E19 Kondensator und Spule

Grundlagen

Kondensatoren und Spulen sind wichtige passive Bauelemente, welche in elektronischen Schaltungen Verwendung finden.

In Kondensatoren kann Energie im elektrischen Feld zwischen zwei, sich im einfachsten Fall parallel gegenüberstehenden, leitfähigen Platten gespeichert werden. Legt man an die Platten eine Spannungsquelle mit der Spannung U_0 an, fließen Ladungsträger mit der Stromstärke $I(t) = dQ/dt$ auf die Kondensatorplatten und laden diese mit der Ladung Q auf. Der Gaußsche Satz für eine Kondensatorplatte der Fläche A liefert für das elektrische Feld $E \cdot 2A = Q/\varepsilon_0$. ε_0 ist die elektrische Feldkonstante. Die Feldstärke im Kondensator ergibt sich aus der Summe der Feldstärken der beiden im Abstand d angeordneten Platten zu $E = Q/\varepsilon_0 A$.[1] Andererseits ist die Feldstärke über $E = U/d$ mit der Spannung U am Kondensator verknüpft. Für die Kapazität C eines Kondensators, die durch das Verhältnis von Ladung und Spannung

$$Q = \int I(t)dt = C \cdot U \tag{1}$$

definiert ist, folgt somit

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}. \tag{2}$$

Die Dielektrizitätszahl ε_r des Dielektrikums berücksichtigt den Einfluss eines möglichen Dielektrikums zwischen den Kondensatorplatten.

Im Stromkreis (Abb. 1) fließt an jeder Stelle der gleiche Strom $I_C = U_R/R$, so dass mit (1)

$$C dU_C = I_C dt = \frac{U_R(t)}{R} dt = \frac{U_0 - U_C}{R} dt \tag{3}$$

gilt. Damit kann der zeitliche Verlauf der Kondensatorspannung U_C beim Aufladen[2] über den Widerstand R durch Integration berechnet werden.

$$U_C(t) = U_0 \left(1 - e^{-t/RC}\right) \tag{4}$$

Die halbe Endspannung wird erreicht nach $t_{1/2} = RC \cdot \ln 2$ mit der Zeitkonstanten $\tau = RC$. Legt man eine Wechselspannung $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ ohne Widerstand an den Kondensator an[3], kann der Strom mit $I = C\dot{U}$ berechnet werden, was unmittelbar aus (1) folgt. Der Proportionalitätsfaktor

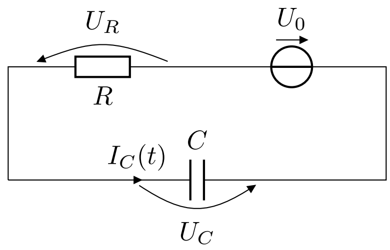

Abbildung 1: Schaltung zur Ladung eines Kondensators

zwischen Spannung und Strom ist der Blindwiderstand X_C des Kondensators. Da Spannung und Strom eine Phasenverschiebung von $\pi/2$ aufweisen[4], muss dieser im Allgemeinen komplex geschrieben werden[5].

$$X_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C} \tag{5}$$

Die im Kondensator im Mittel geleistete Arbeit ist Null[6], was aus der Integration von $\int U(t)I(t)dt$ über eine volle Periode folgt.

In Spulen wird Energie im magnetischen Feld im Innern der Spule[7] gespeichert. Mit dem Durchflutungsgesetz kann das Magnetfeld einer Spule der Länge l mit der Windungszahl N berechnet werden.

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{N}{l} I \tag{6}$$

μ_0 ist die magnetische Feldkonstante und mit der Permeabilitätszahl μ_r wird der Einfluss des in der Spule befindlichen Materials berücksichtigt. Ändert sich der Stromfluss und damit das Magnetfeld der Spule, entsteht in der Spule die Selbstinduktionsspannung

$$U = -NA\frac{dB}{dt} = -\mu_0 \mu_r \frac{N^2 A}{l} \frac{dI}{dt} = -L\dot{I}. \tag{7}$$

Mit

$$L = \mu_0 \mu_r N^2 A/l \tag{8}$$

wird die Selbstinduktivität der Spule bezeichnet.

