M5P Biegung

Grundlagen

Bei Beanspruchung eines Festkörpers mit der Länge y, dem Querschnitt A und dem Elastizitätsmodul E auf Zug oder Druck bewirkt die angreifende Kraft F eine proportionale und reversible[1] Längenänderung

$$\Delta y = y \frac{F}{A} \frac{1}{E}. \tag{1}$$

Mit der mechanischen Spannung $\sigma = F/A$ und der relativen Längenänderung $\varepsilon = \Delta y / y$ kann das Hookesche Gesetz in der Form

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma \tag{2}$$

geschrieben werden.

Bei der Biegung eines Stabes entstehen entlang seines Querschnittes ebenfalls Druck- und Zugbeanspruchungen. In der neutralen Faser, die den geometrischen Schwerpunkt des Stabquerschnittes enthält, ist die Spannung Null. Wird der in x-Richtung verlaufende, einseitig eingespannte Stab durch ein Drehmoment $M(x)$ nur wenig gebogen, kann seine Form gemäß

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{J_A E} T(x) \tag{3}$$

bestimmt werden.

$$J_A = \int dA \eta^2 \tag{4}$$

ist das äquatoriale Flächenträgheitsmoment des Stabes, welches sich aus der Integration der sich im Abstand η von der neutralen Faser befindlichen Querschnittsflächenelemente dA berechnet.

Eine nur am Ende l des Stabes angreifende Kraft F bewirkt an jeder Stelle des Stabes ein Drehmoment[2]

$$T(x) = F(l - x). \tag{5}$$

Die Durchbiegung folgt aus (3) durch Integration. Die Durchbiegung y_l am Ende des Stabes[3] beträgt

$$y_l = \frac{1}{3} \frac{F}{E J_A} l^3. \tag{6}$$

Die Durchbiegung des waagerecht eingespannten Stabes unter seinem eigenen Gewicht $G = m_{Stab} g$ kann mit dem wirkenden Drehmoment

$$T(x) = G \frac{(l - x)^2}{2l} \tag{7}$$

ebenfalls mittels (3) bestimmt werden. Sie beträgt am Ende des Stabes

$$y_l = \frac{1}{8} \frac{G}{E J_A} l^3 \tag{8}$$

[1] im sogenannten Proportionalitätsbereich

[2] Der Stab selbst wird als masselos betrachtet.

[3] auch Biegepfeil genannt

Regt man den einseitig fest eingespannten, am Ende mit der Masse m belegten, sonst aber masselosen Stab zu Schwingungen an, kann deren Frequenz mittels

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}} \tag{9}$$

berechnet werden. Die Federkonstante $D = F/y_l$ ist in (6) enthalten, so dass

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3 E J_A}{l^3 m}} \tag{10}$$

gilt.

Die Berechnung der Schwingungsfrequenz[4] für einen massebehafteten Stab ist erheblich komplizierter. Die Schwingungsfrequenz ist um den Faktor $2,0296$ größer als für den masselosen Stab, wenn als schwingende Masse die Stabmasse m_{Stab} in (10) gesetzt wird.

Versuchsvorbereitung

- Hookesches Gesetz, mechanische Spannungen, elastische Moduln
- Berechnung von Flächenträgheitsmomenten

  Leiten Sie Berechnungsformeln für das polare sowie das äquatoriale Flächenträgheitsmoment für Stäbe mit kreisförmigen und rechteckigen Querschnitt her.
- Leiten Sie (7) her.
- Leiten Sie (6) und (8) her.
- mathematische Beschreibung von Schwingungen

  Eigenschwingung, Eigenfrequenz, freie Schwingung, Grundschwingung, Oberschwingungen

Aufgaben

- Berechnen Sie die äquatorialen Flächenträgheitsmomente der verwendeten Stäbe.
- Messen Sie die Biegung der Stäbe unter ihrer eigenen Last.

  Berechnen Sie die Elastizitätsmoduln der Stabmaterialien.
- Zeichnen Sie Biegepfeil-Kraft-Diagramme bei statischer Belastung am Stabende für verschiedene Kräfte und Längen. Wählen Sie diese den Eigenschaften des Stabes entsprechend.

[4] Frequenz der Grundschwingung

Ermitteln Sie grafisch die Elastizitätsmoduln der Stabmaterialien.

- Messen Sie die Periodendauer T der Eigenschwingungen der Stäbe für verschiedene Einspannlängen l. Ermitteln Sie aus dem $T(l^2)$-Diagramm die Elastizitätsmoduln.

- Führen Sie Fehlerschätzungen für die mittels der verschiedenen Varianten ermittelten Elastizitätsmoduln durch.