O2P Beugung an Gitter und Spalt

Grundlagen

Zwei, sich im Abstand d befindliche punktförmige Quellen senden im Gleichtakt Kreiswellen[1] der Wellenlänge λ aus.

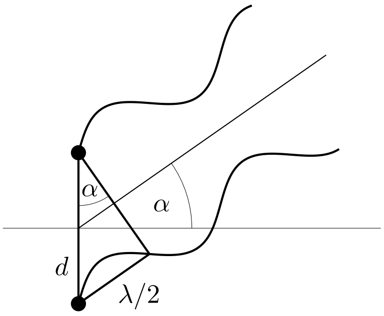

Abbildung 1: Dargestellt sind zwei punktförmige Quellen, deren im Winkel α ausgesendeten Wellen einen Wegunterschied von $\lambda/2$ aufweisen, so dass sie sich auslöschen.

Auf Grund der unterschiedlichen Entfernung der beiden Quellen zu einem beliebigen Punkt,[2] haben die dort einlaufenden Wellen in der Regel eine Phasenverschiebung. Ist diese ein geradzahliges Vielfaches n der Wellenlänge, verstärken sich die Wellen an diesem Punkt. Ist die Phasenverschiebung ein ungeradzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge, löschen sich die Wellen aus. Entsprechend

$$\sin \alpha_n = \pm n \frac{\lambda/2}{d} \tag{1}$$

erhält man für gerade n die Winkel für Maxima, für ungerade n die Winkel der Minima.[3]

Zur Berechnung der Intensitätsverteilung für beliebige Winkel müssen zunächst die beiden Wellenzüge unter Berücksichtigung ihrer Phasenverschiebung addiert werden.

$$A_{ges} \propto \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x + d\sin\alpha)\right) \tag{2}$$

$$\propto \cos\left(\frac{\pi}{\lambda}d\sin\alpha\right)\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\pi}{\lambda}d\sin\alpha\right) \tag{3}$$

Die beobachtbare, in Abbildung 2 dargestelle Intensität ist proportional zum Quadrat der Gesamtamplitude

$$\frac{I(\alpha)}{I(0)} = \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda}d\sin\alpha\right). \tag{4}$$

[1]Beispielhaft werden hier Lichtwellen betrachtet.

[2]Liegt dieser Punkt in großer Entfernung, können die ihn erreichenden Wellen als parallel verlaufend angenommen werden.

[3]Üblicherweise werden die Maxima mit $k = n/2$ und die Minima mit $k = (n+1)/2$ bezeichnet, so dass sie einfach durchgezählt werden können.

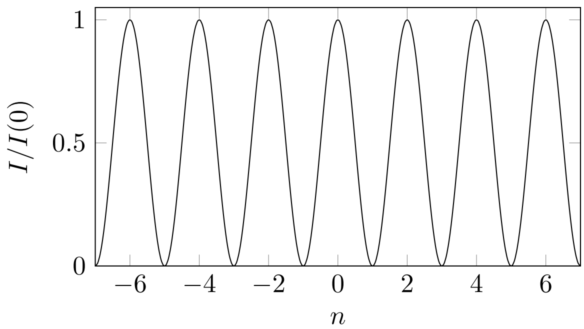

Abbildung 2: Intensitätsverteilung der Überlagerung zweier Quellen in Abhängigkeit des Winkels. Einem beliebigen Winkel im Bereich von $-90° \leq \alpha \leq 90°$ kann mittels (1) ein entsprechender, nicht notwendig ganzzahliger Wert von $n = 2\frac{d}{\lambda}\sin\alpha$ zugeordnet werden.

Eine Erweiterung auf mehr als 2 Quellen in äquidistanten Abständen d ändert an den gemachten Überlegungen nichts[4]. Auch können die punktförmigen Quellen entsprechend dem Huygens'schen Prinzip durch sehr dünne Spalte in einem sonst geschlossenen Hindernis, auf welches eine ebene Welle trifft, gebildet werden. Man spricht dann von einem Doppelspalt bzw. Gitter mit der Gitterkonstanten d.[5]

Als Quellen können auch reflektierende Bereiche wirken, man spricht dann von einem Reflexionsgitter. Wie in Abb. 3 gezeigt, soll die Beleuchtung unter dem Winkel $\beta < 0$ erfolgen.

Neben dem nach dem Reflexionsgesetz unter $\alpha_0 = -\beta$ reflektierten Licht entstehen noch weitere Reflexe bei Winkeln, für die die gesamte Weglängendifferenz von einfallenden und von den reflektierenden Bereichen in alle Richtungen ausgesendeten Wellen ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge ist. Für die reflektierten Wellen ergibt sich die Weglängendifferenz wie in Abbildung 1 wieder zu $d\sin\alpha_n$. Analog haben die unter dem Winkel β einlaufenden Wellen bereits ebenfalls eine Weglängendifferenz[6] von $d\sin\beta$, so dass Reflexionen bei

$$n\lambda = d(\sin\alpha + \sin\beta). \tag{5}$$

entstehen.

