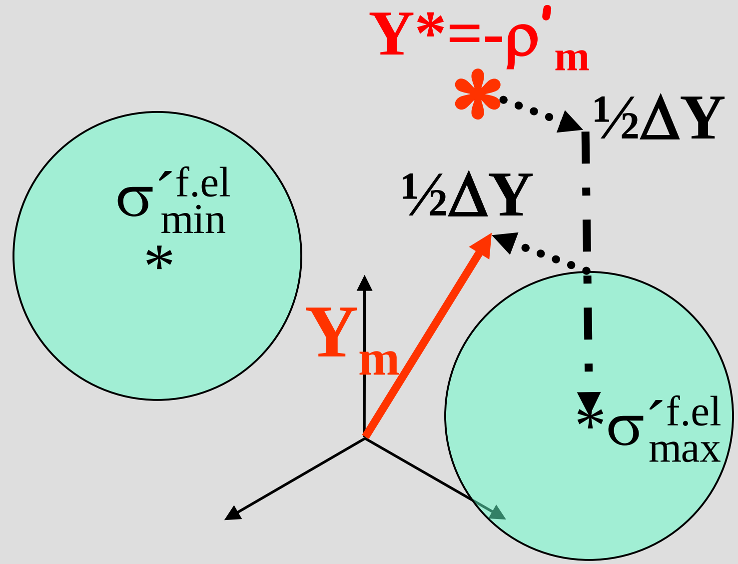
Unterscheidung erforderlich, ob in $V_{p,\Delta}$ oder $V_{e,\Delta}$:

in $V_{p,\Delta}$:



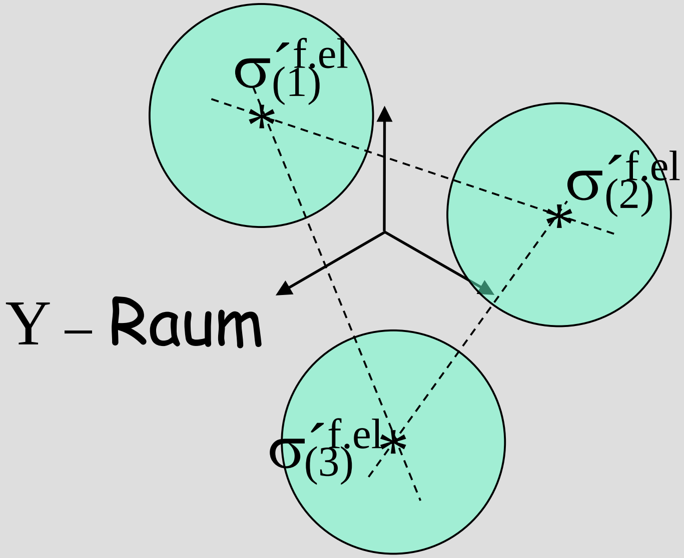
in $V_{e,\Delta}$:

Projektion von $Y^* \pm \frac{1}{2}\Delta Y$ auf max (oder auf min, wenn näher):



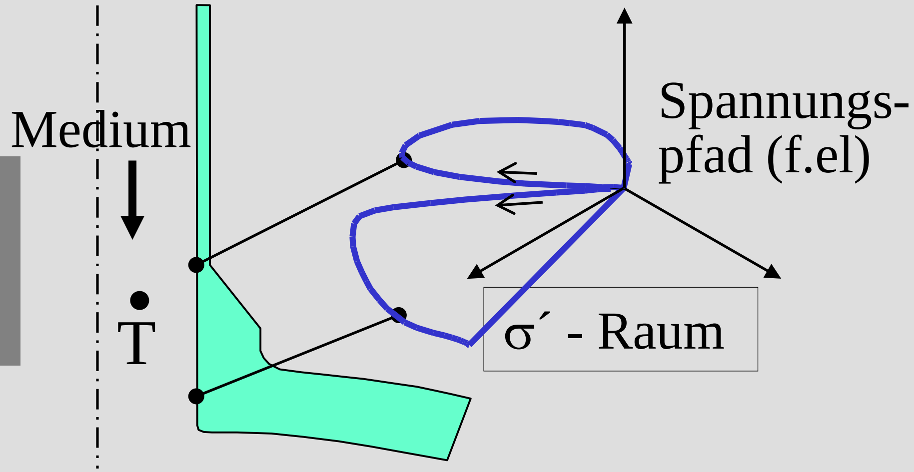
Einschränkung für > 2 Belastungszustände

bei PS sind Zyklen mit > 2 Belastungszust. u.U. nicht sinnvoll:

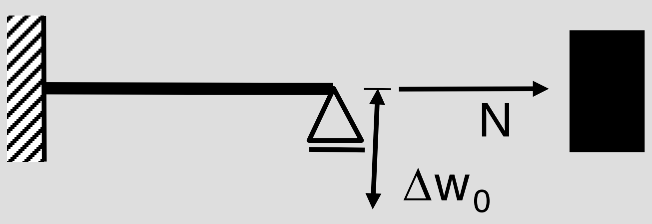


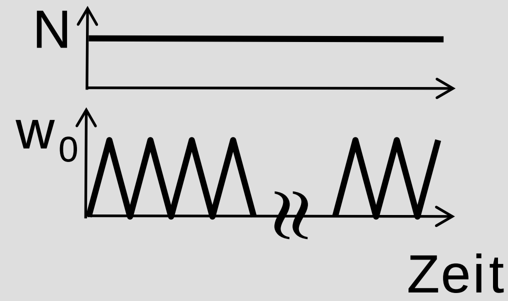
→ ΔY nicht definiert
(Y_m evt. schon)

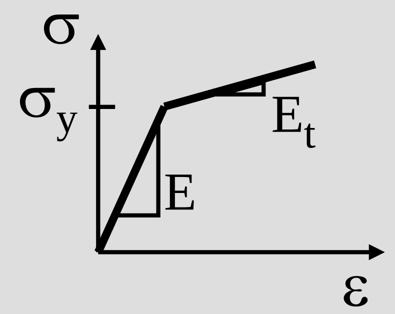
→ nichtradiale Belastung problematisch
(z.B. Stutzen):



