

Modellierung der Schalldämpfung mehrschichtiger Plattenresonatoren in Strömungskanälen

Roman Kisler¹, Ennes Sarradj²

¹ Brandenburgische Technische Universität Cottbus-Senftenberg, 03046 Cottbus, Deutschland, Email: roman.kisler@b-tu.de

² Technische Universität Berlin, 10623 Berlin, Deutschland, Email: ennes.sarradj@tu-berlin.de

Einleitung

Schalldämpfer in Kanälen finden in zahlreichen Branchen Anwendung, beispielsweise in Lüftungskanälen sowie in der Automobil- und Luftfahrtindustrie. In vielen Anwendungsbereichen sind konventionelle Schalldämpfer, die poröse Materialien enthalten, durch ihre durchlässige Bauweise anfällig gegenüber Verschmutzung, Vereisung, Feuchtigkeit, Hitze und stellen oft einen signifikanten Strömungswiderstand dar. Der Plattenschalldämpfer hingegen ist durch seine glatte, undurchlässige Oberfläche besser geeignet, um unter derartig widrigen Bedingungen eingesetzt zu werden.

Es wird in dieser Arbeit ein analytisches Modell erstellt, das eine akkurate und schnelle Berechnung der Durchgangsdämpfung von Schalldämpfern in Form von Plattenresonatoren ermöglicht. Durch die analytische Formulierung und die daraus resultierende niedrige Rechenzeit sind Optimierungsverfahren anwendbar, mithilfe derer die akustische Dämpfung für die jeweiligen gegebenen Rahmenbedingungen maximiert werden kann.

Bisherige Modelle der Auskleidung von Platten-schalldämpfern werden als akustisch kompakte Objekte angenommen, bei denen der Schall senkrecht einfällt. Die modalen Wandimpedanzen der Platte werden auf Basis dieser Annahme ermittelt und in Absorptionsgrade umgerechnet. Erst durch eine zusätzliche empirische Gleichung, der Piening-Formel, werden Durchgangsdämpfungen in Kanälen abgeschätzt.

Das hier vorgestellte Modell geht hingegen von vollständig streifendem Schalleinfall aus und betrachtet durch die Berechnung der angeregten Plattenbiegewellen sowohl Schallreflexion als auch -absorption. Dadurch lassen sich breitbandige, optimierte Schalldämpfer bei geringerem Bauraum auslegen, die sowohl im tief- als auch mittelfrequenten Bereich wirksam sind.

Physikalisches Modell

Das Modell der resonierenden Platten als Schalldämpfer in Strömungskanälen fußt auf dem vorgestellten Modell von Wang [1]. Es wird sich hierbei auf quadratische Kanalquerschnitte beschränkt. Abbildung 1 veranschaulicht das generische physikalische Prinzip eines Plattenschalldämpfers. Von links fällt der Schall ein und streift eine Platte, die wandbündig angebracht ist und an der ein geschlossenes Rückvolumen anschließt. Der Schall regt das System aus Platte und eingeschlossenem

Luftvolumen zu Schwingungen an, wodurch Energie zum einen durch intrinsische Dämpfung absorbiert und zum anderen durch die Plattenschwingung in Quellrichtung reflektiert wird. Dieser Wirkmechanismus wurde bereits von Huang et al. [4, 5, 6, 7], Wang et al. [1, 2, 3] formuliert und experimentell untersucht. Dabei zeigte sich eine sehr gute Übereinstimmung dieses Modells mit deren Messwerten.

Im Folgenden wird das analytische Modell kurz beschrieben. Zunächst werden alle physikalischen Größen

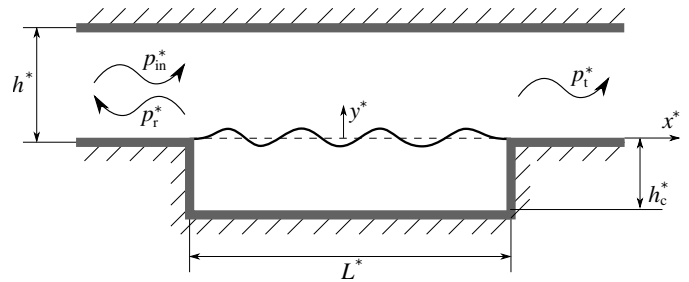


Abbildung 1: Modell eines einseitig angebrachten Plattenresonators als Schalldämpfer in einem Strömungskanal.

