O2P Beugung an Gitter und Spalt

Grundlagen

Zwei, sich im Abstand d befindliche punktförmige Quellen senden im Gleichtakt Kreiswellen[1] der Wellenlänge λ aus. Auf Grund der unterschiedlichen Entfernung der bei-

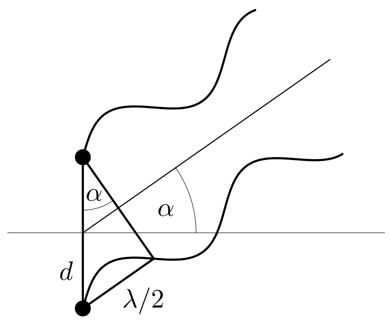

Abbildung 1: Dargestellt sind zwei punktförmige Quellen, deren im Winkel α ausgesendeten Wellen einen Wegunterschied von $\lambda/2$ aufweisen, so dass sie sich auslöschen.

den Quellen zu einem beliebigen Punkt,[2] haben die dort einlaufenden Wellen in der Regel eine Phasenverschiebung. Ist diese ein geradzahliges Vielfaches n der Wellenlänge, verstärken sich die Wellen an diesem Punkt. Ist die Phasenverschiebung ein ungeradzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge, löschen sich die Wellen aus. Entsprechend

$$\sin \alpha_n = \pm n \frac{\lambda/2}{d} \tag{1}$$

erhält man für gerade n die Winkel für Maxima, für ungerade n die Winkel der Minima.[3]

Zur Berechnung der Intensitätsverteilung müssen zunächst die beiden Wellenamplituden phasenrichtig addiert werden.

$$A_{ges} \propto \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x + d\sin\alpha)\right) \tag{2}$$

$$\propto \cos\left(\frac{\pi}{\lambda}d\sin\alpha\right)\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\pi}{\lambda}d\sin\alpha)\right) \tag{3}$$

Die beobachtbare, in Abbildung 2 dargestelle Intensität ist proportional zum Quadrat der Gesamtamplitude

$$\frac{I(\alpha)}{I(0)} = \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda}d\sin\alpha\right). \tag{4}$$

[1] Beispielhaft werden hier Lichtwellen betrachtet.
[2] Liegt dieser Punkt in großer Entfernung, können die ihn erreichenden Wellen als parallel verlaufend angenommen werden.
[3] Üblicherweise werden die Maxima mit $k = n/2$ und die Minima mit $k = (n+1)/2$ bezeichnet, so dass sie einfach durchgezählt werden können.

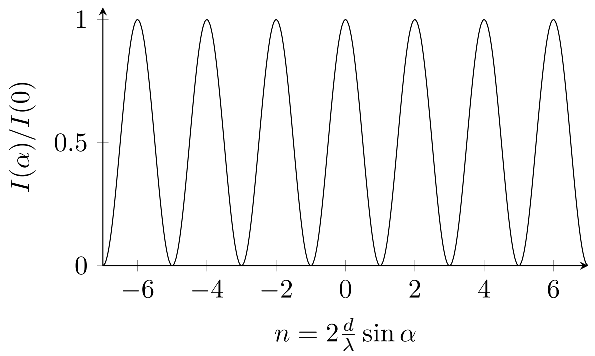

Abbildung 2: Intensitätsverteilung der Überlagerung zweier Quellen

Eine Erweiterung auf mehr als 2 Quellen in äquidistanten Abständen d ändert an den gemachten Überlegungen nichts[4]. Auch können die punktförmigen Quellen entsprechend dem Huygens'schen Prinzip durch sehr dünne Spalte in einem sonst geschlossenen Hindernis, auf welches eine ebene Welle trifft, gebildet werden. Man spricht dann von einem Doppelspalt bzw. Gitter mit der Gitterkonstanten d.[5]

Als Quellen können auch reflektierende Bereiche wirken, man spricht dann von Reflexionsgittern. Die Beleuchtung erfolgt im Regelfall unter dem Winkel β. Neben dem unter $\alpha = -\beta$ reflektierten Licht entstehen noch weitere Reflexe bei Winkeln, für die die gesamte Weglängendifferenz von einfallenden aud reflektierten Wellen ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge ist. Für die reflektierten Wellen ergibt sich die Weglängendifferenz nach Abbildung 1 wieder zu $d\sin\alpha$. Analog haben die unter dem Winkel β einlaufenden Wellen bereits ebenfalls eine Weglängendifferenz[6] von $d\sin\beta$, so dass Reflexionen bei

$$n\lambda = d(\sin\alpha + \sin\beta). \tag{5}$$

entstehen.