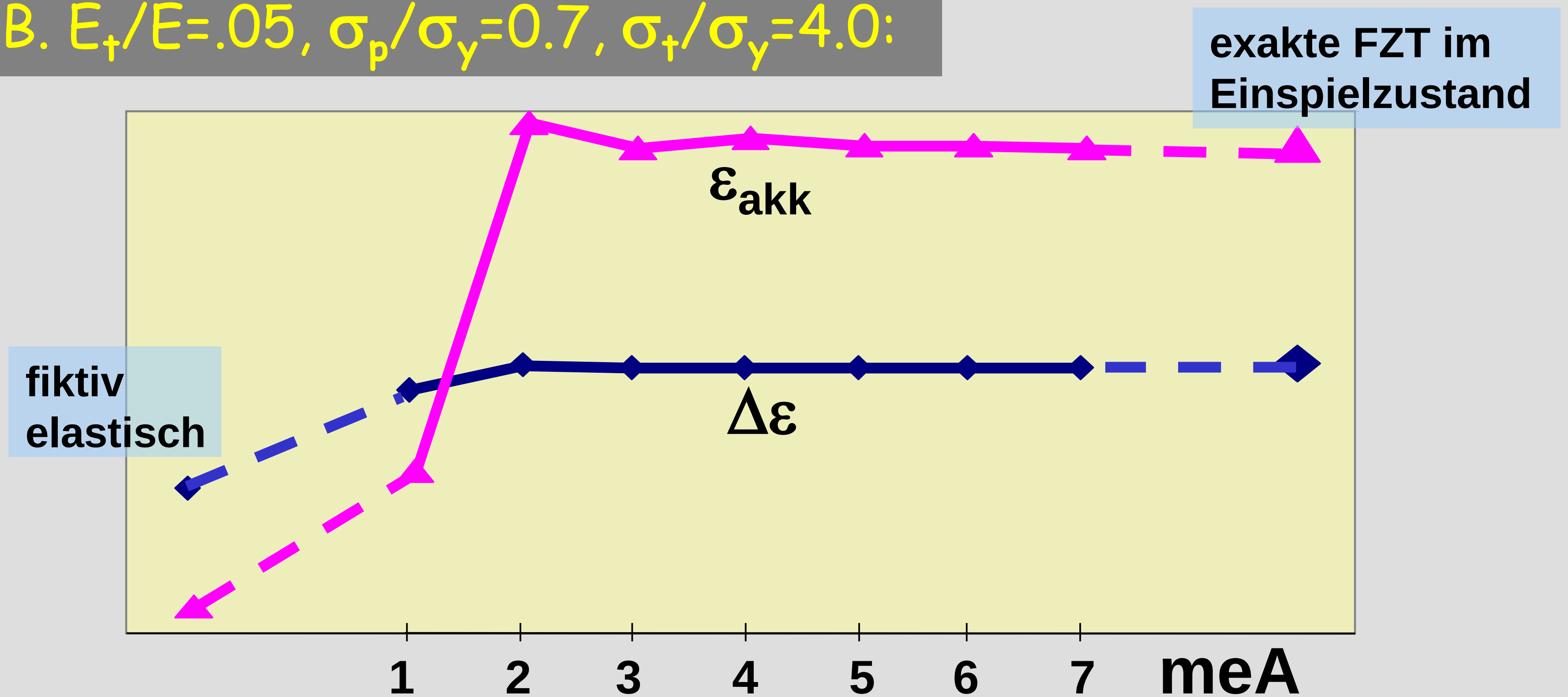
Bsp. 9: Balken unter N, Δw_0 (PS, 1-achsig)



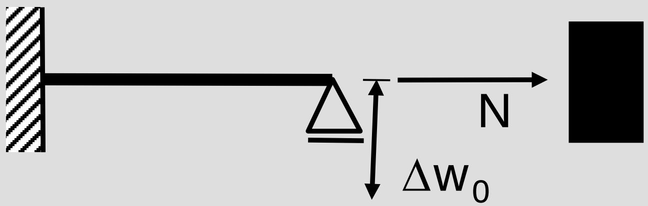




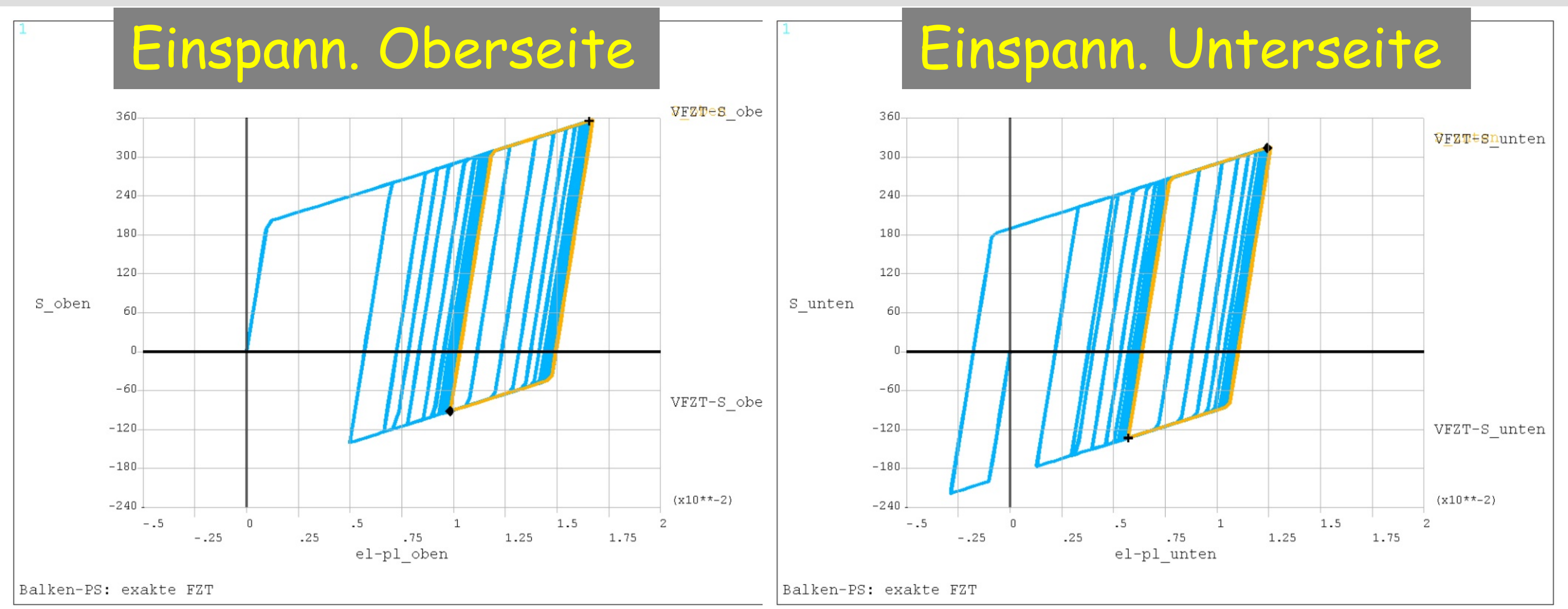
z.B. $E_t/E=.05$, $\sigma_p/\sigma_y=0.7$, $\sigma_t/\sigma_y=4.0$:



