

# E27 RC-Schaltungen

## Grundlagen

Bei Berechnungen der Eigenschaften von Schaltungen, die neben ohmschen auch kapazitive oder induktive Anteile enthalten,<sup>1</sup> muss die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung berücksichtigt werden. Das kann beispielsweise mittels Zeigerdiagrammen geschehen.

Eine andere übliche Methode besteht in der Einführung komplexer Operatorimpedanzen, bei welcher der Blindwiderstand komplex geschrieben wird. Für eine Kapazität  $C$  gilt bei der Kreisfrequenz  $\omega$

$$X_C = \frac{1}{i\omega C}. \quad (1)$$

Mit dem so definierten Operator können die Regeln für die Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen angewandt werden.

Zunächst sollen der RC-Tiefpass und der RC-Hochpass betrachtet werden. Das Verhältnis zwischen Ausgangs- und

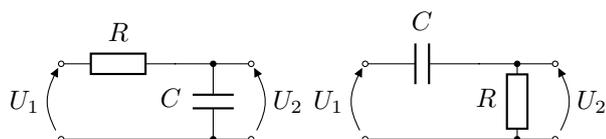


Abbildung 1: RC-Tiefpass und RC-Hochpass

Eingangsspannung beim Tiefpass ergibt sich aus der Spannungsteilerregel mit (1) zu

$$v = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{1 + i\omega RC} = \frac{e^{-i \arctan \omega RC}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}. \quad (2)$$

Der Betrag gibt das Spannungsteilverhältnis an.<sup>2</sup>

Die Phasenverschiebung zwischen  $U_1$  und  $U_2$  ist als Argument der Exponentialfunktion  $\varphi = -\arctan \omega RC$  enthalten.

Für den Hochpass beträgt das Verhältnis aus Ausgangs- und Eingangsspannung

$$v = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC} = \frac{\omega RC e^{i \arctan \frac{1}{\omega RC}}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}. \quad (3)$$

Als obere bzw. untere Grenzfrequenz wird die Frequenz definiert, bei der die Ausgangsspannung um  $-3\text{ dB}$ <sup>3</sup> gegenüber der Eingangsspannung vermindert ist. Sie beträgt für

<sup>1</sup>Hier sollen nur Kondensatoren betrachtet werden.

<sup>2</sup>Leistungsverhältnisse werden oftmals logarithmisch in Bel B angegeben. Da die Leistung durch die anliegende Spannung  $P = u^2/R$  bestimmt ist, gilt  $v = 20 \text{ dB} \cdot \log \frac{U_2}{U_1}$ .

<sup>3</sup>Entsprechend einem Spannungsteilverhältnis von  $\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

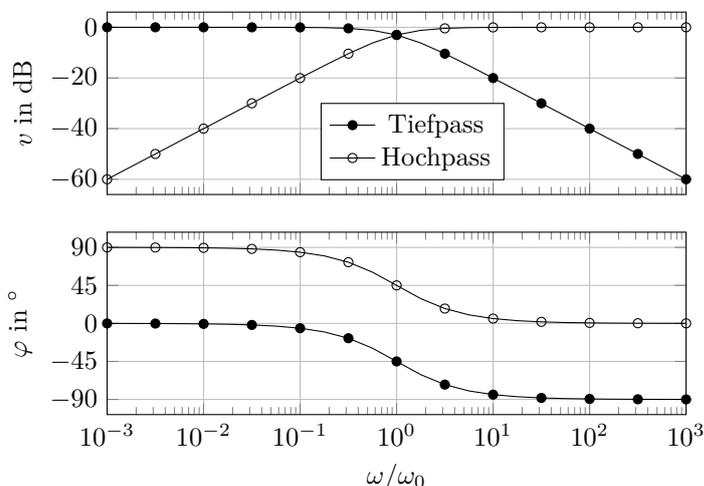


Abbildung 2: Spannungsvorgang am Tief- und Hochpass

den Tiefpass wie auch für den Hochpass

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}. \quad (4)$$

In der Abbildung 2 sind das Teilverhältnis und der Phasengang für Tief- und Hochpass dargestellt. Hat die Spannungsquelle  $U_1$  einen reellen Innenwiderstand  $R_i$ , ist dieser beim Tiefpass in Reihe zu  $R$  geschaltet. Für die Grenzfrequenz gilt folglich

$$\omega_0 = \frac{1}{(R + R_i)C}. \quad (5)$$

Wie in Abbildung 3 dargestellt, wird beim Hochpass die Schaltung qualitativ verändert.

