

W3 Wärmeleitfähigkeit

Physikalische Grundlagen

Der Wärmetransport in Festkörpern wird durch die Wärmeleitungsgleichung beschrieben. Ihre Lösung liefert die Orts- (hier nur eindimensional) und Zeitabhängigkeit der Temperatur $\vartheta(x, t)$ in einem Medium mit der Wärmeleitfähigkeit λ , der spezifischen Wärmekapazität c_p und der Dichte ρ .

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \quad (1)$$

Zur Lösung dieser Gleichung müssen neben der Kenntnis des Verhältnisses der Wärmeleitfähigkeit λ zum Wärmespeichervermögen ρc_p noch Randbedingungen $\vartheta(x_{Rand}, t)$ und Anfangsbedingungen $\vartheta(x, 0)$ vorgegeben sein.

Zur Messung der Wärmeleitfähigkeit λ einer Probe kann man die Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 an zwei Punkten x_1 und x_2 der Probe konstant halten. Nach einem hinreichend langen Zeitraum verändert sich das Temperaturprofil zwischen den Punkten nicht mehr, die Wärmeabgabe und die Wärmespeicherung sind im Gleichgewicht. Es gilt die stationäre Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = 0 \quad (2)$$

Diese ist erfüllt, wenn der Temperaturgradient $d\vartheta/dx = const.$, bzw. die Temperatur ϑ linear vom Ort x abhängt.

Das Fouriersche Gesetz verknüpft den Temperaturgradienten mit der Wärmestromdichte

$$\dot{q} = -\lambda \frac{d\vartheta}{dx} \quad (3)$$

die demzufolge konstant ist. Unter den oben gemachten Voraussetzungen können die Differentialquotienten durch die Differenzenquotienten ersetzt werden, so dass zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit neben den festen Randtemperaturen ϑ_1 und ϑ_2 lediglich noch der Abstand $\Delta x = x_2 - x_1$ und die Wärmestromdichte \dot{q} bestimmt werden müssen.

Zur experimentellen Realisierung der Messung (Abb. 1) wird die Temperatur an dem einen Ende eines Stabes durch ein Wasserbad auf die konstante Temperatur ϑ_U gebracht, während das andere Ende des Stabes mittels einer elektrischen Heizung auf die Temperatur ϑ_O erhitzt wird. An den Stellen x_1 und x_2 stellen sich nach einiger Zeit stationäre Werte für die Temperaturen ein.

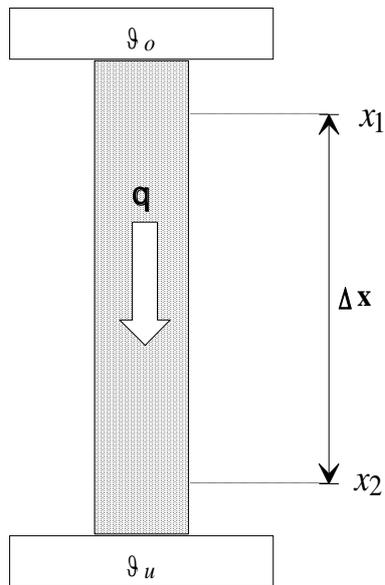


Abb.1 Messung der Wärmeleitfähigkeit eines Metallstabes

Weil bei einem stationären Temperaturprofil die Wärmespeicherung abgeschlossen ist, ist der in den Stab eintretende Wärmestrom gleich dem austretenden Wärmestrom. Dies bedeutet, dass die Wärmestromdichte an jedem beliebigen Punkt des Stabes bestimmt werden kann. Hierzu ist das untere Wärmereservoir als ein mit Wasser gefülltes Kalorimeter ausgebildet. Aus der Temperaturerhöhung $\Delta\vartheta$ des unteren Wasserbades kann man mittels der kalorischen Grundgleichung die in einer bestimmten Zeit aus dem Stab austretende Wärmemenge ΔQ ermitteln.

$$\Delta Q = (m_W c_W + C_K) \Delta\vartheta \quad (4)$$

(m_W Masse des Wassers im Kalorimeter, c_W spezifische Wärmekapazität des Wassers, C_K Wärmekapazität des Kalorimeters)

Hieraus kann bei Kenntnis der Querschnittsfläche A des Stabes die pro Zeit und Fläche transportierte Energie, also die Wärmestromdichte \dot{q} , berechnet werden.

$$\dot{q} = \frac{\Delta Q}{A \Delta t} \quad (5)$$

Versuchsvorbereitung

- Gesetze der Wärmestrahlung, Konvektion, Wärmeleitung
- Wärmeleitung, stationäre/ instationäre Temperaturprofile
- Wärmeleitfähigkeit, Wärmespeichervermögen
- kalorische Grundgleichung, Wärmekapazität, spezifische Wärmekapazität
- Wie kann die Wärmekapazität eines Kalorimeters bestimmt werden?

Aufgaben

- Bestimmen Sie die Wärmekapazität des Kalorimeters durch ein Mischungsexperiment!
- Ermitteln Sie die Wärmeleitfähigkeit eines Metallstabes durch eine Messung der mittleren Temperaturdifferenz zwischen den Stellen x_1 und x_2 und der Wärmestromdichte.

Dazu wird das obere Ende des Stabes mittels einer an ihm angebrachten Heizwicklung erhitzt während das untere Ende des Stabes durch ein mit Wasser gefülltes Gefäß auf konstanter Zimmertemperatur gehalten wird. Nach dem Erreichen des stationären Zustandes wird das untere Gefäß durch ein mit Wasser gefülltes Kalorimeter ersetzt und die Temperatur im Kalorimeter in Abhängigkeit von der Zeit gemessen.

Aus dem zeitlichen Verlauf (Anstieg) kann die Wärmestromdichte berechnet werden.

- Stellen Sie die gemessenen Temperaturen in Abhängigkeit der Zeit dar. Geben Sie den Zeitpunkt an, nach dem stationäre Verhältnisse erreicht wurden.
- Führen Sie eine Fehlerabschätzung für die Wärmeleitfähigkeit durch.