E28 Schwingkreis

Grundlagen

Die Parallelschaltung eines Kondensators C und einer Spule L mit dem ohmschen Widerstand R ist eine Schaltung, bei der magnetische und elektrische Feldenergie zwischen Spule und Kondensator hin und her fließen können.

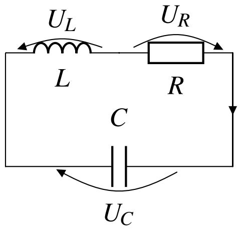

Abbildung 1: Schwingkreis

Der Maschensatz $U_C + U_R - U_L = 0$ liefert[1]

$$\frac{Q}{C} + IR + L\frac{dI}{dt} = 0, \tag{1}$$

bzw. nach Differentiation

$$\frac{1}{LC} \cdot I + \frac{R}{L}\dot{I} + \ddot{I} = 0. \tag{2}$$

Die Lösung dieser Schwingungsgleichung

$$I(t) = I_0 \mathrm{e}^{-\delta t} \sin(\omega_E t + \varphi) \tag{3}$$

stellt eine gedämpfte Schwingung mit der Dämpfungskonstanten

$$\delta = \frac{R}{2L} \tag{4}$$

und der Eigenfrequenz

$$\omega_E = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\omega_0^2}} \tag{5}$$

dar.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{6}$$

ist die Eigenfrequenz der ungedämpften Schwingung.

Die Verbindung des Schwingkreises mit einer Wechselspannungsquelle kann, wie in Abbildung 2 dargestellt, entweder durch Einfügen der Spannungsquelle an beliebiger Stelle in Reihe zu den vorhandenen Bauelementen oder durch Parallelschaltung zu ihnen erfolgen und führt zum Reihen- oder Parallelschwingkreis,[2] welcher erzwungene Schwingungen mit der Anregungsfrequenz ω ausführt. Der fließende Strom kann mit dem Betrag des Scheinwiderstandes Z der Anordnung berechnet werden $I = \frac{U}{|Z|}$.

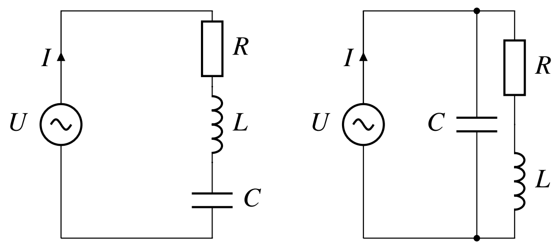

Abbildung 2: Reihen- und Parallelschwingkreis

Beim Reihenschwingkreis ergibt sich der Scheinwiderstand aus der einfachen Addition der komplexen Blindwiderstände der Bauelemente zu

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}. \tag{7}$$

In der Elektrotechnik ist die Resonanzfrequenz ω_R definiert als die Frequenz, bei der der komplexe Anteil des Scheinwiderstandes gerade verschwindet, also Strom und Spannung phasengleich sind. Wie aus (7) leicht zu sehen ist, ist das für $\omega_R = \omega_0$ der Fall. Da bei dieser Frequenz $|Z|$ minimal ist, wird auch der Strom bei dieser Frequenz $\omega_M = \omega_R = \omega_0$ maximal. Das Stromstärkemaximum ist um so ausgeprägter, je kleiner R, also die Dämpfung des Schwingkreises, ist. Ausgedrückt wird dies durch die Güte

$$Q = \frac{\omega_R}{B} \tag{8}$$

des Schwingkreises. $B = \omega_{B+} - \omega_{B-}$ ist die Bandbreite, welche als Frequenzspanne um die Resonanzfrequenz definiert ist, in der der Strom weniger als 3 dB vom Maximalwert abweicht. An den Grenzen dieses Bereiches gilt

$$\frac{|Z(\omega_{B\pm})|}{|Z(\omega_R)|} = \sqrt{2}. \tag{9}$$

Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung liefert

$$B = \frac{R}{L} = 2\delta \tag{10}$$

und damit

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_0}{2\delta}. \tag{11}$$

Interessant ist es, das Verhalten der Spannung an den Einzelbauelementen zu untersuchen. Betrachtet man beispielsweise die Spannung am Kondensator im Reihenschwingkreis, erhält man die Schaltung des LC-Tiefpasses in Abbildung 3. Es gilt

$$\frac{|U_2|}{|U_1|} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \omega^2/\omega_0^2\right)^2 + 4\omega^2\delta^2/\omega_0^4}}. \tag{12}$$

[1] Da die Spule auf Grund ihrer Selbstinduktion eine Spannungsquelle darstellt, muss ihre Spannung negativ gerechnet werden.

[2] Anders als in vielen Darstellungen, wird hier in jedem Fall der Spulenwiderstand berücksichtigt.