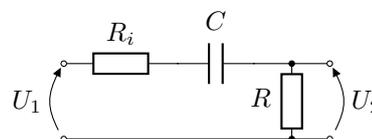


Abbildung 3: Hochpass mit zusätzlichem Widerstand  $R_i$

Wegen des durch die Widerstände gebildeten Spannungsteilers beträgt die maximale Ausgangsspannung nur

$$U_{2max} = \frac{R}{R_i + R} U_1. \quad (6)$$

Wird bei der Berechnung der Grenzfrequenz der Spannungsabfall von  $-3\text{ dB}$  auf diesen Wert bezogen, erhält man das gleiche Ergebnis (5) wie beim Tiefpass.

Sollen Spannungsteiler für Wechselspannungen realisiert

werden, müssen oft unvermeidbare kapazitive Belastungen<sup>4</sup>  $C_2$  am Teilwiderstand  $R_2$ , welche zu einem frequenzabhängigen Teilverhältnis führen würden, berücksichtigt werden.<sup>5</sup> Besonders wichtig ist die Berücksichtigung der Kapazität bei Spannungssprüngen, z. B. bei Flanken von Rechteckspannungen.

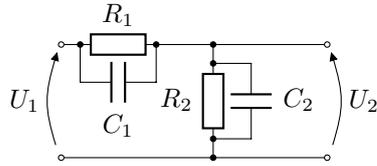


Abbildung 4: kompensierter Spannungsteiler

Durch Parallelschaltung eines geeigneten Kondensators  $C_1$  zum Widerstand  $R_1$  (Abbildung 4) kann dies verhindert werden. Der Spannungsteilerfaktor  $v_0$ <sup>6</sup> beträgt

$$v_0 = 1 + \frac{R_1 \parallel X_{C_1}}{R_2 \parallel X_{C_2}}. \quad (7)$$

Er wird frequenzunabhängig wenn

$$R_1 C_1 = R_2 C_2 \quad (8)$$

gilt<sup>7</sup> und beträgt dann  $v_0 = 1 + \frac{R_1}{R_2}$ .

Eine wichtige Anwendung stellt der Tastkopf, mit welchem z.B. Oszilloskope mit der zu messenden Schaltung verbunden werden, dar. Der Tastkopf teilt die zu messende Spannung in einem definierten Verhältnis. Üblich sind Teilverhältnisse von 10:1 oder 100:1. Der Vorteil liegt aber hauptsächlich darin, dass das Messobjekt nur mit der Reihenschaltung der Tastkopfimpendanz und der Eingangsimpedanz des Messgerätes belastet wird. Der Eingangswiderstand ist die Summe der beiden Teilerwiderstände und damit um den Faktor  $v_0$  größer als der Eingangswiderstand des Messgerätes.

Analog ist durch die Reihenschaltung der beiden Kapazitäten die kapazitive Belastung, vor allem durch das Kabel,<sup>8</sup> um den Faktor  $v_0$  reduziert.

## Versuchsvorbereitung

- Berechnung von Widerständen bei Reihen- und Parallelschaltung, Wirk-, Blind- und Scheinwiderstände, Zeigerdiagramme
- Wie groß ist die Phasenverschiebung beim Hoch- bzw. Tiefpass bei der Grenzfrequenz?

<sup>4</sup>Diese werden z.B. durch Kabelkapazitäten und Eingangskapazitäten von angeschlossenen Messgeräten hervorgerufen.

