E21 Koaxialleitungen

Grundlagen

Auf Grund von unvermeidlichen Kapazitäten und Induktivitäten von Leitungen können deren Eigenschaften bei höheren Frequenzen nicht ignoriert werden. Das Ersatzschaltbild einer verlustlosen elektrischen Leitung besteht aus der Induktivität dL je Leitungsabschnitt dx und der Kapazität dC dieses Leitungsabschnitts. Gemäß dem Induktionsgesetz wird bei einer Stromänderung im Leitungsabschnitt die Spannung

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{dL}{dx} \cdot \frac{\partial I}{\partial t} \tag{1}$$

induziert. Eine Spannungsänderung ruft den Stromfluss

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{dC}{dx} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \tag{2}$$

hervor. Nach Ableitung der Gleichungen nach x bzw. t kann der Strom[1] substituiert werden.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{dL}{dx}\frac{dC}{dx} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \tag{3}$$

Die Lösung dieser Gleichung sind Wellen mit der Geschwindigkeit

$$c = \left(\frac{dL}{dx}\frac{dC}{dx}\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

welche sich in positiver und negativer Richtung auf der Leitung ausbreiten können.

Bildet man den Quotienten aus (1) und (2) erhält man mit

$$Z = \frac{\partial U}{\partial I} = \sqrt{\frac{dL}{dC}} \tag{5}$$

den Wellenwiderstand der Leitung.

Wegen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen sind für Strom- und Spannungsänderungen an einem bestimmten Ort nur die in unmittelbarer Umgebung dx vorhandenen infinitesimal kleinen Kapazitäten dC und Induktivitäten dL von Belang. Diese können keine Phasenverschiebung zwischen magnetischer Feldenergie (Strom) und elektrischer Feldenergie (Spannung) verursachen.[2]

Im Folgenden soll der Wellenwiderstand einer Koxialleitung berechnet werden. Dazu müssen ihre Induktivität und Kapazität bestimmt werden. Da die Felder im Wesentlichen auf das Dielektrikum zwischen dem Innenleiter mit dem Durchmesser $2r_i$ und der Abschirmung mit dem Durchmesser $2r_a$ beschränkt sind, muss zur Berechnung nur dieses Gebiet berücksichtigt werden.[3]

[1] Wenn die Ableitungen nach t bzw. x gebildet werden, kann man analog eine Gleichung für den Strom finden.

[2] Das gilt für eine auf einer unendlich langen Leitung in eine Richtung laufende Welle.

[3] Während dies für das elektrische Feld exakt gilt, wird das Magnetfeld innerhalb des Aussen- und Innenleiters im Regelfall vernachlässigt.

Aus der Energiedichte im Magnetfeld $w_{mag} = \frac{1}{2\mu_0}B^2$ und dem radialsymmetrischen Magnetfeld $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ folgt nach Integration[4] $dW_{mag} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{r_a}{r_i} \cdot dx$.

Vergleicht man mit der von einer Induktivität L gespeicherten Energie $dW_L = \frac{1}{2}dL \cdot I^2$ erhält man für die längenbezogene Induktivität

$$\frac{dL}{dx} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_a}{r_i}. \tag{6}$$

Analog erhält man aus der Energiedichte des elektrischen Feldes $w_{el} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2$ und dem radialsymmetrischen elektrischen Feld $E(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{dQ}{dx}\frac{1}{r}$ im Dielektrikum nach Integration $dW_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 \ln \frac{r_a}{r_i} \cdot dx$.

Aus dem Vergleich mit der in einer Kapazität C gespeicherten Energie $dW_{el} = \frac{1}{2}dC \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{dQ^2}{dC}$ erhält man die längenbezogene Kapazität

$$\frac{dC}{dx} = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 \ln^{-1} \frac{r_a}{r_i}. \tag{7}$$

Setzt man diese Beziehungen in (4) bzw. (5) ein, erhält man

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{8}$$

und

$$Z = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} \ln \frac{r_a}{r_i}. \tag{9}$$

Bei einer endlich langen Leitung, die mit einem Widerstand R abgeschlossen ist, kommt es zu Reflexionen der Welle an den Enden der Leitung und damit verbunden zu einer Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung. So bildet sich im Extremfall an einem kurzgeschlossenen Ende $R = 0$ ein Strombauch und ein Spannungsknoten und an einem offenen Ende $R = \infty$ ein Spannungsbauch und ein Stromknoten aus, die Phasenverschiebung beträgt $\pm 90°$, so dass keine Energie übertragen wird.

Zu keiner Reflexion und damit Phasenverschiebung kommt es, wenn die Leitung mit einem ohmschen Widerstand, welcher gleich dem Wellenwiderstand $R = Z$ ist, abgeschlossen wird.

Allgemein überlagern sich auf der Leitung die hinlaufende Spannungswelle U_+ mit der reflektierten zurücklaufenden Welle U_- zu $U_+ + U_-$. Am Lastwiderstand steht dann nur noch die Differenz $U_+ - U_-$ zur Verfügung. Da der Strom jedoch stetig übergeht, muss $Z(U_+ + U_-) = R(U_+ - U_-)$

[4] Da längenbezogene Größen von Interesse sind, wird nur über den Querschnitt $dA = 2\pi r dr$ des Dielektrikums zwischen Innen- und Außenleiter integriert.

