M4 Federschwinger

Physikalische Grundlagen

Die Anwendung einer äußeren Kraft F auf eine Schraubenfeder der Länge l_0 führt zu einer Längenänderung Δx der Feder auf die Länge x.

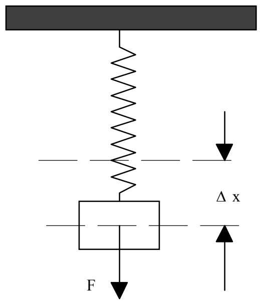

Abb.1 *Längenänderung einer Schraubenfeder*

Unter bestimmten Voraussetzungen gilt dabei das Hookesche Gesetz, so dass die Längenänderung Δx der Feder innerhalb gewisser Grenzen proportional zur Kraftwirkung F ist.

$$F = -D \cdot \Delta x \,, \tag{1}$$

wobei mit D die Federkonstante bezeichnet wurde.

Dehnt man die Feder zusätzlich und überlässt sie sich anschließend selbst, führt die Masse harmonische Schwingungen aus. Ausgehend vom Newtonschen Grundgesetz der Mechanik

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{2}$$

erhält man aus der Gleichheit der rücktreibenden Kraft (1) mit der beschleunigenden Kraft (2) die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung

$$m\ddot{x} + Dx = 0 \,, \tag{3}$$

welche die Lösung

$$x = x_0 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t + \varphi_0\right) \tag{4}$$

hat. Der vor der Zeit t stehende Wurzelausdruck stellt den 2π-fachen Wert des Kehrwertes der Schwingungsdauer T der Masse dar, so dass die Federkonstante mit

$$D = \frac{4\pi^2 \cdot m}{T^2} \tag{5}$$

berechnet werden kann.

Da die Dehnung einer Schraubenfeder letztlich aus der Verdrillung der Windungen der Feder resultiert, kann die Federkonstante in Beziehung zum Torsionsmodul G des Federdrahtes gebracht werden.

Wirkt auf einen Zylinder der Länge l am Radius r ein Drehmoment M, wird dieser um den Winkel

$$\varphi = \frac{2 \cdot l \cdot M}{\pi \cdot G \cdot r^4} = \frac{l \cdot M}{G \cdot J_P} \tag{6}$$

verdrillt.

$$J_P = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) \cdot dA = J_x + J_y \tag{7}$$

ist das polare Flächenträgheitsmoment.

Bei einer Schraubenfeder trägt jedes Längenelement dl auf dem Umfang der Feder (Radius R) zu einer Verdrehung dieses Elements um den Winkel $d\varphi$ bei, was zu einer Längenänderung dx der Gesamtfeder führt.

$$dx = R d\varphi \tag{8}$$

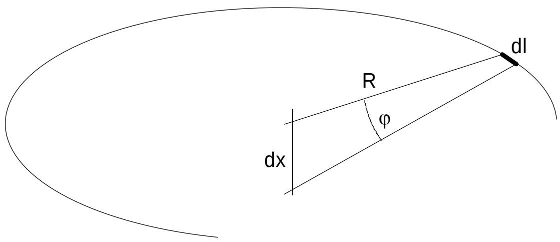

Abb.2 *Windung einer gedehnten Schraubenfeder*

Beachtet man, dass das an der Windung angreifende Drehmoment

$$M = R \cdot F \tag{9}$$

beträgt, und das die Gesamtlänge des Federdrahtes $n \cdot 2\pi R$ ist, so folgt für die Längenänderung der Feder

$$\Delta x = \frac{4R^3 nF}{Gr^4},$$

woraus die Federkonstante

$$D = \frac{F}{\Delta x} = \frac{Gr^4}{4R^3 n} \qquad (10)$$

abgelesen werden kann.

Versuchsvorbereitung

- Erklären Sie die Begriffe Spannung, Dehnung, Eigenschwingung, Schwingungsdauer
- Geben Sie die Gültigkeitsbedingungen für das Hookesche Gesetz an. Skizzieren Sie ein Dehnungs-Kraft-Diagramm.
- Leiten Sie aus dem Hookeschen Gesetz die Gleichung für die Federspannarbeit her. Wie groß ist die Federkonstante eines Drahtes bezüglich einer Streckung?
- Berechnen Sie ausgehend vom Orts- Zeit- Gesetz einer harmonischen Schwingung

  $$s = s_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (11)$$

  das Geschwindigkeits- Zeit- und das Beschleunigungs- Zeit- Gesetz.
- Berechnen (7) Sie das polare und axiale Flächenträgheitsmoment für einen kreisförmigen Querschnitt.

Aufgaben

- Messen Sie für eine einzelne Feder, sowie für eine Reihen- bzw. Parallelschaltung aus zwei gleichen dieser Federn die Längenänderung und die Schwingungsdauer bei verschiedenen Belastungen.
- Ermitteln Sie aus den grafischen Darstellungen der Längenänderungen und der Quadrate der Schwingungsdauern in Abhängigkeit der angehängten Massen die Federkonstanten.
- Berechnen Sie das Verhältnis der erhaltenen Federkonstanten.
- Führen Sie eine Fehlerschätzung für die Federkonstante der Einzelfeder für eine Last durch.
- Bestimmen Sie den Torsionsmodul des Drahtes der verwendeten Federn!
- Bestimmen Sie ausgehend vom ermittelten Fehler der Federkonstanten den Fehler des Torsionsmoduls durch Fehlerschätzung.