Oftmals können die einzelnen Quellen nicht als punktförmig angenommen werden. Vielmehr befinden sich in einem Bereich b unendlich viele, dicht liegende Quellen. Die Interferenzbedingung (1) kann dann nicht für dicht liegende, sondern nur für entsprechend weit auseinanderliegende Quellen im Abstand Δy erfüllt sein. Dies gilt gleichermaßen für alle weiteren Quellenpaare, die sich ebenfalls im Abstand Δy befinden.

[4] Dies gilt nur für die Winkel unter denen Maxima und Minima erscheinen. Die Maxima werden jedoch mit zunehmender Quellenzahl immer schärfer.
[5] Oft wird auch der Kehrwert $1/d$, welcher dann die Anzahl der Spalte (Linien) je Längeneinheit angibt, als Gitterkonstante bezeichnet.
[6] Entsprechend der Einfallsrichtung, bzw. des Vorzeichens des Winkels β, kann diese positiv oder negativ sein.

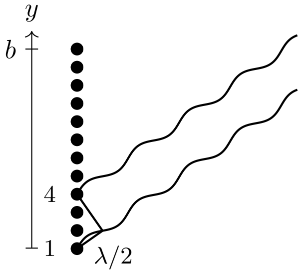

Abbildung 3: Dargestellt sind 12 im Bereich b dicht liegende Quellen. Löschen sich, wie dargestellt, die Wellen der 1. und der 4. Quelle aus, gilt dies gleichermaßen für die 2. und die 5., die 3. und die 6. und weiter für die 7. und die 10. und so weiter, so dass sich alle Wellen auslöschen. Der Abstand der Quellen 1 und 4 beträgt gerade $\Delta y = b/4$. Der gesamte Bereich ist demzufolge geradzahlig in 4 Teilbereiche unterteilt worden.

Wenn, wie in Abbildung 3 dargestellt, $\Delta y = b/m$ ein geradzahliger Teil der Gesamtbreite ist ($m = 4$), löschen sich alle Quellen paarweise aus, unter dem zugehörigen Winkel entsteht ein Minimum.

Weicht m von einer geraden Zahl ab, ist dies nicht mehr der Fall. Es verbleibt ein Anteil an Wellen, deren maximale Phasenverschiebung kleiner als $\lambda/2$ ist und die sich demzufolge nicht vollständig auslöschen können.

Maxima findet man näherunsweise für ungerade $m \geq 3$. Hier verbleiben $1/m$ -tel der ausgesendeten Wellen.[7]

Es gilt die Beziehung (1) für die erste Auslöschung $n = 1$ zweier Quellen im Abstand $d = \Delta y = b/m$, so dass sich gemäß

$$\sin \alpha_m = \pm \frac{\lambda/2}{b/m} \tag{6}$$

Minima für geradzahlige $m \geq 2$ und Maxima für ungerade $m \geq 3$ sowie formal für $m = 0$ bilden.[8]

Die genaue Berechnung der winkelanhängigen Intensitätsverteilung und damit der Winkel für die Maxima erfordert die Summation der Amplituden der von allen Quellen im Bereich $y = 0 \ldots b$ ausgesendeten Wellen

$$A(y, \alpha) \propto \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x + \Delta x(y, \alpha))\right) \tag{7}$$

unter Berücksichtigung ihrer Phasenverschiebung $\Delta x(y, \alpha) = y \sin \alpha$.

Die Integration $\int_0^b A(y, \alpha) dy$ liefert

$$A_{ges} \propto \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \alpha\right)}{\sin \alpha} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\pi}{\lambda} b \sin \alpha\right). \tag{8}$$

Die beobachtbare Intensität $I(\alpha)$ ist proportional zum Quadrat der Amplitude der überlagerten Wellen $A^2_{ges,max}(\alpha)$. Durch Division mit $(\pi/\lambda b)^2$ wird auf $I(0) = 1$ normiert.

$$\frac{I(\alpha)}{I(0)} \propto \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \alpha\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \alpha\right)^2} \tag{9}$$