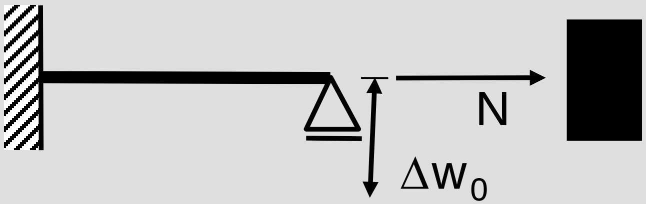
Bsp. 9: (2)



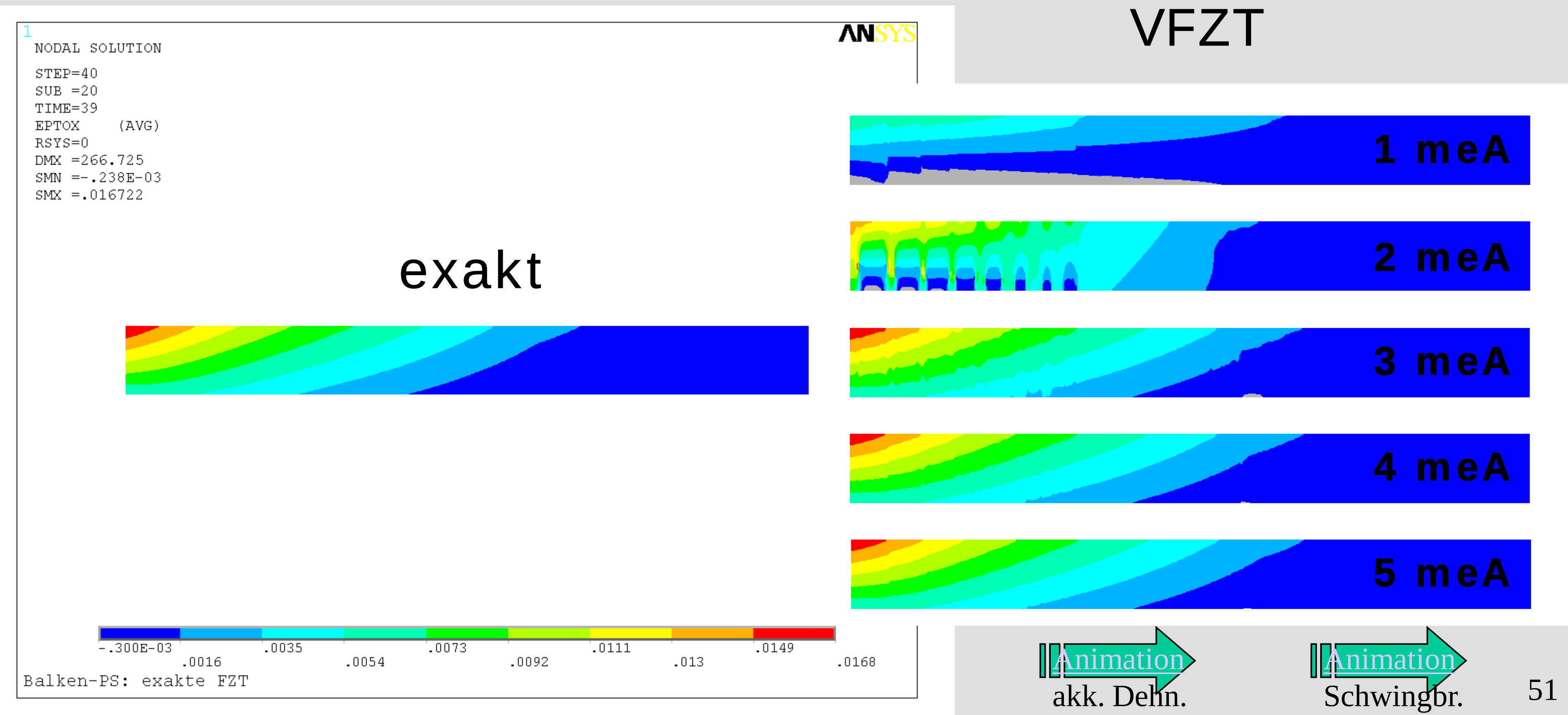
σ–ε-Hysteresen:



Bsp. 9: (3)



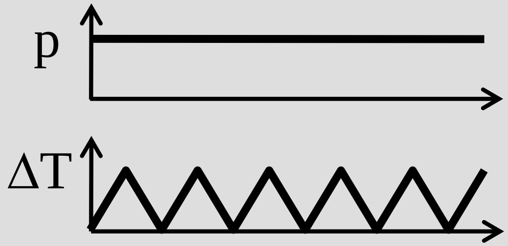
akkumulierte Dehnungen ε_{akk}:

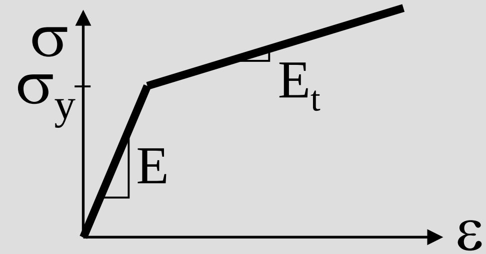


Animation
akk. Dehn.

Animation
Schwingbr.

