

10. Aufgabenblatt: Stabilisierungskurs Höhere Mathematik (T) - BI

Thema: Anwendungen der Differentialrechnung

10.1. (Ableitung der Umkehrfunktion)

Berechnen Sie die erste Ableitung von $f(x) = \sin x$ und die Ableitung ihrer Umkehrfunktion.

10.2. (Tangentengleichung)

Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ die lineare Approximation an der Stelle $x_0 = 1$.

10.3. (Taylorpolynom)

Berechnen Sie das Taylorpolynom dritten Grades mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ der Funktion $f(x) = \tan x$.

Testen Sie, wie gut $\tan x$ durch $T_{3,f}(x, 0)$ angenähert wird, indem Sie $T_{3,f}(\frac{1}{2}, 0)$ und $\tan \frac{1}{2}$ sowie $T_{3,f}(1, 0)$ und $\tan 1$ berechnen. Dabei sind die Winkel im Bogenmaß zu verstehen.

10.4. (Taylorpolynom mit Restgliedabschätzung)

Gegeben seien die Funktionen $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ und $g(x) = \sin^2(x)$. Stellen Sie das Taylorpolynom dritter Ordnung zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ auf. Schätzen Sie mit der Lagrangeschen Form des Restgliedes den Fehler auf dem Intervall $[0, 1]$ ab.

10.5. (Extremwertberechnungen)

Sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$, definiert.

Bestimmen Sie alle Minima und Maxima von $f(x)$ im Intervall $[0, 1]$. Achtung: f hat mehr als eine Extremalstelle.

10.6. (Extremwertaufgaben und Konvexität)

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die jeweiligen Extremalstellen und untersuchen Sie, in welchen Bereichen sie konkav bzw. konvex sind.

a) $f(x) = x^2 e^{-x}$,

b) $f(x) = e^{x^2}$.

10.7. (Kurvendiskussion)

Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1}$$

(Definitionsbereich, Symmetrien, Asymptoten, Nullstellen, Monotoniebereiche, Extrema, Skizze).