dimensionslos formuliert, um die Ergebnisse der Berechnungen auf jeden gewünschten Anwendungsfall skalierbar zu machen. Dimensionsbehaftete Parameter sind mit einem Asterisk gekennzeichnet. Als Referenzwerte dienen die Kanalhöhe h^* , die Ruhedichte ρ_0^* und die Schallgeschwindigkeit c_0^* , sodass folgende, für diese Problemstellung relevante Parameter definiert werden können:

$$E = \frac{E^*}{\rho_0^*(c_0^*)^2} \quad \text{E-Modul} \quad (1)$$

$$h_p = \frac{h_p^*}{h^*} \quad \text{Plattendicke} \quad (2)$$

$$B = \frac{E h_p^3}{12(1 - \mu_p^2)} \quad \text{Biegesteifigkeit} \quad (3)$$

$$h_c = \frac{h_c^*}{h^*} \quad \text{Höhe des Rückvolumens} \quad (4)$$

$$L = \frac{L^*}{h^*} \quad \text{Länge des Rückvolumens} \quad (5)$$

$$V = \frac{V^*}{c_0^*} \quad \text{Plattenschnelle} \quad (6)$$

$$m'' = \frac{m''^*}{\rho_0^* h^*} \quad \text{Plattenmasse} \quad (7)$$

$$p = \frac{p^*}{\rho_0^*(c_0^*)^2} \quad \text{Schalldruck} \quad (8)$$

$$f = f^* \frac{h^*}{c_0^*} \quad \text{Frequenz} \quad (9)$$

$$h = \frac{h^*}{h^*} = 1, \quad \text{Kanalhöhe} \quad (10)$$

wobei μ_P die Poisson-Zahl repräsentiert. Es werden ebene Wellen angenommen, weil sich höhere Moden erst ab der Cut-On-Frequenz f_c^* ausbreiten. Dadurch können mit diesem Modell nur Frequenzen unterhalb dieser Grenze untersucht werden. Sie ist in Kanälen mit parallelen Wänden definiert als

$$f_c^* = \frac{c_0^*}{2h^*}. \quad (11)$$

Daraus ergibt sich nach der Entdimensionalisierung aus Gleichung (9) für f_c

$$f_c = f_c^* \frac{h^*}{c_0^*} = 0,5. \quad (12)$$

Es können entsprechend nur Frequenzen unterhalb $f_c = 0,5$ ausgewertet werden.

Zur Lösung dieser Problemstellung wird die Biege-Differentialgleichung eines Euler-Balkens gelöst. In der Untersuchung des Unterschiedes zwischen einer ein- und zweidimensionalen Modellierung der Platten zeigte Huang [6], dass zwar ein Unterschied vorhanden ist, jedoch der qualitative spektrale Verlauf der Durchgangsdämpfung nur geringfügig vom 1D-Modell abweicht. Für erste Abschätzungen und Vorauslegungen ist demnach ein eindimensionales Modell bereits zielführend, um ein gewünschtes Frequenzspektrum einzustellen.

Für die Berechnung der Schallabstrahlung der vibrierenden Platte muss die räumliche Verteilung der Plattenschnelle und Plattenimpedanz bestimmt werden. Wang [1] löst dafür die Biege-Differentialgleichung:

$$\frac{B}{j\omega} \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + m'' j\omega V = -(p_+ - p_-), \quad (13)$$

wobei j die imaginäre Einheit und $V = V(x)$ die räumliche Verteilung der Plattenschnelle darstellen. Die intrinsische Dämpfung wird im Zuge dieser Arbeit zunächst nicht berücksichtigt, ließe sich jedoch mithilfe des Rayleigh-Modells problemlos einbinden. Es handelt sich um eine inhomogene Differentialgleichung. Der inhomogene Anteil stellt die Anregung der Plattenschwingung dar und wird durch $(p_+ - p_-)$ beschrieben, was dem räumlichen Druckunterschied zwischen Plattenoberseite und -unterseite entspricht.