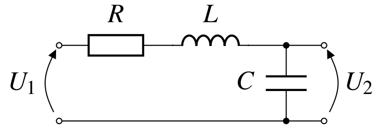

Abbildung 3: LC-Tiefpass

Bei kleiner Dämpfung ist die Teilspannung U_2 im Resonanzbereich größer als die Gesamtspannung U_1. Keine solche Resonanzüberhöhung von U_2 gibt es, wenn δ so groß gewählt wird, dass der Term unter der Wurzel bei keiner Frequenz einen Extremwert aufweist, d.h. die erste Ableitung nicht Null wird. Das ist für

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_0 \tag{13}$$

der Fall bzw. für die Güte des Schwingkreises von $Q = 1/\sqrt{2}$. Setzt man (13) in (12) ein, kann die Grenzfrequenz ω_G für diesen Fall bestimmt werden, für die wieder der -3 dB Abfall gilt, d.h. der Term unter der Wurzel gerade 2 ist. Das ist gerade für

$$\omega_G = \omega_0 \tag{14}$$

der Fall. Bei hohen Frequenzen $\omega \gg \omega_0$ vereinfacht sich (12) zu

$$\frac{|U_2|}{|U_1|} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}. \tag{15}$$

Der Spannungsabfall beträgt folglich -40 dB je Dekade oder -12 dB je Oktave, ist also doppelt so steil wie beim RC-Tiefpass.

Für den Scheinwiderstand beim Parallelschwingkreis gilt

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R + i\omega L} + i\omega C. \tag{16}$$

Der komplexe Anteil verschwindet für

$$\omega_R = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = \omega_0\sqrt{1 - 4\frac{\delta^2}{\omega_0^2}}. \tag{17}$$

Die Resonanzfrequenz ist beim Parallelschwingkreis also von der Dämpfung abhängig. Die Frequenz ω_M, für die der Strom durch den Schwingkreis minimal ist, kann aus der Extremwertsuche für den Betrag des Scheinwiderstandes (16) ermittelt werden.[3] Es ergibt sich ein von ω_R abweichender Wert von

$$\omega_M = \omega_0\sqrt{\sqrt{1 + 8\frac{\delta^2}{\omega_0^2}} - 4\frac{\delta^2}{\omega_0^2}} \approx \omega_0\sqrt{1 - 8\frac{\delta^4}{\omega_0^4}}. \tag{18}$$

Die Berechnung der Bandbreite bzw. Güte für den Parallelschwingkreis liefert dasselbe Resultat wie beim Reihenschwingkreis.

Koppelt man an einen Schwingkreis einen zweiten Schwingkreis mit der gleichen Eigenfrequenz, reagiert das System mit einer Aufspaltung seiner ursprünglichen Eigenfrequenzen ω_E zu den beiden neuen Frequenzen

$$\omega_{1/2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm k}}. \tag{19}$$

Die dimensionslose Größe k gibt die Stärke der Kopplung an. Bei schwacher Kopplung führt die Aufspaltung zunächst nur zu einer Vergrößerung der Bandbreite um maximal den Faktor $\sqrt{2}$. Bei größeren Kopplungsstärken treten ab k_{krit} beide Maxima hervor. Die kritische Kopplungsstärke ist umgekehrt proportional zur Güte der Schwingkreise $k_{krit} = 1/Q$.

[3] Physikalisch würde man bei dieser Frequenz von Resonanz sprechen.

Versuchsvorbereitung

- Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten
- Wirk-, Blind- und Scheinwiderstände, Zeigerdarstellung
- Berechnen Sie mit (9) die Bandbreite (10) für den Reihenschwingkreis!
- Schreiben Sie die Beziehungen (5),(10), (12), (17) und (18) mit der Güte Q.
- Leiten Sie die Beziehungen (13) und (14) her.
- Berechnen Sie die Resonanzfrequenz (17) für den Parallelschwingkreis.
- Zeigen Sie, dass die Steilheit beim LC-Tiefpass bei hohen Frequenzen -12 dB je Oktave beträgt.
- Berechnen Sie für $L = 23$ mH und $C = 220$ nF den Wert des maximalen Widerstandes, bis zu dem noch Resonanz bzw. Maxima in der Strom-Frequenzabhängigkeit des Parallel- und Reihenschwingkreises auftreten können.

Aufgaben

- Stellen Sie die gedämpfte Schwingung eines Schwingkreises bei verschiedenen Dämpfungen oszillografisch dar. Koppeln Sie dazu Rechteckpulse induktiv in den Schwingkreis ein.

  Ermitteln Sie aus den Oszillogrammen die Eigenfrequenzen und logarithmischen Dekremente. Berechnen Sie daraus die Dämpfungskonstanten.
- Messen Sie den ohmschen Widerstand und die Induktivität der Spule. Berechnen Sie die zu erwartenden Dämpfungskonstanten.
- Ermitteln Sie bei verschiedenen Dämpfungen die Resonanzfrequenzen ω_R und die Maximumsfrequenzen ω_M sowie die Bandbreite und Güte des Reihen und Parallelschwingkreises.

  Messen Sie dazu die Ströme $I(\omega)$ bei den erforderlichen Frequenzen. Vergleichen Sie mit den theoretisch zu erwartenden Werten.
- Dimensionieren Sie den optimalen Widerstand für den LC-Tiefpass. Überprüfen Sie ihr Ergebnis messtechnisch und ermitteln Sie die Grenzfrequenz sowie die Steilheit bei hohen Frequenzen.
- Koppeln Sie an den ungedämpften Reihenschwingkreis einen zweiten identischen Schwingkreis induktiv an. Bestimmen Sie bei kritischer Kopplung die Bandbreite.

  Skizzieren Sie bei überkritischer Kopplung die Übertragungsfunktion (Strom-Frequenz-Abhängigkeit).

  Berechnen Sie jeweils die Koppelkonstante.