

Es werden die Wärme- und die elektrische Leitfähigkeit zweier Metalle bestimmt und die Proportionalität dieser Größen nachgewiesen.

1. Theoretische Grundlagen

Temperaturunterschiede versuchen sich stets auszugleichen. Deshalb breitet sich Wärme immer von Stellen höherer Temperatur zu Stellen niedrigerer Temperatur aus. Die Ausbreitung kann auf drei verschiedene Arten erfolgen:

- Durch **Wärmeströmung** oder Wärmekonvektion, bei der eine Stoffmenge mit ihrem Wärmeinhalt beginnend von einer Stelle zu einer anderen Stelle strömt.
- Durch **Wärmeleitung**, bei der die Wärme von Teilchen zu Teilchen übertragen wird, ohne dass diese dabei ihren Ort wesentlich verändert. Diese Teilchen können je nach dem Stoff Atome, Moleküle oder Elektronen sein.
- Durch **Wärmestrahlung** ähnlich der Lichtstrahlung, ohne dass irgendein Stoff die Vermittlung übernehmen muss.

1.1 Wärmeleitung

Mikroskopisch gesehen wird Wärme in Metallen, ähnlich dem elektrischen Strom, durch Leitungselektronen transportiert, in Isolatoren durch Gitterschwingungen (*Phononen in der Quantenmechanik*).

Makroskopisch gesehen wird die Ursache für den Transport von Wärmeenergie durch das Auftreten eines im Allgemeinen zeitlich und räumlich veränderlichen Temperaturfeldes $T(\vec{r}, t) = T(x, y, z, t)$, in dem die Wärme stets längs eines Temperaturgefälles in Richtung von höheren zu tieferen Temperaturen strömt, beschrieben. Die im infinitesimalen Zeitintervall dt durch eine Fläche A fließende Wärmemenge dQ bestimmt den Vektor des Wärmestroms $\vec{\Phi}_{th} = dQ/dt \cdot \vec{e}_n$ mit der Einheit $[\Phi_{th}] = 1 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$. \vec{e}_n ist dabei ein Vektor der Länge l , der auf der Fläche A senkrecht steht (*Einheits-Normalenvektor*) und somit dazu dient, die Orientierung von A im Raum anzuzeigen.

Das Verhältnis aus dem Wärmestrom und der von ihm durchströmten Fläche definiert den Vektor der Wärmestromdichte $\vec{q}_{th} \equiv \vec{\Phi}_{th}/A$. Das Fouriersche Gesetz setzt die Wärmestromdichte proportional zum lokalen Temperaturgradienten (*in kartesischen Koordinaten gleich dem Vektor der Temperaturableitungen*):

$$\vec{q}_{th} \equiv \begin{pmatrix} q_{th,x} \\ q_{th,y} \\ q_{th,z} \end{pmatrix} = -\lambda \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix} \equiv -\lambda \cdot \nabla T \quad (1)$$

Hierbei stellt λ ($[\lambda] = \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) die (*unter Umständen temperaturabhängige*) Werkstoffgröße Wärmeleitfähigkeit dar. Das negative Vorzeichen in Gleichung (1) berücksichtigt die Richtung des Wärmestromes von höheren zu tieferen Temperaturen, d. h., der Temperaturgradient ist negativ.

In **Bild 1** ist das vereinfachte Beispiel eindimensionaler Wärmeleitung gezeigt, bei der ein Wärmestrom Φ_{th} in x -Richtung durch die Fläche ΔA eines Volumenelementes ΔV der Dicke Δx eines Festkörpers

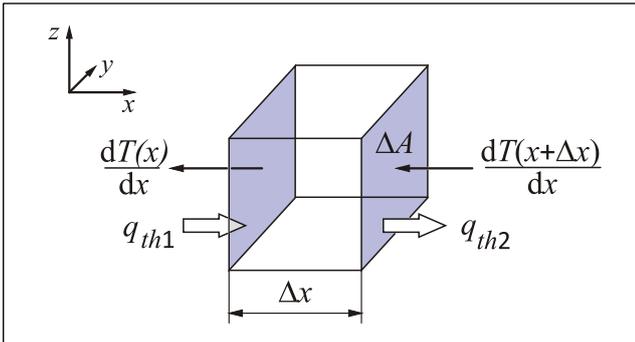


Bild 1: Zur Differentialgleichung der Wärmeleitung

fließt. Im Inneren des Volumenelements sollen keine zusätzlichen Wärmequellen bzw. -senken die Wärmebilanz beeinflussen.

Das Temperaturgefälle auf der einen Seite des Volumenelements beträgt dT/dx und auf der Gegenseite

$$\frac{dT(x+\Delta x)}{dx} = \frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2} \cdot \Delta x + \dots$$

(*Taylorentwicklung nach dem 2. Term abgebrochen*).