gelten. Der Reflexionsfaktor $r = \frac{U_-}{U_+}$ ist das Verhältnis aus reflektierter zu hinlaufender Spannung. Man erhält

$$r = \frac{R - Z}{R + Z}. \tag{10}$$

Sehr wichtig ist der korrekte Abschluß der Leitung, wenn Impulse übertragen werden sollen, da diese sonst mit der Laufzeit $\tau = \frac{l}{c}$ hin und her laufen. Sollen allgemein die Spannungswerte am Leitungseingang (E) und am Leitungsausgang (A) berechnet werden, muss man beachten, dass der Abschlusswiderstand R_E am Eingang der Leitung (z.B. Innenwiderstand der Spannungsquelle) zusammen mit dem Wellenwiderstand der Leitung einen Spannungsteiler darstellt, so dass im Regelfall zunächst nicht die gesamte Spannung U_0 in die Leitung eingekoppelt werden kann. Die Spannung am Leitungsanfang in einem Zeitraum von 2τ beträgt unabhängig vom Abschlusswiderstand R_A am Ausgang der Leitung

$$U_{E_1} = \frac{Z}{R_E + Z} \cdot U_0 \tag{11}$$

Die Spannung am Leitungsausgang für einen Zeitraum von τ beträgt $U_{A_0} = 0$. Nach dieser Zeit trifft der Eingangsspannungspuls U_{E_1} am Leitungsausgang ein.

Entsprechend der Größe des Reflexionsfaktors r_A am Leitungsausgang wird ein Teil dieser Spannung $U_{E_1} \cdot r_A$ reflektiert. Die sich einstellende Spannung setzt sich zusammen aus der bereits vorhandenen Spannung U_{A_0}, dem einlaufenden Spannungspuls U_{E_1} und dem reflektierten Spannungspuls, so dass die Gesamtspannung $U_{A_1} = U_{A_0} + U_{E_1} + U_{E_1} r_A$ beträgt. Der rücklaufende Impuls mit der Höhe $U_{E_1} \cdot r_A$ wird wiederum am Leitungsanfang mit der Höhe $U_{E_1} r_A r_E$ teilweise reflektiert. Die Spannung am Leitungsanfang nach 2τ ergibt sich dann aus der Summe der ursprünglichen Spannung und der Spannungen von hin- und rücklaufendem Puls zu $U_{E_2} = U_{E_1}(1 + r_A + r_A r_E)$. Die n-te ($n > 1$) Eingangs- bzw. Ausgangsspannung lässt sich rekursiv ausdrücken:

$$\begin{aligned} U_{E_n} &= U_{A_{n-1}} + U_{E_1}(r_A r_E)^{n-1} \\ U_{A_n} &= U_{E_n} + U_{E_1}(r_A r_E)^{n-1} r_A \end{aligned} \tag{12}$$

Asymptotisch stellt sich an Ein- und Ausgang die gleiche stationäre Spannung

$$U_A = U_E = \frac{R_A}{R_A + R_E} \cdot U_0 \tag{13}$$

ein.

Versuchsvorbereitung

- Skizzieren Sie die Verläufe von elektrischem und magnetischem Feld in Abhängigkeit vom Radius $0 \leq r \leq r_a$! Gehen Sie von einer homogenen Stromverteilung im Innenleiter aus.
- Leiten Sie (6) und (7) her.
- Welcher Ausdruck ergibt sich, wenn das Magnetfeld im Innenleiter berücksichtigt wird? Gehen Sie wieder von einer homogenen Stromverteilung aus.
- Was ist der Skineffekt?
- Skizzieren Sie E- und B- Feld einer sich verlustfrei ins Unendliche ausbreitenden elektromagnetischen Welle!
- Zeigen Sie, dass auch im Gleichstromfall, die an einen Verbraucher abgegebene Energie maximal wird, wenn der Innenwiderstand der Spannungsquelle gleich dem Lastwiderstand ist.
- Welche Impedanzwerte werden bei üblichen Kabelsystemen verwendet (z.B. Antennenleitungen, Ethernet, Twisted Pair, Messtechnik ...)?
- Berechnen Sie die Werte der hin- und rücklaufenden Spannungspulse sowie die sich zu Vielfachen von τ einstellenden Spannungen am Leitungseingang und am Leitungsausgang entsprechend Gleichung 12 (bzw. vorhergehende Beziehungen im Text), bis sich stationäre Verhältnisse einstellen, wenn in die Leitung ein Spannungssprung von $U_0 = 5\,\mathrm{V}$ eingekoppelt wird. Die Impedanz des Kabels betrage $Z = 50\,\Omega$. Die Widerstände am Eingang bzw. Ausgang der Leitung betragen jeweils
  - $R_E = 50\,\Omega$, $R_A = 6\,\Omega$
  - $R_E = R_A = 50\,\Omega$
  - $R_E = 50\,\Omega$, $R_A = 1\,\mathrm{M\Omega}$
  - $R_E = 150\,\Omega$, $R_A = 6\,\Omega$

Aufgaben

- Messen Sie den Wechselstromwiderstand der am Ende offenen bzw. kurzgeschlossenen Koaxialleitung. Berechnen Sie daraus die längenbezogene Kapazität bzw. Induktivität. Schätzen Sie ab, ob der ohmsche Widerstand der Leitung berücksichtigt werden muss.
- Berechnen Sie aus den Messwerten der Kapazität und Induktivität den Wellenwiderstand der Leitung und die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen auf der Leitung sowie die Dielektrizitätskonstante.
- Berechnen Sie mit der ermittelten Dielektrizitätskonstanten und den Abmessungen der Leitung ihre Induktivität und Kapazität sowie ihren Wellenwiderstand.
- Stellen Sie am Oszilloskop einen Spannungssprung am Anfang und am Ende einer Koaxialleitung dar. Realisieren Sie die in der Vorbereitungsfrage genannten Widerstandsverhältnisse. Skizzieren Sie die Oszillogramme und vergleichen Sie mit den berechneten Werten.