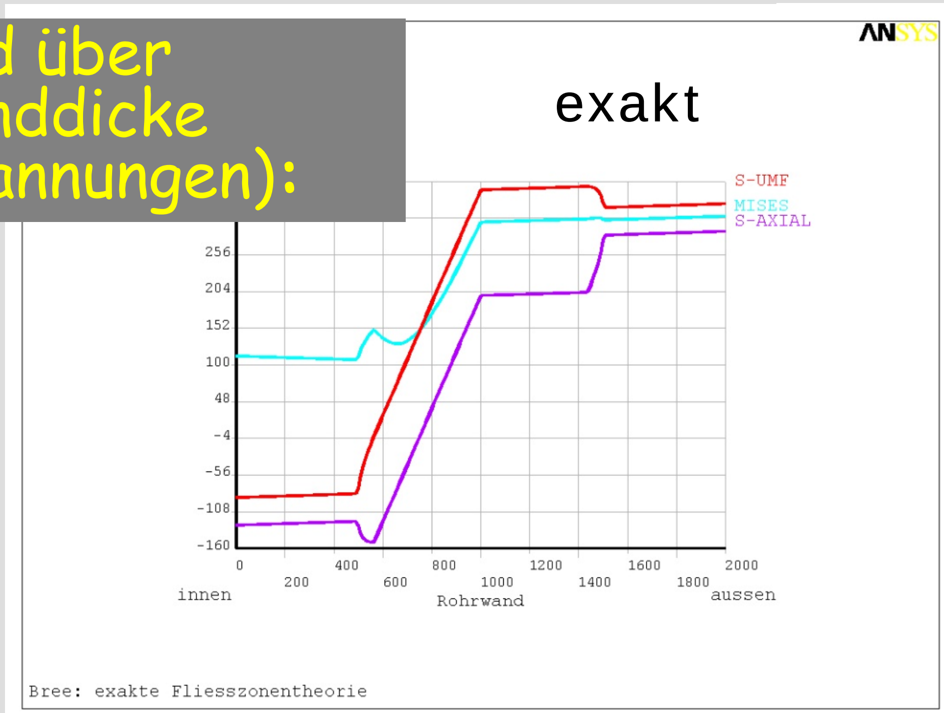
Bsp. 10: Bree-Fall (PS, mehrachsig)

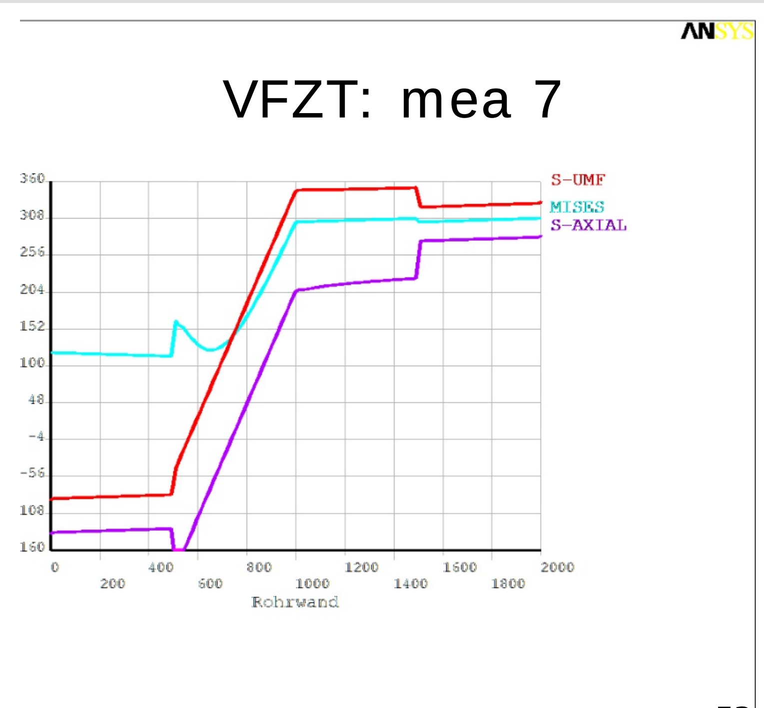




z.B. $E_t/E=.01$, $\sigma_p/\sigma_y=0.8$, $\sigma_t/\sigma_y=4.0$: PS nach ca. 100 Zyklen

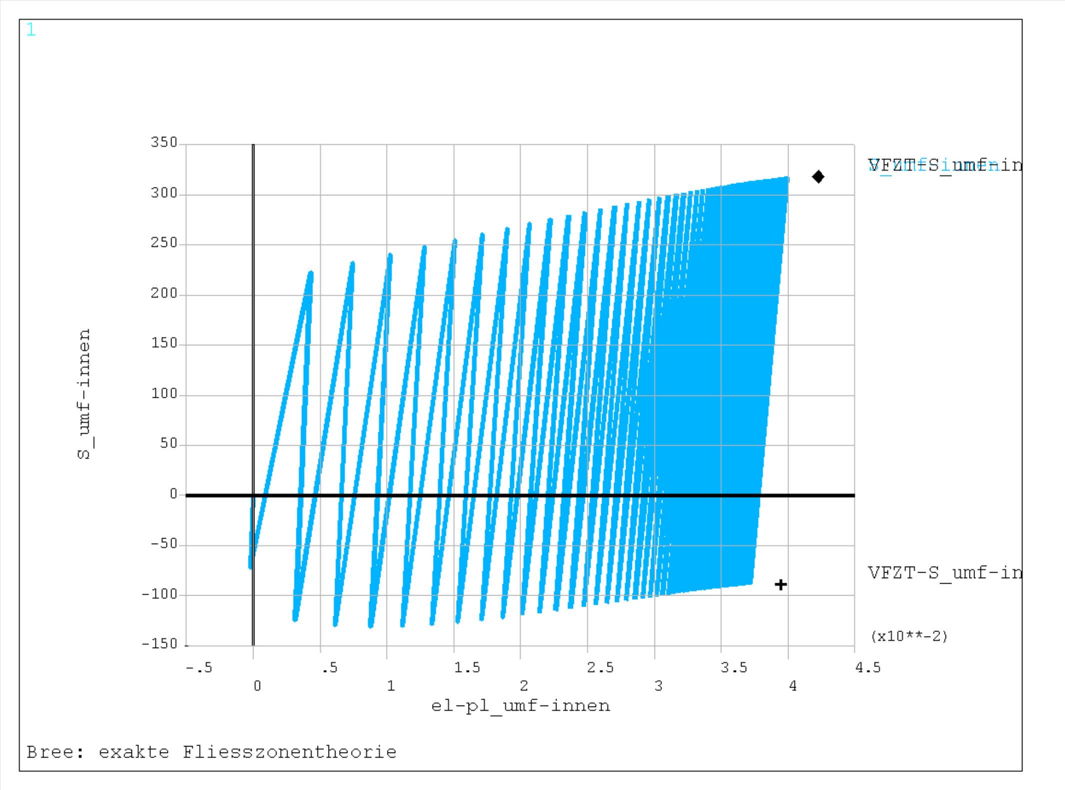
Pfad über Wanddicke (Spannungen):