<sup>5</sup>Bei nicht harmonischen Spannungen käme es darüber hinaus zu Verzerrungen, da wegen der Frequenzabhängigkeit der Teilung verschiedene Frequenzanteile unterschiedlich geteilt und in der Phasenlage verschoben würden.

<sup>6</sup>Er ist, im Gegensatz zum weiter vorn verwendeten Spannungsteilerverhältnis, als  $\frac{u_1}{u_2} \geq 1$  definiert.

<sup>7</sup>Für einen universell einsetzbaren Spannungsteiler kann  $C_2$  durch einen definierten Kondensator gebildet werden. Dieser sollte groß im Vergleich zu den sonst zu erwartenden Kapazitäten sein, so dass diese praktisch keine Rolle spielen und  $C_1$  gemäß (8) nur von  $C_2$  abhängig ist.

<sup>8</sup>Die Kabelkapazität bildet zusammen mit dem Innenwiderstand des Messobjektes einen Tiefpass, dessen Grenzfrequenz die Bandbreite.

- Wie kann die Phasenverschiebung zweier sinusförmigen Wechselspannungen aus deren Darstellung in einem Spannungs-Zeit-Diagramm bestimmt werden?
- Anwendungen von Hoch- und Tiefpässen
- Wie verändern sich Rechteckimpulse beim Durchlaufen von Hoch- bzw. Tiefpässen?
- Um wie viel dB ändert sich das Spannungsteilverhältnis beim Tiefpass, wenn die Frequenz jeweils verzehnfacht (Dekade) bzw. verdoppelt (Oktave) wird? ( $\omega \gg \omega_0$ )? Warum wird eine Frequenzverdopplung Oktave genannt?
- Zeigen Sie, dass die mathematischen Darstellungen des Spannungsteilerverhältnisses in der Gleichung (2) (Gleichung (3)) äquivalent zueinander sind!
- Berechnen Sie die Grenzfrequenzen für Tief- und Hochpass für  $-1$  dB Spannungsabfall.
- Berechnen Sie die Grenzfrequenz des Filters in Abbildung 3.
- Beweisen Sie die Frequenzkompensationsbedingung (8)
- Zeigen Sie, dass durch einen Tastkopf der Eingangswiderstand um den Faktor  $v_0$  vergrößert und die Eingangskapazität um den Faktor  $v_0$  verkleinert wird.
- Berechnen Sie die Wirkleistung an einem Widerstand  $R$ , welcher in Reihe mit einem Kondensator  $C$  an einer Wechselspannungsquelle  $U$  mit der Frequenz  $f$  angeschlossen wird.

## Aufgaben

- Für Hoch- und Tiefpass sind das Spannungsteilerverhältnis  $v$  und die Phasenverschiebung  $\varphi$  in einem Bereich von 2 Dekaden unterhalb und 2 Dekaden oberhalb der Grenzfrequenz zu bestimmen und doppellogarithmisch darzustellen.
- Bestimmen Sie aus Ihrer Grafik die Grenzfrequenz sowie die Steilheit (Spannungsabfall in dB/Oktave bzw. dB/Dekade).  
Vergleichen Sie mit den von Ihnen berechneten Werten.
- Zeichnen Sie Oszillogramme von über den Hoch- bzw. Tiefpass übertragenen Rechteckimpulsen.
- Bestimmen Sie die Grenzfrequenz und die Steilheit eines Hochpasses 2. Ordnung (Hintereinanderschaltung zweier identischer Hochpässe).
- Vergrößern Sie den Innenwiderstand der Spannungsquelle und bestimmen Sie die entsprechende Grenzfrequenz.
- Bauen Sie einen hochohmigen (M $\Omega$ -Bereich) Spannungsteiler auf.  
Teilen Sie eine Rechteckspannung und betrachten Sie die Ausgangsspannung. Kompensieren Sie den Spannungsteiler und kontrollieren Sie das Resultat. Führen Sie dasselbe Experiment mit einem Tastkopf durch.