M1P Massenträgheitsmoment

Grundlagen

Ein auf einen drehbar gelagerten Körper wirkendes Drehmoment M verursacht gemäß

$$M = J\alpha \tag{1}$$

eine Winkelbeschleunigung α. Das Massenträgheitsmoment J hängt von der Massenverteilung des Körpers bezüglich der Drehachse A ab. Wenn mit r der Abstand eines Massenelements dm von der Drehachse bezeichnet wird, kann es bezüglich dieser Achse mit

$$J = \int r^2 dm \tag{2}$$

berechnet werden. Wird als Drehachse eine durch den Schwerpunkt S des Körpers verlaufende gewählt, lässt sich gemäß dem Satz von Steiner das Trägheitsmoment bezüglich einer dazu parallel um den Abstand s verschobenen Achse ermitteln

$$J_A = J_S + ms^2. \tag{3}$$

Zur experimentellen Ermittlung lassen sich Schwingungsversuche nutzen. Allen gemein ist, dass, proportional zur Winkelrichtgröße D, bei einer Winkelauslenkung φ das rücktreibende Drehmoment

$$M = -D\varphi \tag{4}$$

wirkt. Aus der Lösung der Differenzialgleichung (1) mit (4) und $\alpha = \ddot{\varphi}$ folgt für die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}. \tag{5}$$

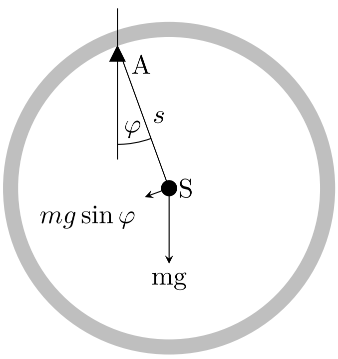

Abbildung 1: Um den Aufhängepunkt A schwingender Hohlzylinder.

Bei einer freien Pendelschwingung wirkt auf den Schwerpunkt die Gewichtskraft mg und damit entsprechend der Auslenkung aus der Gleichgewichtslage das Drehmoment $M = -mgs\sin\varphi \approx mgs\varphi$. Die Winkelrichtgröße ist also mgs, so dass mit (5) J_A bestimmt werden kann. Befestigt man den Probekörper an einem Torsionsdraht (Abb. 2) mit dem Schermodul G und der Länge l, verursacht dessen Verdrillung ein rücktreibendes Drehmoment

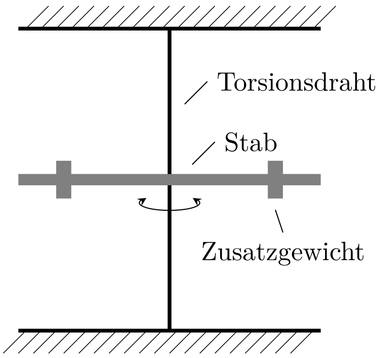

Abbildung 2: Stab mit Zusatzmassen an einem Torsionsdraht

$$M = \frac{GJ_P}{l}\varphi, \tag{6}$$

woraus unmittelbar die für die Berechnung der Periodendauer erforderliche Winkelrichtgröße D abgelesen werden kann. J_P ist das polare Flächenträgheitsmoment des Drahtes. Analog zu (2) wird es mit

$$J_P = \int r^2 dA \tag{7}$$

berechnet. dA sind die Flächenelemente der Querschnittsfläche des Drahtes. Ihre Entfernung zur neutralen Faser ist mit r bezeichnet. Die Bestimmung von D ist nicht erforderlich, wenn die Messung der Schwingungsdauer nach dem Anbringen eines bekannten zusätzlichen Massenträgheitsmomentes J_Z wiederholt wird. Wegen $(J + J_Z) \propto T'^2$ mit der neuen Schwingungsdauer T' und $J \propto T^2$ und ergibt sich nach Division der beiden Beziehungen

$$T'^2 = T^2(1 + \frac{J_Z}{J}). \tag{8}$$

Auf die Messung der Periodendauer des Probekörpers ohne Zusatzmasse kann verzichtet werden. Dafür werden die Periodendauern mit weiteren zusätzlich Trägheitsmomenten ermittelt und T'^2 in Abhängigkeit des zusätzlichen Trägheitsmomentes J_Z grafisch dargestellt. Der Anstieg der erhaltenen Geraden ist T^2/J, woraus mit (5) die Winkelrichtgröße und weiter mit (6) der Schubmodul des Drahtes bestimmbar sind. An der Stelle $J_Z = -J$ würde die Periodendauer formal gerade Null. Der Schnittpunkt der Geraden mit der J_Z-Achse liefert also gerade das Trägheitsmoment J des Probekörpers.

Versuchsvorbereitung

- Berechnen Sie die Massenträgheitsmomente für einen Zylinder bzw. Hohlzylinder bezüglich seiner Symmetrieachse und für einen dünnen Stab bezüglich einer Achse, welche senkrecht zum Stab durch seinen Mittelpunkt verläuft!
- Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment für einen dicken runden Stab![1]
- freie harmonische Schwingungen
- mathematisches und physisches Pendel
- Berechnung von Drehmomenten
- Hookesches Gesetz, Normal- und Tangentialspannung, Definition von Elastizitäts- und Schermodul
- Berechnen Sie das polare Flächenträgheitsmoment für einen Draht mit kreisförmigem Querschnitt.

Aufgaben

- Bestimmen Sie aus der Messung der Dauer der Pendelschwingung eines am inneren Umfang gelagerten Hohlzylinders dessen Massenträgheitsmoment J_A. Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment J_S bezüglich des Schwerpunktes. Vergleichen Sie mit dem aus den Abmessungen und der Masse des Hohlzylinders berechneten Wert. Führen Sie eine Fehlerschätzung für J_S durch.
- Bestimmen Sie den Schubmodul eines Drahtes durch Messung des Verdrillungswinkels bei statischer Anwendung verschiedener Drehmomente. Führen Sie eine Fehlerschätzung für G durch.
- Messen Sie die die Schwingungsdauern eines an einem Torsionsdraht mittig befestigten Stabes nach dem Anbringen von verschiedenen Zusatzmassen. Bestimmen Sie grafisch das Massenträgheitsmoment des Stabes.
- Zeichnen Sie Fehlerkreuze für Ihre Messwerte in das Diagramm und schätzen den Fehler der Bestimmung des Trägheitsmomentesdes Stabes ab.
- Bestimmen Sie die Winkelrichtgröße D sowie den Schubmodul G für den Draht. Vergleichen Sie mit den aus der statischen Verdrillung gewonnenen Werten.
- Berechnen Sie das zu erwartende Massenträgheitsmoment des dünnen Stabes aus seiner Masse und seiner Länge. Welchen Wert erhält man, wenn der Stab als dick betrachtet wird.
- Die zusätzlichen Massenträgheitsmomente werden durch zylinderförmige Massestücke der Länge l_Z und dem Radius R_Z auf dem Stab erzeugt, aber üblicherweise als Punktmassen behandelt. Bestimmen Sie für eine Konstellation den dadurch verursachten relativen Fehler des Massenträgheitsmomentes.

[1] Der dicke Stab kann in unendlich viele dünne Stäbe zerlegt werden. Das gesamte Massenträgheitsmoment erhält man durch Aufsummation unter Beachtung des Satzes von Steiner (3)