Bsp. 10: (2)

Lastumkehrpunkte im σ–ε-Histogramm:

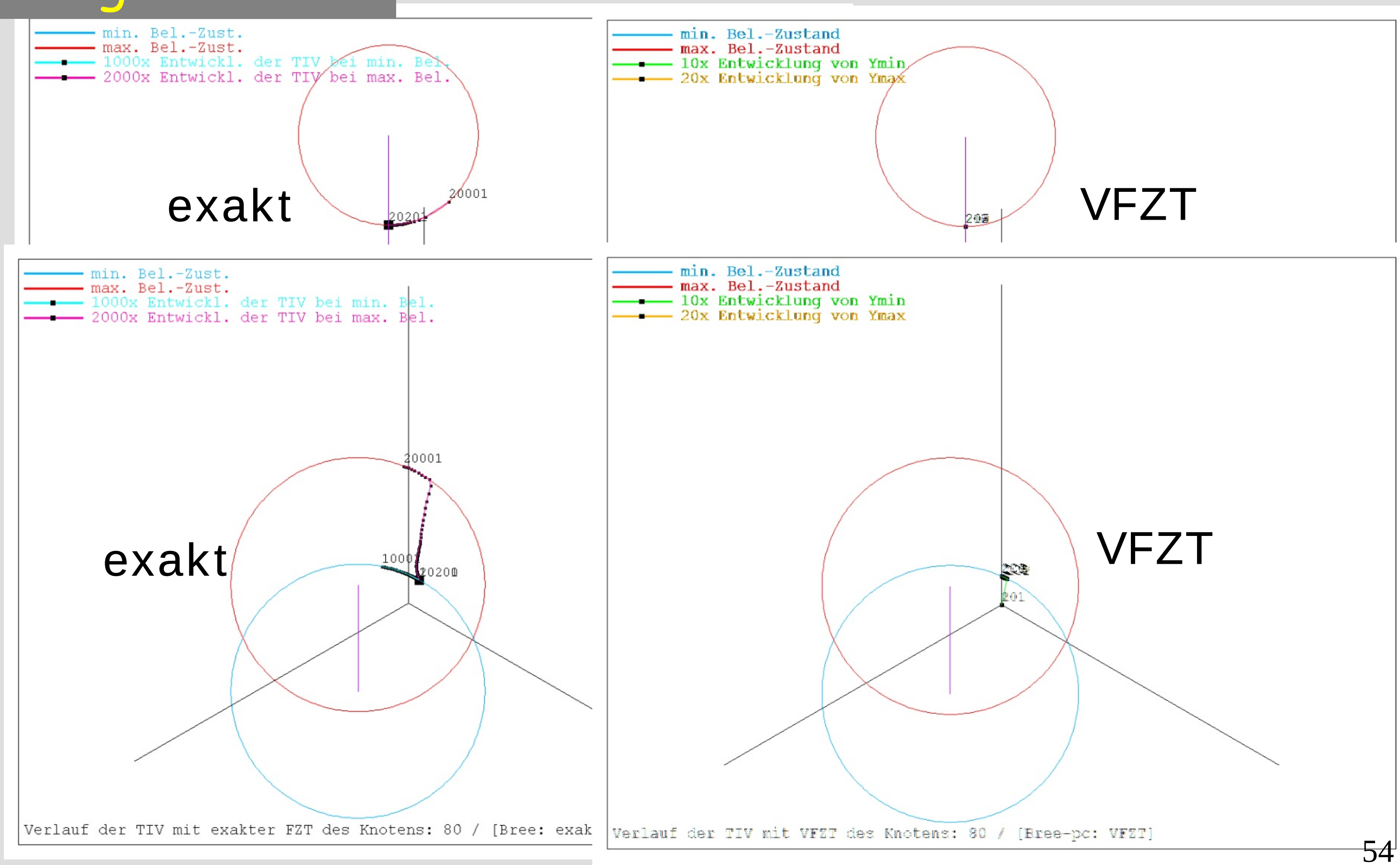


Bsp. 10: (3)

Entwicklung der TIV:

innen

bei 40% Wand-dicke



Inhalts-Übersicht

Teil A: Einführung

Teil B: mon. Belastung

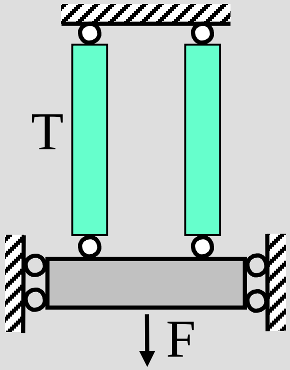
Teil C: zykl. Belastung – elastisches Einspielen

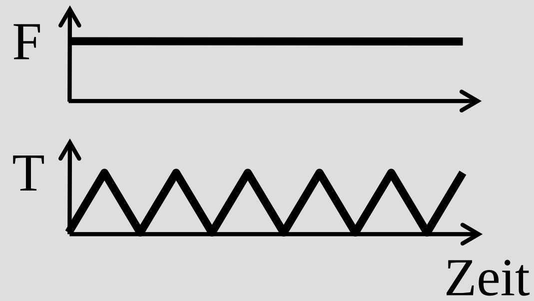
Teil D: zykl. Belastung – plastisches Einspielen:
Ke + Ratcheting