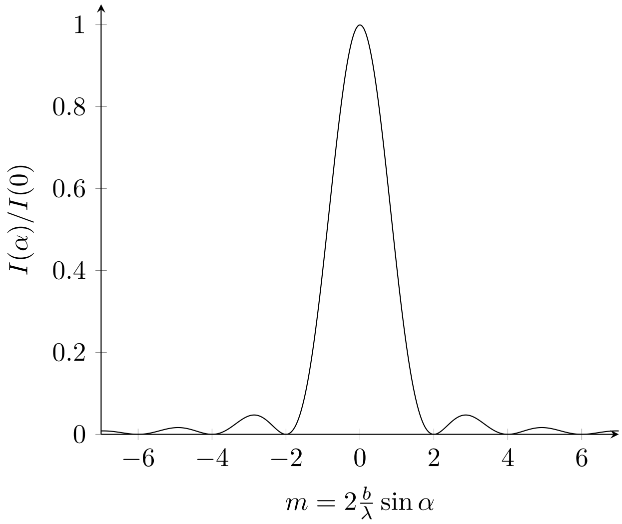

Abbildung 4: Intensitätsverteilung der Überlagerung vieler im Bereich b dicht liegender Quellen

Die ersten, gegenüber (6) abweichenden Maxima der Intensitätsverteilung liegen bei[9]

$$m = 2\frac{b}{\lambda}\sin\alpha = \begin{cases} 2{,}86 \\ 4{,}92 \\ 6{,}94 \\ \ldots \end{cases} . \tag{10}$$

Betrachtet man 2 Quellen im Abstand d, die jeweils eine endliche Ausdehnung b haben, überlagern sich die Intensitätsverteilungen (4) und (9). In Abbildung 5 ist dies beispielhaft für $d = 3b$ dargestellt.

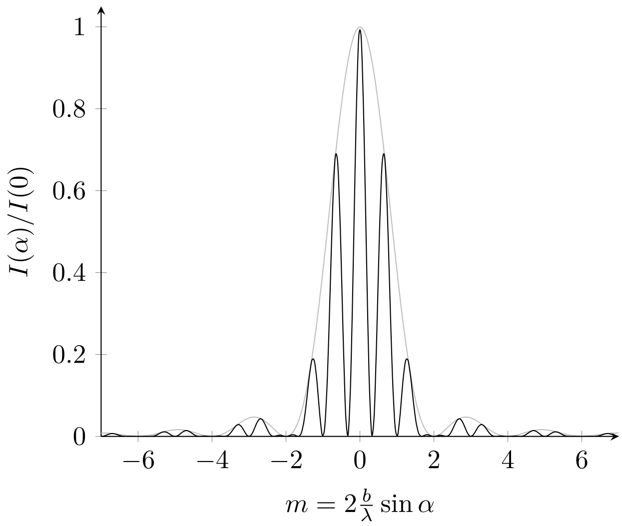

Abbildung 5: Intensitätsverteilung der Überlagerung vieler im Bereich b dicht liegender Quellen

[7] Zusätzlich entsteht unter dem Winkel Null auf der Symmetrielinie ein Maximum, da die Wellen in diesem Fall nicht phasenverschoben sind.

[8] Die Minima können wieder durchnummeriert werden mit $k = m/2$, die Maxima mit $k = (m-1)/2$. Zusätzlich erhält man für $k = 0$ für das 0-te Maximum bei $\alpha_0 = 0$.

[9] Die weiteren Werte konvergieren schwach gegen die Werte aus (6). Ihre Abweichungen sind jedoch deutlich kleiner als 1 %

Versuchsvorbereitung

- Kohärenz, Beugung, Brechung, Huygens'sches Prinzip
- Fraunhofersche und Fresnelsche Beugung
- Skizzieren Sie die Strahlengänge für zwei reflektierende Punkte und zeigen Sie die Richtigkeit der Beziehung (5).

  Zeigen Sie, dass die Beziehung (5) ungeändert gilt, wenn sich an der Oberfläche des Reflexionsgitters eine lichtdurchlässige Schicht mit einer Brechzahl gößer 1 befindet!
- Überlegen Sie sich, was es bedeutet und welches Resultat $d \to 0$ in (5) liefert.
- Leiten Sie die Beziehungen (8) und (9) her!

Aufgaben

- Bestimmen Sie die Wellenlänge des verwendeten Lasers durch Beugung an einem Gitter mit bekannter Gitterkonstante!
- Führen Sie eine Fehlerschätzung durch!
- Bestimmen Sie die Breite b eines Einzelspaltes!
- Bestimmen Sie die Breite b, sowie den Spaltabstand d für einen Doppelspalt bzw. ein Gitter!

  Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mittel eines Mikroskopes.
- Bestimmen Sie den Spurabstand einer CD bzw. DVD!