

# M1P Massenträgheitsmoment und Torsion

## Grundlagen

Ein auf einen drehbar gelagerten Körper wirkendes Drehmoment  $M$  verursacht gemäß

$$M = J\alpha \quad (1)$$

eine Winkelbeschleunigung  $\alpha$ . Das Massenträgheitsmoment  $J$  hängt von der Massenverteilung des Körpers bezüglich der Drehachse A ab. Wenn mit  $r$  der Abstand eines Massenelements  $dm$  von der Drehachse bezeichnet wird, kann es bezüglich dieser Achse mit

$$J = \int r^2 dm \quad (2)$$

berechnet werden. Wird als Drehachse eine durch den Schwerpunkt S des Körpers verlaufende gewählt, lässt sich gemäß dem Satz von Steiner das Trägheitsmoment bezüglich einer dazu parallel um den Abstand  $s$  verschobenen Achse ermitteln

$$J_A = J_S + ms^2. \quad (3)$$

Zur experimentellen Ermittlung lassen sich Schwingungsversuche nutzen. Allen gemein ist, dass, proportional zur Winkelrichtgröße  $D$ , bei einer Winkelauslenkung  $\varphi$  das rücktreibende Drehmoment

$$M = -D\varphi \quad (4)$$

wirkt. Aus der Lösung der Differenzialgleichung (1) mit (4) und  $\alpha = \ddot{\varphi}$  folgt für die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}. \quad (5)$$

Bei einer freien Pendelschwingung wirkt auf den Schwerpunkt die Gewichtskraft  $mg$  und damit entsprechend der Auslenkung aus der Gleichgewichtslage das Drehmoment  $M = -mgs \sin \varphi \approx mgs\varphi$ . Die Winkelrichtgröße ist also  $mgs$ , so dass mit (5)  $J_A$  bestimmt werden kann.

Befestigt man den Probekörper an einem Torsionsdraht mit dem Schermodul  $G$  und der Länge  $l$ , verursacht dessen Verdrillung ein rücktreibendes Drehmoment

$$M = \frac{GJ_P}{l}\varphi, \quad (6)$$

woraus unmittelbar die für die Berechnung der Periodendauer erforderliche Winkelrichtgröße  $D$  abgelesen werden kann.  $J_P$  ist das polare Flächenträgheitsmoment des Drahtes. Analog zu (2) wird es mit

$$J_P = \int r^2 dA \quad (7)$$

berechnet.  $dA$  sind die Flächenelemente der Querschnittsfläche des Drahtes. Ihre Entfernung zur neutralen Faser ist mit  $r$  bezeichnet.

Auf die ungenaue Bestimmung von  $D$  kann verzichtet werden, wenn die Messung der Schwingungsdauer nach dem Anbringen eines bekannten zusätzlichen Massenträgheitsmomentes  $J_Z$  wiederholt wird. Wegen  $(J+J_Z) \propto T'^2$  mit der neuen Schwingungsdauer  $T'$  und  $J \propto T^2$  und ergibt sich nach Division der beiden Beziehungen

$$T'^2 = T^2\left(1 + \frac{J_Z}{J}\right). \quad (8)$$

Auf die Messung der Periodendauer des Probekörpers kann verzichtet werden. Dafür werden die Periodendauern mit weiteren zusätzlich Trägheitsmomenten ermittelt und  $T'^2$  in Abhängigkeit des zusätzlichen Trägheitsmomentes  $J_Z$  grafisch dargestellt. Der Anstieg der erhaltenen Geraden ist  $T^2/J$ , woraus mit (5) die Winkelrichtgröße und weiter mit (6) der Schubmodul des Drahtes bestimmbar sind. An der Stelle  $J_Z = -J$  würde die Periodendauer gerade Null. Der Schnittpunkt der Geraden mit der  $J_Z$ -Achse liefert also gerade  $J$ .

## Versuchsvorbereitung

- Berechnen Sie die Massenträgheitsmomente für
  - Punktmassen
  - einen Zylinder und Hohlzylinder bezüglich seiner Symmetrieachse
  - einen dünnen und einen dicken runden Stab bezüglich einer Achse, welche senkrecht zum Stab durch seinen Mittelpunkt verläuft.<sup>1</sup>
- freie harmonische Schwingungen
- mathematisches und physisches Pendel
- Hookesches Gesetz, Normal- und Tangentialspannung, Definition von Elastizitäts- und Schermodul
- Berechnung von Drehmomenten
- Berechnen Sie das polare Flächenträgheitsmoment für einen Draht mit kreisförmigem Querschnitt.

<sup>1</sup>Der dicke Stab kann in unendlich viele dünne Stäbe zerlegt werden. Das gesamte Massenträgheitsmoment erhält man durch Aufsummation unter Beachtung des Satzes von Steiner (3)

## Aufgaben

- Bestimmen Sie aus der Messung der Dauer der Pendelschwingung eines am inneren Umfang gelagerten Hohlzylinders dessen Massenträgheitsmoment  $J_A$ . Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment  $J_S$  bezüglich des Schwerpunktes. Vergleichen Sie mit dem aus den Abmessungen und der Masse des Hohlzylinders berechneten Wert. Führen Sie eine Fehlerschätzung für  $J_S$  durch.
- Bestimmen Sie den Schubmodul eines Drahtes durch Messung des Verdrillungswinkels bei statischer Anwendung verschiedener Drehmomente. Führen Sie eine Fehlerschätzung für  $G$  durch.
- Bestimmen Sie grafisch das Massenträgheitsmoment eines an einem Torsionsdraht mittig befestigten Stabes aus den Schwingungsdauern nach dem Anbringen von verschiedenen zusätzlichen Massenträgheitsmomenten.
- Bestimmen Sie die Winkelrichtgröße  $D$  sowie den Schubmodul  $G$  für den Draht. Vergleichen Sie mit den aus der statischen Verdrillung gewonnenen Werten.
- Berechnen Sie das zu erwartende Massenträgheitsmoment des dünnen Stabes aus seiner Masse und seiner Länge. Welchen Wert erhält man, wenn der Stab als dick betrachtet wird.
- Die zusätzlichen Massenträgheitsmomente werden durch zylinderförmige Massestücke der Länge  $l_Z$  und dem Radius  $R_Z$  auf dem Stab erzeugt, aber üblicherweise als Punktmassen behandelt. Bestimmen Sie für eine Konstellation den dadurch verursachten relativen Fehler des Massenträgheitsmomentes.