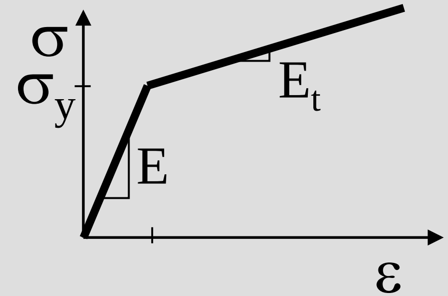
→ Teil E: zykl. Belastung: Ratch.-Inter.-Diagramme

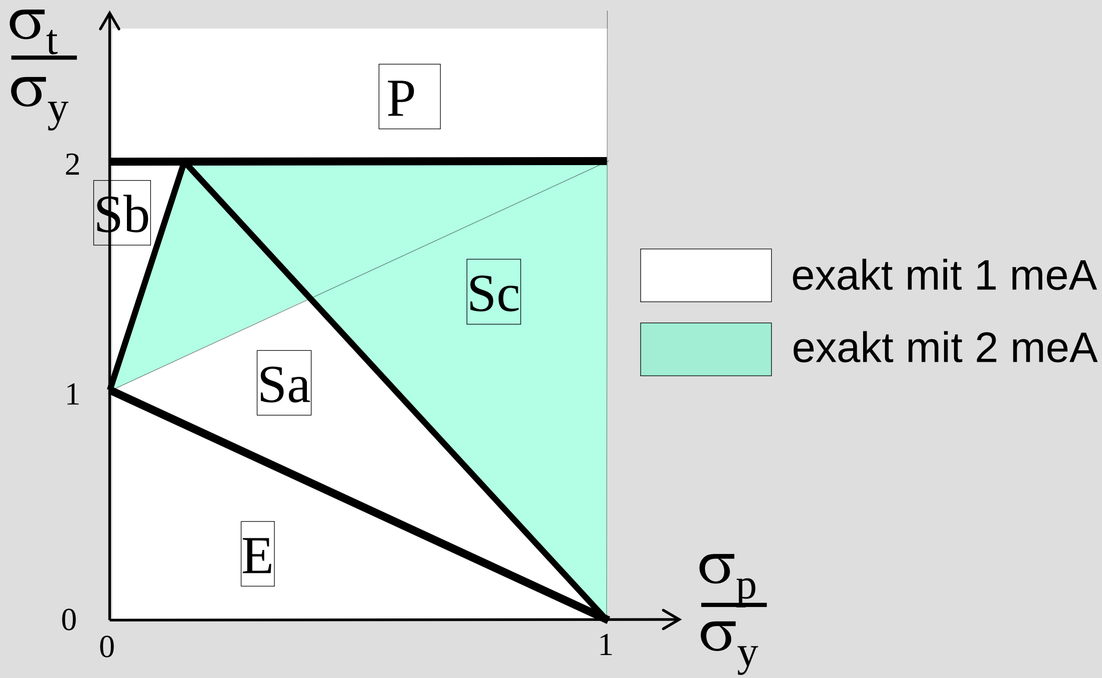
Zusammenfassung

Bsp. 11: RID für Zweistab-Modell (parallel)