Durch Anwendung des Standard-Galerkin-Verfahrens, bei der die Plattenschnelle als Reihe orthogonaler Basisfunktion entwickelt wird, kann diese Differentialgleichung in ein inhomogenes lineares Gleichungssystem überführt werden.

$$(\underline{L} + \underline{Z}) \cdot \mathbf{V} = -\mathbf{I} \quad (14)$$

Dabei handelt es sich bei \underline{L} um eine Diagonalmatrix mit den Materialparametern, während \underline{Z} einer quadratische Matrix mit modalen Impedanzen entspricht. Sie ist stark abhängig von den angenommenen Randbedingungen. \underline{I} enthält die modalen Anteile des einfallenden Schalldruckes. Der Vektor \mathbf{V} beschreibt die Amplituden der Plattenmoden, die beim Galerkin-Verfahren angenommen wurden. Dabei handelt es sich um die Eigenmoden $\varphi_i(x)$ eines fest eingespannten, im Vakuum befindlichen Balkens [8]:

$$\varphi_i(x) = \cosh(\beta_i x) - \cos(\beta_i x) - \sigma_i [\sinh(\beta_i x) - \sin(\beta_i x)], \quad (15)$$

worin σ_i und β_i einzig von der gewählten Randlagerung des Balkens abhängen. Die Oberflächenschnelle der Platte wird demnach wie folgt entwickelt:

$$V^{(N)}(x) = \sum_{i=1}^N V_i \varphi_i(x). \quad (16)$$

N ist die maximale Anzahl berücksichtigter Plattenmoden. Bei $N \rightarrow \infty$ ließe sich demnach eine exakte Lösung finden. Für die Berechnung muss N jedoch beschränkt werden und bestimmt die Güte der Approximation. Da N die Größe des linearen Gleichungssystems festlegt, ist sie maßgeblich für die Rechenzeit verantwortlich.

Durch Lösung des linearen Gleichungssystems lässt sich der stromauf und stromab abgestrahlte Schalldruck nach Wang [1] bestimmen. Somit lassen sich die reflektierten (P_r), transmittierten (P_t) und absorbierten (P_a) Schallleistungen separieren und eine Durchgangsdämpfung TL (Transmission Loss) berechnen. Diese Betrachtung beschränkt sich auf ebene Schallausbreitung im Kanal, wodurch folgender Zusammenhang gilt:

$$TL = 10 \lg \left(\frac{P_{in}}{P_t} \right) \text{ dB} = 20 \lg \left(\frac{p_{in}}{p_t} \right) \text{ dB}. \quad (17)$$

Im Umkehrschluss ermöglicht das Modell zur gleichen Zeit die Feststellung, zu welchem Anteil Absorption und Reflexion an der Durchgangsdämpfung beteiligt sind.

Approximationsgüte

Seit Huang [5] wird in der Fachliteratur davon ausgegangen, dass eine maximal zu berücksichtigende Modenzahl $N = 25$ für die Platte und $R = S = 50$ Raummoden für das eingeschlossene Luftvolumen notwendig sei, um eine ausreichende Genauigkeit des Modells zu erzielen. Dieser Sachverhalt wurde mithilfe der eigenen Implementierung erneut überprüft. Dazu wurde eine von Wang [3] berechnete Kurve mit den Parametern ($L = 5$; $h_c = 1$; $m'' = 2,4$; $B = 0,11$; $\mu_P = 0,35$; $M = 0$; zwei gegenüberliegende Platten) als Referenz gewählt und anschließend für jedes (N, R, S) -Tupel die im Frequenzspektrum der Durchgangsdämpfung maximale absolute Abweichung bestimmt. μ_P ist hierbei die Poisson-Zahl und M die Mach-Zahl.