In der Abbildung 2 ist das Schaltbild zum „Aufladen“ einer Spule nach Anschließen einer Spannungsquelle dargestellt. Der Widerstand R_L ist der ohmsche Widerstand des Drahtes der Spule und kann i. a. nicht vernachlässigt werden. Für Berechnungen können der Spulenwiderstand und der in

[1] Da die zweite Platte mit umgekehrter Polarität geladen ist, verstärken sich die Felder zwischen den Platten und löschen sich außerhalb der Platten aus. Bei genügend kleinem Abstand der beiden Platten können Randeffekte vernachlässigt werden.

[2] Die Kondensatorspannung beim Entladen folgt für $U_0 = 0$

[3] Wegen der Parallelschaltung von Spannungsquelle und Kondensator sind die beiden Spannungen gleich $U_C(t) = U(t)$

[4] Bei der Ableitung der Spannung entsteht aus der Sinusfunktion die Kosinusfunktion, welche um $\pi/2$ verschoben ist.

[5] Sind nur Beträge von Strom und Spannung von Interesse, kann der Betrag des Blindwiderstandes benutzt werden.

[6] Daher auch der Name Blindwiderstand.

[7] Randeffekte sollen vernachlässigt werden, was bei langen einlagigen Spulen gerechtfertigt ist.

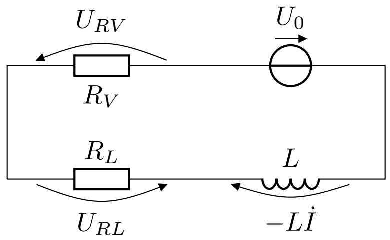

Abbildung 2: Schaltung zur „Ladung“ einer Spule

Reihe geschaltete Widerstand R_V zum Gesamtwiderstand R addiert werden.[8] Die Spule selbst stellt eine Spannungsquelle mit der Urspannung $-L\dot{I}$ dar. Nach dem Maschensatz gilt

$$U_0 - L\dot{I} = U_{RV} + U_{RL} = IR. \tag{9}$$

Die Integration liefert den Stromverlauf[9]

$$I(t) = I_0 \left(1 - e^{-R/L\cdot t}\right) \tag{10}$$

mit dem anfänglichen Strom $I_0 = \frac{U_0}{R}$. Die Zeit bis der Strom die Hälfte seines Maximalwertes annimmt, beträgt $t_{1/2} = L/R \cdot \ln 2$, mit der Zeitkonstanten $\tau = L/R$.

Für die über der Spule messbare Spannung folgt aus (9) $U_L = U_{RL} + L\dot{I} = U_0 - I(t)R_V$.

Beim Anlegen einer Wechselspannung $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ an die ideale Spule[10] gilt $U(t) - L\dot{I} = 0$, so dass für den Strom $I(t) = 1/L \cdot \int (U(t)dt$ gilt. Der Proportionalitätsfaktor zwischen Spannung und Strom, der Blindwiderstand der Spule, ergibt sich unmittelbar zu

$$X_L = i\omega L. \tag{11}$$

Auf Grund der Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom von $-\pi/2$ wurde er wieder komplex geschrieben. Da der Spulenwiderstand aber im Allgemeinen nicht vernachlässigt werden kann, ist die Situation komplizierter. Eine Lösung stellt die Verwendung von Zeigerdiagrammen (Abb. 3) dar.

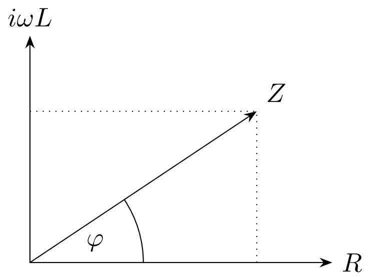

Abbildung 3: Zeigerdiagramm für eine Spule

Aus der Messung von Strom und Spannung an einer Spule[11], kann der Scheinwiderstand $Z = U/I$ berechnet werden. Er ist mit dem ohmschen Widerstand und dem Blindwiderstand über

$$Z = \sqrt{X_L^2 + R^2} \tag{12}$$

verknüpft.

Zur Messung von Kapazitäten und Induktivitäten kann insbesondere bei verlustbehafteten Bauelementen eine Wechselspannungsmessbrücke benutzt werden. Hier soll die einfache Wien-Brücke betrachtet werden.