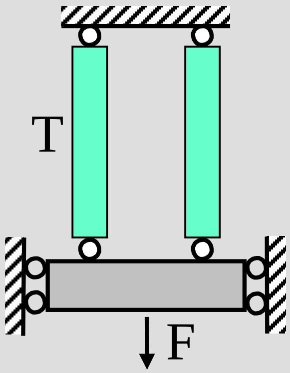


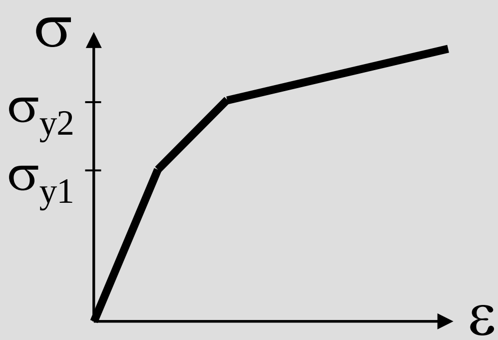


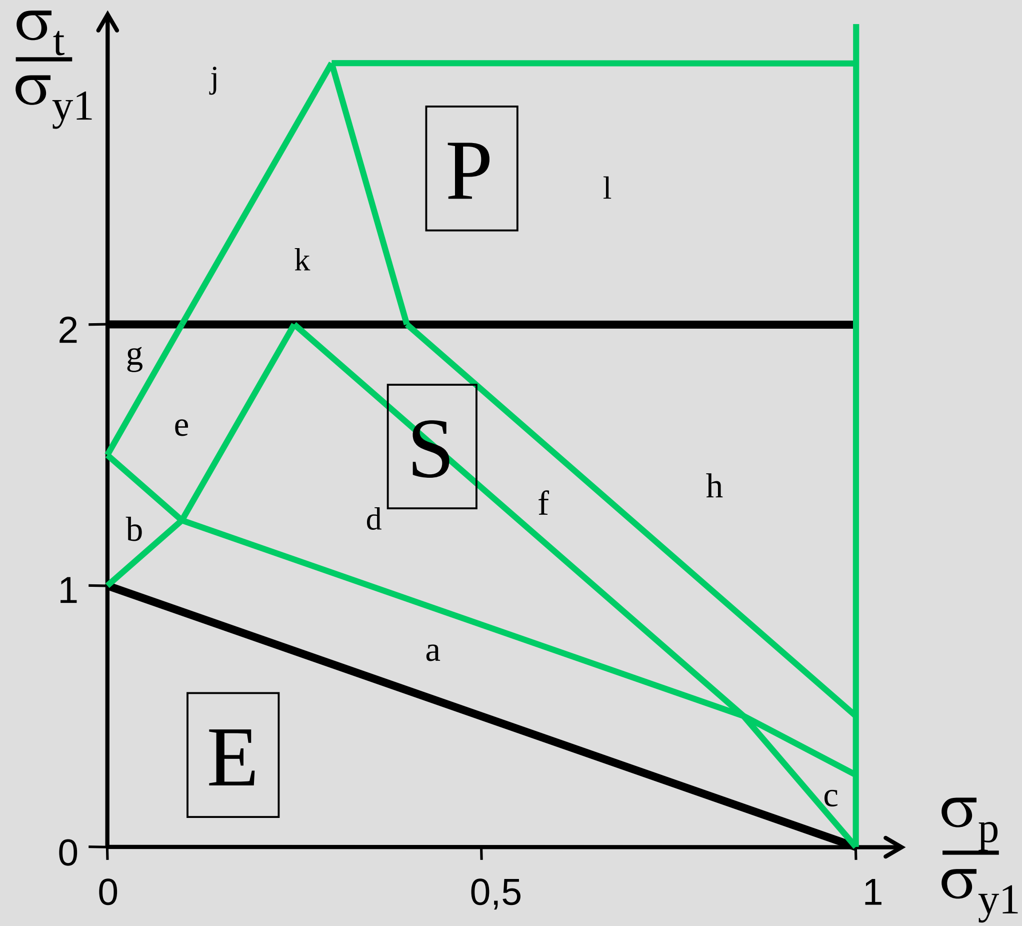


→ exakt nach 3 oder 4 linearen Analysen für jede Belastungskombination

Bsp. 12: RID für Zweistab-Modell (parallel) mit trilinearem σ–ε-Diagramm

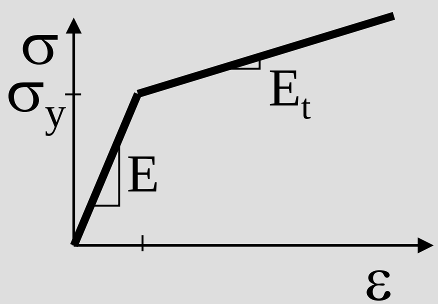


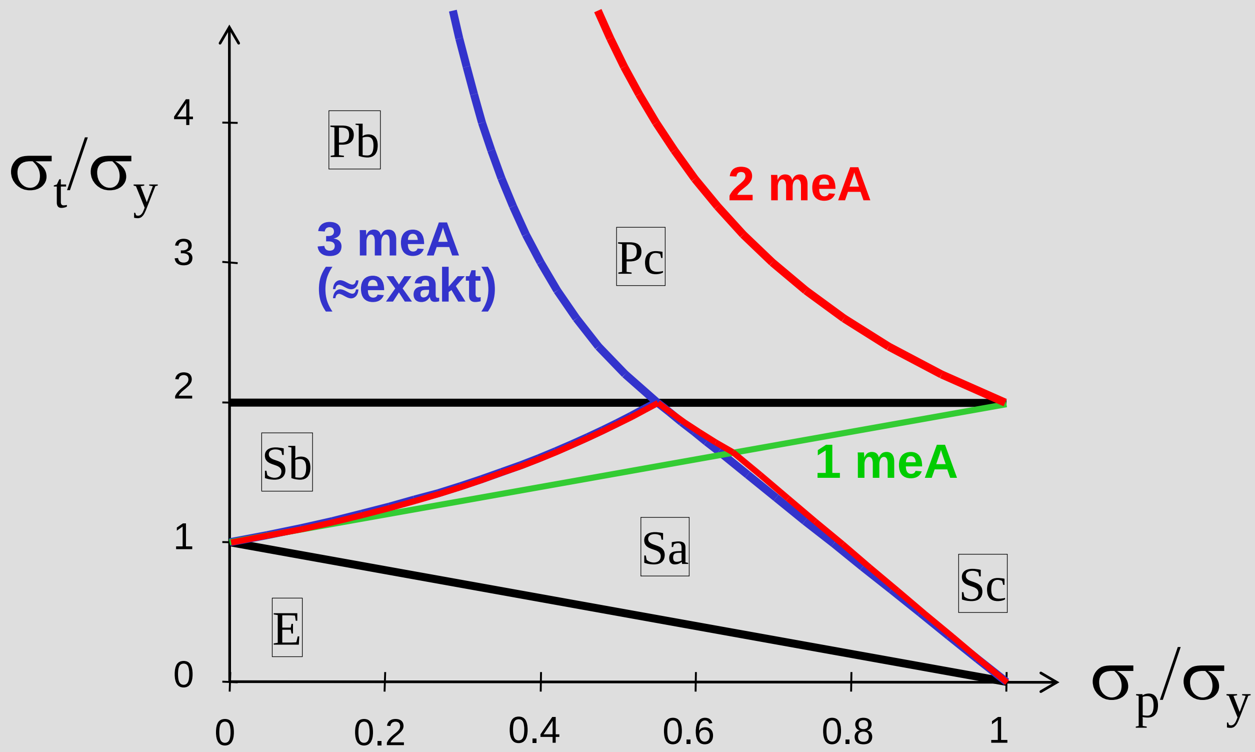




→ exakt nach max. 6 linearen Analysen für jede Belastungskombination

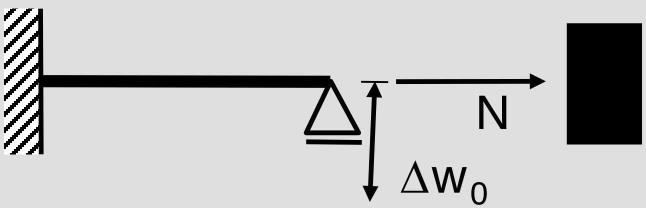
Bsp. 13:
RID für Bree-Fall

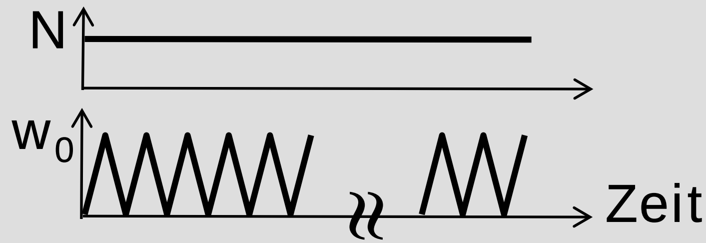




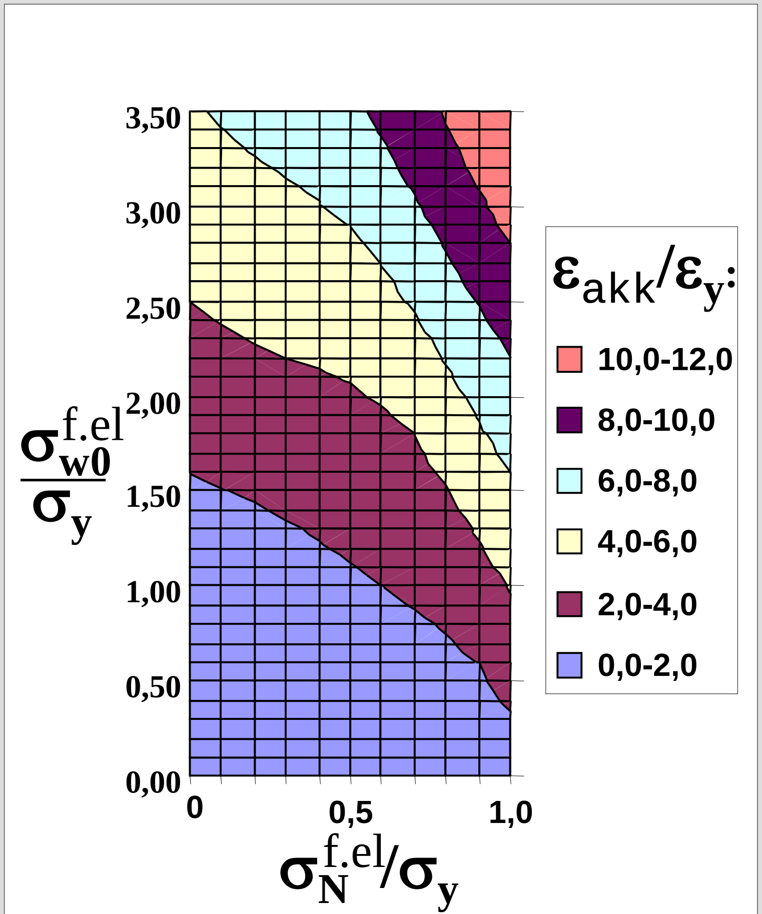
→ gute Näherung nach max. 5 linearen Analysen für jede Belastungskombination

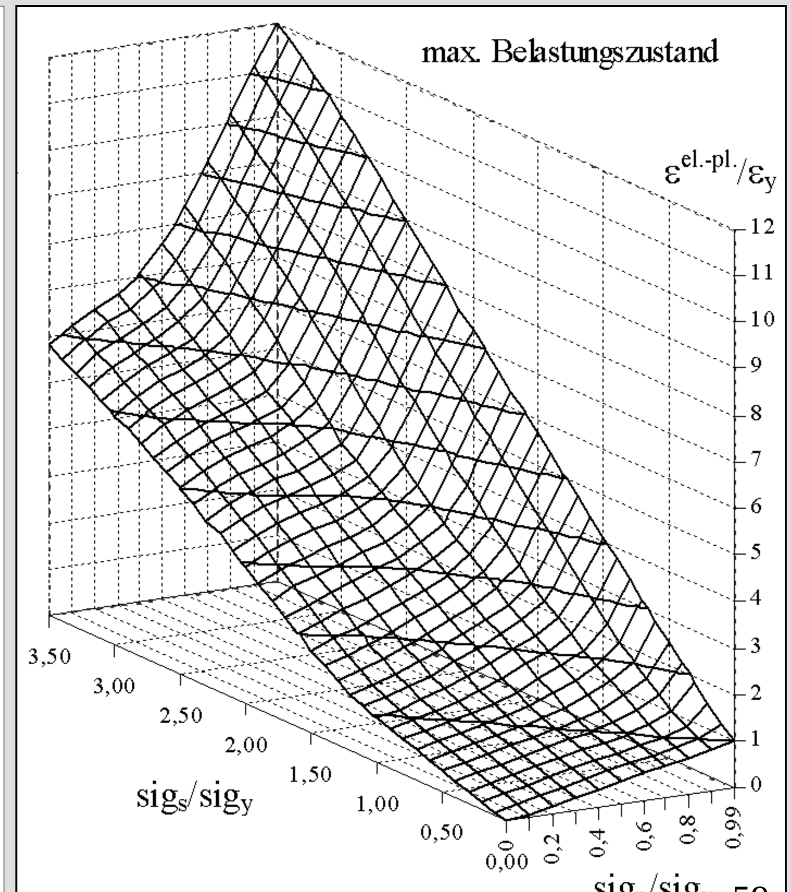
Bsp. 14: RID für Balken mit N und Δw_0





akkumulierte Dehnungen als Höhenlinien





Zusammenfassung

die Zarka-Methode (bzw. VFZT) dient der vereinfachten Berechnung plastischer Beanspruchungen für Ermüdungs- und Ratcheting-Nachweise

sie ist eine sog. "direkte" Methode zur Ermittlung der Beanspruchungen im Einspielzustand ("post-shakedown quantities"), insbesondere von $\Delta\varepsilon$ und ε_{akk}

im Gegensatz zu Regelwerken für jede Bauteilgeometrie und Belastungsart hinsichtlich Ke und Ratcheting geeignet