Die Ergebnisse sind in Abbildung 2 dargestellt. Die

wichtige Erkenntnis aus dieser Abbildung ist die Tatsache, dass bereits eine modale Auflösung von $(N, R, S) = (5, 20, 20)$ ausreicht, um einen maximalen Fehler von ca. 1 dB über das gesamte Spektrum einzuhalten. Eine Erhöhung bietet keine weitere Verbesserung der Genauigkeit. Das gleiche Ergebnis wurde auch bei weiteren Dämpfungskurven, die bei anderen Materialparametern vorliegen, festgestellt. Das lässt den Schluss zu, dass nur die ersten fünf Moden hinreichend angeregt werden und für die Abstrahlung verantwortlich sind. Für die nachfolgenden Berechnung mit diesem

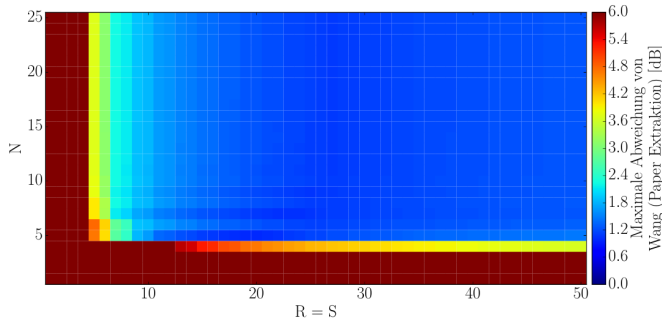


Abbildung 2: Maximale absolute Abweichung des implementierten Wang-Modells zur höchsten Auflösung $(N, R, S) = (25, 50, 50)$.

Modell wurde sich jedoch für $N = 7$ anstelle von $N = 5$ entschieden. Der Rechenaufwand bei Nutzung eines einzelnen Rechenkerns zwischen $(N, R, S) = (25, 50, 50)$ und $(N, R, S) = (7, 20, 20)$ hat sich um 95 % reduziert. Dadurch werden mit zusätzlicher Parallelisierung umfangreiche Parameterstudien möglich.

Parameterstudie

Mit dieser Parameterstudie sollen akustisch günstige Material- und Geometrieparameter ermittelt werden. Zur Bewertung dieser Eigenschaft wurde die Sperrbandbreite S [4] als Funktional gewählt mit folgender Definition:

$$S = \max \frac{f_o}{f_u}, \text{ sodass } TL(f \in [f_u, f_o]) \geq TL_c, \quad (18)$$

mit f_o als oberste Frequenz des Sperrbandes und f_u entsprechend als unterste desselben. Es legt die maximal erreichte Bandbreite im untersuchten Frequenzspektrum fest, bei der Durchgangsdämpfungen über einem gewählten Schwellenwert von $TL > TL_c$ erreicht werden.

Variiert werden die für einen Plattenschalldämpfer relevanten Parameter: die Bautiefe des dahinter eingeschlossenen Luftvolumens, Flächenmasse sowie Biegesteifigkeit der Platte. Folgende Variationsintervalle wurden für die Parameter untersucht:

$$h_c \in [0,5; 5] \quad (19)$$

$$m'' \in [0,08; 17] \quad (20)$$

$$B \in [10^{-9}; 0,135] \quad (21)$$

Die Strömung wurde in dieser Studie zunächst vernachlässigt, ließe sich jedoch (ohne Grenzschicht) mit

diesem Modell auch berücksichtigen. Die Länge wurde gemäß der Optimierungsergebnisse von Huang [5] auf $L = 5$ festgesetzt. In Zukunft ließe sich auch diese Größe variieren und die Durchgangsdämpfungen auf die Länge skalieren, um Vergleichbarkeit zu gewährleisten. Zunächst bleibt die Länge für diese Arbeit konstant.

Für das Kriterium TL_c wird die doppelte maximal erreichbare Durchgangsdämpfung eines Kammer-schalldämpfers ($2 \cdot TL_K$) [9] mit der gleichen Bautiefe des Luftvolumens h_c gewählt. Sie wird unter Annahme reiner ebener Wellenausbreitung definiert als

$$TL_c = 2 \cdot \max(TL_K) \quad (22)$$

$$\max(TL_K) = 10 \lg \left(1 + \frac{1}{4} (\Lambda^{-1} - \Lambda)^2 \right) \text{ dB} \quad (23)$$

$$\Lambda = 1 + 2h_c. \quad (24)$$

Λ ist das Querschnittsverhältnis zwischen dem größeren Schalldämpfer-Querschnitt und dem Kanalquerschnitt:

$$\Lambda = \frac{h^*(h^* + 2h_c^*)}{(h^*)^2} = 1 + 2h_c \quad (25)$$

Mit größeren Bautiefen h_c sind demnach höhere Maximaldämpfungen zu erreichen, weshalb diese Anhebung des Kriteriums in Abhängigkeit von der Bautiefe h_c für die Vergleichbarkeit der Sperrbandbreiten von entscheidender Bedeutung ist.