Oftmals können die einzelnen Quellen nicht als punktförmig angenommen werden. Vielmehr befinden sich in einem Bereich b unendlich viele, dicht liegende Quellen. Die

[4]Dies gilt nur für die Winkel unter denen Maxima und Minima erscheinen. Die Maxima werden jedoch mit zunehmender Quellenzahl immer schärfer.

[5]Oft wird auch der Kehrwert $1/d$, welcher dann die Anzahl der Spalte (Linien) je Längeneinheit angibt, als Gitterkonstante bezeichnet.

[6]Entsprechend der Einfallsrichtung und damit des Vorzeichens des Winkels β, kann diese positiv oder negativ sein.

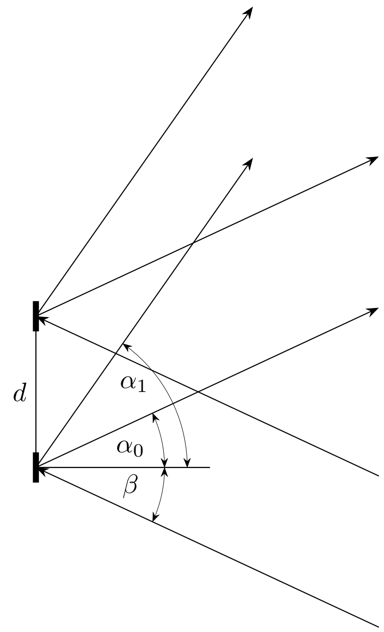

Abbildung 3: Reflexion am Gitter
Das Licht fällt unter dem Winkel $\beta < 0$ auf das Gitter. Neben dem unter dem Winkel α_0 direkt reflektierten Licht entstehen weitere Maxima. Beispielhaft ist das 1. Maximum unter α_1 dargestellt.

Phasenverschiebung der Wellenzüge, die von dicht beieinanderliegenden Quellen ausgehen, ist praktisch Null. Die Interferenzbedingung (1) kann nur für Wellenzüge von zwei entsprechend weit auseinanderliegenden Quellen mit dem endlichen Abstand Δy erfüllt sein. Dies gilt gleichermaßen für alle Wellenzüge, die von Quellenpaaren ausgehen, die sich ebenfalls im Abstand Δy befinden.

Wenn, wie in Abbildung 4 dargestellt, $\Delta y = b/m$ ein geradzahliger Teil der Gesamtbreite ist, löschen sich alle Wellenzüge paarweise aus. Es gilt die Beziehung (1) für die erste $n = 1$ Auslöschung zweier Quellen im Abstand $d = \Delta y = b/m$, so dass sich gemäß

$$\sin\alpha_m = \pm\frac{\lambda/2}{b/m} \tag{6}$$

Minima bilden.

Für alle anderen Aufteilungen des Bereiches b, d.h. beliebige m ist dies nicht der Fall. Es verbleibt ein gewisser Anteil an Wellen, deren maximale Phasenverschiebung untereinander kleiner als $\lambda/2$ ist und die sich demzufolge nicht vollständig auslöschen können.

Maxima findet man für nahezu ganzzahlige und ungerade $m \geq 3$. Hier verbleiben $1/m$ -tel der ausgesendeten Wellen, welche entsprechend (6) ein Maximum bilden.[7] [8]

Die genaue Berechnung der winkelanhängigen Intensitätsverteilung und damit der Winkel für die Maxima erfordert die Summation der Amplituden der von allen Quellen im

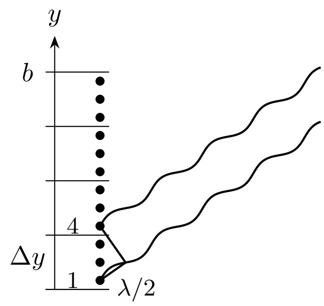

Abbildung 4: Dargestellt sind 12 im Bereich b dicht liegende Quellen. Löschen sich, wie dargestellt, die Wellen der 1. und der 4. Quelle aus, gilt dies gleichermaßen für die 2. und die 5., die 3. und die 6. und weiter für die 7. und die 10. und so weiter, so dass sich alle Wellen auslöschen. Der Abstand der Quellen 1 und 4 beträgt gerade $\Delta y = b/4$. Der gesamte Bereich ist demzufolge geradzahlig in 4 Teilbereiche unterteilt worden.

Bereich $y = 0 \ldots b$ ausgesendeten Wellen

$$A(y,\alpha) \propto \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x + \Delta x(y,\alpha))\right) \tag{7}$$

unter Berücksichtigung ihrer Phasenverschiebung $\Delta x(y,\alpha) = y\sin\alpha$.