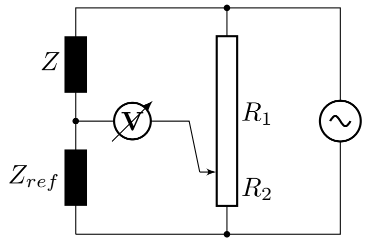

Abbildung 4: Brückenschaltung nach Wien

Das Potenziometer[12] wird so eingestellt, dass am Spannungsmesser keine Spannung mehr gemessen wird, also

$$\frac{Z}{Z_{ref}} = \frac{R_1}{R_2} \tag{13}$$

gilt. Zur Messung von Kapazitäten wird für Z_{ref} ein bekannter Kondensator verwendet. Da meist von $Z = X_C$ ausgegangen werden kann, folgt unmittelbar

$$C = C_{ref} \frac{R_2}{R_1}. \tag{14}$$

Bei Induktivitäten muss deren komplexer Scheinwiderstand in der Rechnung berücksichtigt werden. Die Abgleichbedingung (13) muss unabhängig voneinander, sowohl für den Real- als auch für den Imaginärteil erfüllt werden. Aus der Bedingung für den Imaginärteil folgt

$$L = L_{ref} \frac{R_1}{R_2}. \tag{15}$$

Um die Brücke abgleichen zu können, wird zwischen den Spulen noch ein Potenziometer vorgesehen, an dessen Abgriff das Voltmeter angeschlossen wird.

Versuchsvorbereitung

- Gaußscher Satz, Durchflutungsgesetz
- Elektrische Polarisation von Dielektrika und magnetische Polarisation von Dia- Para- und Ferromagnetika. Begründen Sie den Einfluss auf die Kapazität bzw. die Induktivität.
- Knoten- und Maschensatz
- Integrieren Sie (3) für Ladung und Entladung eines Kondensators. Berechnen Sie den jeweiligen Strom durch den Widerstand. Skizzieren Sie jeweils Spannungs- und Stromverlauf.
- Integrieren Sie (9) für „Ladung“ und „Entladung“ einer Spule. Berechnen Sie mit (9) die an der Spule messbare Spannung. Skizzieren Sie jeweils Strom- und Spannungsverlauf.

[8] Hierzu zählt auch der Innenwiderstand der Spannungsquelle, soweit dieser nicht vernachlässigbar ist.

[9] Der „Entlade“stromverlauf ergibt sich, wenn in (9) $U_0 = 0$ gesetzt wird.

[10] ohne ohmsche Widerstände $R_V = R_L = 0$

[11] ohne Phaseninformation, also z.B. der Effektivwerte

[12] Das Potenziometer besteht im verwendeten Versuchsaufbau aus einem langgestreckten blanken Draht der Länge $l_1 + l_2$ und einem verschiebbaren Schleifkontakt. Für das Widerstandsverhältnis gilt dann einfach $R_1/R_2 = l_1/l_2$.

- Zeigerdiagramme
- Wie kann die bei beliebiger Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung verrichtete Arbeit berechnet werden?
- strom- und spannungsrichtige Messschaltungen
- Wechselspannungsmessbrücken
- Wie lautet die Abgleichbedingung für den Realteil

Aufgaben

- Ermitteln Sie durch Strom-Spannungsmessungen für einen Plattenkondensator frequenzabhängig seinen Blindwiderstand. Stellen Sie $1/X_C(f)$ grafisch dar. Ermitteln Sie aus der Grafik die Kapazität des Kondensators.
- Ermitteln Sie durch Strom-Spannungsmessungen für eine Spule frequenzabhängig ihren Scheinwiderstand. Stellen Sie $Z_L^2(f^2)$ grafisch dar. Ermitteln Sie aus der Grafik den Spulenwiderstand R_L und die Induktivität der Spule.

  Messen Sie oszillografisch die Phasenverschiebung $\varphi(f)$ zwischen Strom und Spannung und stellen diese gemeinsam, mit der aus dem Scheinwiderständen und dem ohmschen Widerstand berechneten, grafisch dar.
- Nehmen Sie die Lade- und Entladekurve für die Spannung und den Strom jeweils am Kondensator und an der Spule oszillografisch auf.

  Bestimmen Sie jeweils die Zeitkonstanten und berechnen Sie die Kapazität und die Induktivität.
- Berechnen Sie die Kapazität und die Induktivität aus den geometrischen Parametern der Bauelemente[13].
- Bestimmen Sie mit einer Wechselspannungsmessbrücke nach Wien die Kapazität des zuvor benutzten Kondensators und der Spule!

[13] Gegenüber (8) ist die Induktivität einer endlich langen Spule kleiner. Näherungsweise kann dies durch eine formale Verlängerung der Spule um das $0,91$-fache des Spulenradius berücksichtigt werden.