Zudem wurden nur tiefe Frequenzen in Hinblick auf die Cut-On-Grenze von $f_c = 0.5$ untersucht. Gewählt wurde der Frequenzbereich zwischen $f \in]0; 0,16]$. Bei der Wahl dieses Intervalls wurde sich zur Vergleichbarkeit an die Arbeiten von Wang und Huang orientiert. Abbildung 3 zeigt die Abhängigkeit der Sperrbandbreite von der Flächenmasse und Kavitätshöhe (Bautiefe) bei der ermittelten optimalen Biegesteifigkeit von $B = 0,135$. Wie erwartet liegt das Maximum bei der

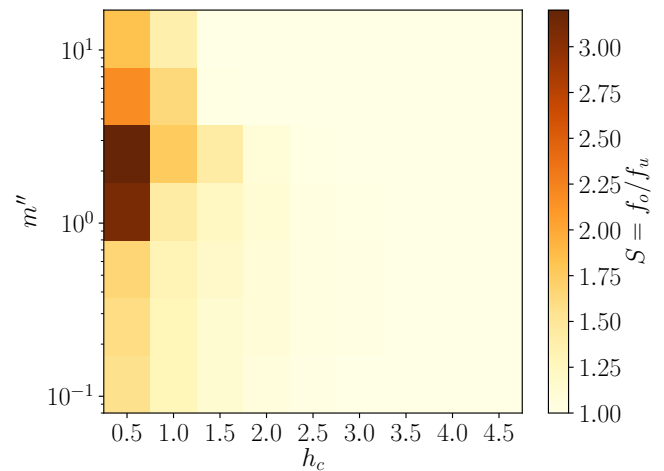


Abbildung 3: Sperrbandbreite in Abhängigkeit der Flächenmasse m'' und Kavitätshöhe h_c bei optimaler Biegesteifigkeit $B = 0,135$.

höchsten Biegesteifigkeit. Entgegen den Ergebnissen

von Wang und Huang ist für eine breitbandige, tieffrequente Schalldämpfung nicht zwangsläufig die niedrigste Flächenmasse vonnöten. Es zeigt sich, dass ein lokales Maximum im untersuchten Intervall bei $m'' = 1.71$ vorliegt und bei geringeren Werten die Sperrbandbreite stark abfällt.

Darüber hinaus lässt sich aus dem Diagramm ableiten, dass sowohl die Sperrbandbreite als auch die Toleranz der Flächenmasse bei $h_c = 0,5$ maximal ist. Für eine effektive Schalldämpfung sind demnach keine großen Bautiefen notwendig, welche in der Praxis oft eine limitierende Größe darstellen. Es bedarf weiterer Untersuchungen, um genaue Auslegungsvorschriften für Plattenschalldämpfer ableiten zu können. Diese Resultate zeigen, dass das Verhältnis von Biegesteifigkeit zu Flächenmasse – entgegen der Ergebnisse von Wang und Huang – nicht beliebig maximiert werden kann, sondern ein limitiertes Intervall gefunden werden muss.

Diese Schlussfolgerung kann ausschließlich für tiefe Frequenzen gezogen werden, wie der Vergleich der Durchgangsdämpfungen in Abbildung 4 verdeutlicht. Das Material mit der um eine Größenordnungen niedrigeren Flächenmasse scheint den Bereich maximaler Dämpfung erst oberhalb des in dieser Studie untersuchten Frequenzbereiches zu erreichen, wodurch er nicht in die Bewertung einfließt. Mit den ermittelten optimalen Parametern im betrachteten Variationsraum ($B = 0,135$; $h_c = 0,5$; $m'' = 1,71$) wurde eine Sperrbandbreite von $S = 3,2$ erreicht. Die Durchgangsdämpfungen erreichen somit wesentlich breitbandigere und höhere Werte als ein vergleichbarer Kammerschalldämpfer. Diese Verbesserung kann bereits lediglich durch den Einbau einer geeigneten Platte erzielt werden.