Die Integration $\int_0^b A(y,\alpha)dy$ liefert

$$A_{ges} \propto \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}b\sin\alpha\right)}{\sin\alpha} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\pi}{\lambda}b\sin\alpha\right). \tag{8}$$

Die beobachtbare winkelabhängige Intensität I ist proportional zum Quadrat der Amplitude der überlagerten Wellen $A^2_{ges,max}(\alpha)$. Durch Division mit $(\pi/\lambda b)^2$ wird auf $I(0) = 1$ normiert.

$$\frac{I(\alpha)}{I(0)} \propto \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}b\sin\alpha\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda}b\sin\alpha\right)^2} \tag{9}$$

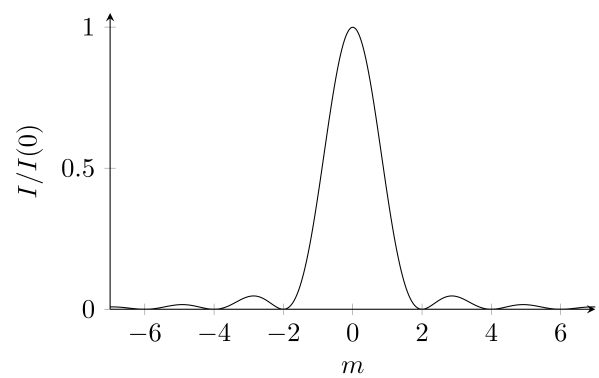

Abbildung 5: Intensitätsverteilung der Überlagerung vieler im Bereich b dicht liegender Quellen in Abhängigkeit des Winkels.
Einem beliebigen Winkel im Bereich von $-90° \leq \alpha \leq 90°$ kann mittels (6) ein entsprechender, nicht notwendig ganzzahliger Wert von $m = 2\frac{b}{\lambda}\sin\alpha$ zugeordnet werden.

[7] Zusätzlich entsteht unter dem Winkel Null, formal für $m = 0$ auf der Symmetrielinie ein Maximum, da die Wellen in diesem Fall nicht phasenverschoben sind.

[8] Die Minima können wieder durchnummeriert werden mit $k = m/2$, die Maxima mit $k = (m-1)/2$. Zusätzlich erhält man für $k = 0$ für das 0-te Maximum bei $\alpha = 0$.

Die ersten, nicht ganzzahligen m liegen bei[9]

$$m = 2\frac{b}{\lambda}\sin\alpha = \begin{cases} 2{,}86 \\ 4{,}92 \\ 6{,}94 \\ \dots \end{cases} . \tag{10}$$

Betrachtet man 2 oder mehrere Quellen im Abstand d, die jeweils eine endliche Ausdehnung b haben, überlagern sich die Intensitätsverteilungen (4) und (9). In Abbildung 6 ist dies beispielhaft für $d = 3b$ dargestellt.

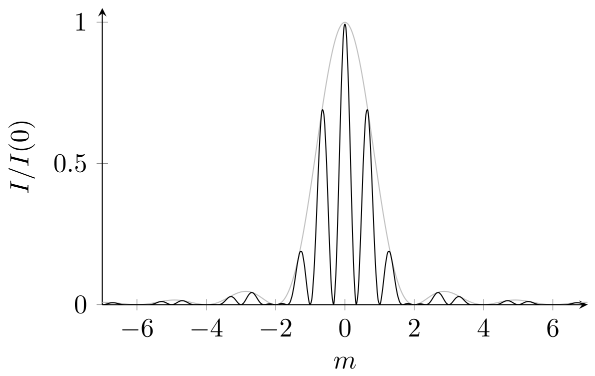

Abbildung 6: Intensitätsverteilung für zwei endlich breite Spalte. Dargestellt ist die Verteilung für $d = 3b$. Hier fällt beispielsweise das erste Minimum des Einzelspaltes gerade auf das dritte Maximum des Doppelspaltes, welches dadurch unterdrückt wird.

Versuchsvorbereitung

- Kohärenz, Beugung, Brechung, Huygens'sches Prinzip
- Fraunhofersche und Fresnelsche Beugung
- Skizzieren Sie die Strahlengänge für zwei reflektierende Punkte und zeigen Sie die Richtigkeit der Beziehung (5).

  Zeigen Sie, dass die Beziehung (5) ungeändert gilt, wenn sich an der Oberfläche des Reflexionsgitters eine lichtdurchlässige Schicht mit einer Brechzahl gößer 1 befindet!
- Überlegen Sie sich, was es bedeutet und welches Resultat $d \to 0$ in (5) liefert.
- Leiten Sie die Beziehungen (8) und (9) her!

Aufgaben

- Bestimmen Sie die Wellenlänge des verwendeten Lasers durch Beugung an einem Gitter mit bekannter Gitterkonstante!
- Führen Sie eine Fehlerschätzung durch!
- Bestimmen Sie die Breite b eines Einzelspaltes!
- Bestimmen Sie die Breite b, sowie den Spaltabstand d für einen Doppelspalt bzw. ein Gitter!

  Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mittels eines Mikroskopes.
- Bestimmen Sie den Spurabstand einer CD bzw. DVD!

[9] Die weiteren Werte konvergieren schwach gegen die Werte aus (6). Ihre Abweichungen sind jedoch deutlich kleiner als 1 %