Nachteile infolge bestimmter Voraussetzungen, z.B.:

- Material-Ratcheting nicht vollständig erfasst
- Zyklen mit > 2 Belastungszuständen zumindest bei PS problematisch (aber durch KTA auch nicht gefordert)
- heuristisch motivierte Annahmen (Projektion von Y*) → Qualität nicht allgemeingültig beweisbar

ist in ANSYS implementiert

Zusammenfassung (2)

bisherige Beispielrechnungen zeigen:
- gute Näherung an exakte Lösung
- bei geringem Berechnungsaufwand (wenige linear elastische Analysen)

systematische Erweiterung vereinfachter el.-pl. Berechnungsmethoden der Regelwerke durch Zarka-Methode/VFZT möglich:
- hinsichtlich allgemeiner Geometrie, Belastung, Verfestigung
- durch Erfassung globaler Struktur-, lokaler Kerb-, Querdehnungs-Effekte
- durch einheitliche Berechnungsmethode hinsichtl. Ermüdung (Ke) und Ratcheting (RID, akkumulierte Dehnungen)

sowohl Theorie als auch Implementierung in ANSYS weiter ausbaubar (z.B.: bei ES > 2 Belastungszustände, T-abhängiges σ_y, multilineare kin. Verfestigung, weitere Element-Typen, …)

Schluss

Hoffnung:
Grundlagen der Zarka-Methode/VFZT verständlicher gemacht

↓

was nun?