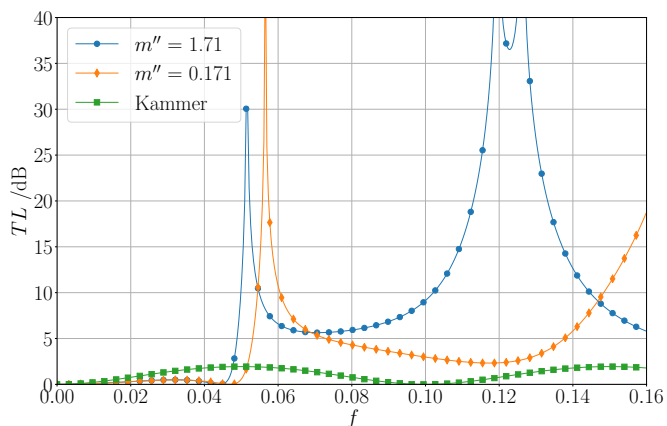


Abbildung 4: Durchgangsdämpfung in Abhängigkeit der Frequenz f und Flächenmasse m'' .

Fazit

Es konnte gezeigt werden, dass zur präzisen Modellierung eines Plattenschalldämpfers bereits die ersten fünf Schwingungsmoden der Platte und zwanzig Luftschall-Moden in der Kavität ausreichen. Dadurch kann die Rechenzeit des analytischen Wang-Modells signifikant

um bis zu 95 % reduziert werden. Das ermöglichte eine umfangreiche Parameterstudie zur Identifizierung lokaler Maxima der erreichbaren Durchgangsdämpfung des Plattenschalldämpfers.

Die Ergebnisse zeigten, dass zwar sehr hohe Biegesteifigkeiten notwendig sind, die Flächenmasse jedoch entgegen bisheriger Erkenntnisse nicht beliebig niedrig sein darf. Nur in einem limitierten Intervall des Biegesteifigkeit-Flächenmasse-Verhältnisses konnte das globale Maximum des untersuchten Parameter-raums festgestellt werden. Die Spektren der Durchgangsdämpfung zeigen wie erwartet sehr breitbandige und tieffrequente Schalldämpfung. Es lässt sich vermuten, dass der Plattenschalldämpfer auch für höhere Frequenzen, die in dieser Arbeit nicht untersucht worden waren, ausgelegt werden kann.

Danksagung

Die hier vorgestellten Arbeiten wurden gefördert durch das Bundesministerium für Wirtschaft und Energie aufgrund eines Beschlusses des Deutschen Bundestages.

Literatur

- [1] Wang, C.: Development of a broadband silencer in flow duct. PhD thesis. The Hong Kong Polytechnic University (2008)
- [2] Wang, C., Han, J., Huang, L.: Optimization of a clamped plate silencer. The Journal of the Acoustical Society of America 121 (2007), 949-960
- [3] Wang, C., Cheng, L., Huang, L.: Realization of a broadband low-frequency plate silencer using sandwich plates. Journal of Sound and Vibration 318, Elsevier (2008), 792-808
- [4] Huang, L.: Modal analysis of a drumlike silencer. The Journal of the Acoustical Society of America 112 (2002), 2014-2025
- [5] Huang, L.: Parametric study of a drum-like silencer. Journal of Sound and Vibration 269, Elsevier (2004), 467-488
- [6] Huang, L., Choy, Y.: Vibroacoustics of three-dimensional drum silencer. The Journal of the Acoustical Society of America 118 (2005), 2313-2320
- [7] Huang, L.: Broadband sound reflection by plates covering side-branch cavities in a duct. The Journal of the Acoustical Society of America 119 (2006), 2628-2638
- [8] Inman, D.: Engineering Vibration. Pearson (2014)
- [9] Möser, M.: Technische Akustik. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2005)