Die Differenz zwischen der in das Volumenelement hinein- bzw. aus ihm herausströmenden Wärme ermittelt man über die Differenz der Wärmestromdichten zu

$$q_{th,1} - q_{th,2} = -\lambda \cdot \frac{d^2T}{dx^2} \cdot \Delta x. \quad (2)$$

Mit der Definition für den Wärmestrom erhält man

$$\Phi_{th} = (q_{th,1} - q_{th,2}) \cdot \Delta A = -\lambda \cdot \Delta V \cdot \frac{d^2T}{dx^2}. \quad (3)$$

Andererseits muss ein (Netto-) Wärmestrom in ein oder aus einem Volumenelement mit einer zeitlichen Temperaturänderung des Volumenelements einhergehen, und zwar nach Maßgabe seiner Massendichte ρ und spezifischen Wärmekapazität c :

$$\Phi_{th} = \frac{dQ}{dt} = m \cdot c \cdot \frac{dT}{dt} = \rho \cdot \Delta V \cdot c \cdot \frac{dT}{dt}. \quad (4)$$

Aus der Kombination der Gleichungen (3) und (4) folgt die Differentialgleichung der Wärmeleitung (*ein-dimensional*):

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \cdot \frac{d^2T}{dx^2} = a_T \cdot \frac{d^2T}{dx^2}. \quad (5)$$

wobei die Größe a_T mit

$$a_T = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \quad (6)$$

als Temperaturleitfähigkeit bezeichnet wird. Sie ist eine Kenngröße für die Beschreibung der zeitlichen Änderung der Temperatur infolge des Wärmetransports zwischen Orten unterschiedlicher Temperatur.

Für dreidimensionale Betrachtungen ergibt sich die allgemeine Wärmeleitungsgleichung als partielle Differentialgleichung der vier Variablen x, y, z, t . Ihre Lösung hängt entscheidend von den durch die Aufgabenstellung vorgegebenen Anfangs- und Randbedingungen ab.

Bei vielen praktischen Anwendungen und auch im vorliegenden Versuch realisiert man ein zeitlich konstantes Temperaturfeld $T(x, y, z)$, in dem eine stationäre Wärmeübertragung vorliegt und nur noch

die Randbedingungen von Bedeutung sind. In **Tab.1** sind zwei Beispiele für die eindimensionale stationäre Wärmeleitung in isotropen, homogenen Festkörpern unterschiedlicher geometrischer Form angeführt.

Im Versuch wird die Wärmeleitfähigkeit metallischer Rundstäbe untersucht, deren Enden durch zwei Wärmereservoirs (*siedendes Wasser, Eiswasser*) zunächst auf zeitlich konstante Temperaturen gebracht werden (**Bild 3 bei Versuchsdurchführung**). Somit fließt ein überall gleich großer Wärmestrom vom kochenden Wasser (*Index Res1*) über den Stab ins Eiswasser (*Index Res2*):

$$\Phi_{th,Res1} = \Phi_{th,Stab} = \Phi_{th,Res2} = \Phi_{th}, \quad (7)$$

führt dort zum Schmelzen des Eises und danach zum Temperaturanstieg in Wasser und Stab.

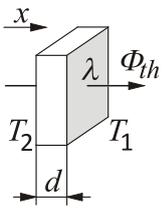
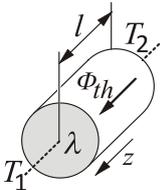
Gemessen werden nun nach Entfernen des Eises einmal der momentane Temperaturgradient $(dT/dz)_{Stab}$ im Stab und der zeitliche Temperaturanstieg $(dT/dt)_{Res2}$ des Kalorimeterwassers.

Damit ergibt sich unter Verwendung der Gleichung aus **Tab.1**, sowie der Gleichungen (4) und (7) die Wärmeleitfähigkeit des Stabes zu

$$\lambda = \frac{\Phi_{th,Stab}}{A \cdot (dT/dz)_{Stab}} = \frac{\Phi_{th,Res2}}{A \cdot (dT/dz)_{Stab}}$$

$$\lambda = \frac{(c \cdot m + K) \cdot (dT/dt)_{Res2}}{A \cdot (dT/dz)_{Stab}}. \quad (8)$$

c_W ist die spezifische Wärmekapazität des Wassers ($c_W = 4,182 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) und m die Masse des erwärmten Wassers. Die Materialeigenschaften des Kalorimeters werden in Form seiner Wärmekapazität K [K] = $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$) berücksichtigt.

Geometrie	Randbedingungen	Wärmestrom	Temperaturverteilung
a) ebene Platte 	$x = 0 \quad T = T_2$ $x = d, \quad T = T_1$	$\Phi_{th} = -\lambda \cdot A \cdot \left(\frac{dT}{dx}\right)$ $\Phi_{th} = \lambda \cdot A \cdot \left(\frac{T_2 - T_1}{d}\right)$	$T(x) = T_2 - (T_2 - T_1) \cdot \frac{x}{d}$ <i>(linear)</i>
b) zylindrischer Stab 	$z = 0 \quad T = T_2$ $z = l, \quad T = T_1$	$\Phi_{th} = -\lambda \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \left(\frac{dT}{dz}\right)$ $\Phi_{th} = \lambda \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \left(\frac{T_2 - T_1}{l}\right)$	$T(z) = T_2 - (T_2 - T_1) \cdot \frac{z}{l}$ <i>(linear)</i>

Tab.1: Beispiele stationärer Wärmeleitung

1.2 Elektrische Leitfähigkeit

Nach dem klassischen Modell freier Elektronen bilden die Leitungselektronen in einem Metall ein „Elektronengas“, in dem sie analog der Bewegung von Teilchen in einem idealen Gas ungeordnete thermische Bewegungen ausführen. Legt man an die Enden eines Metallstabes (**Bild 2**) eine elektrische Spannung U an, werden die Elektronen durch die Feldkraft $\vec{F}_E = e \cdot (-\vec{E})$ beschleunigt. Bei den Zusammenstößen mit Gitterstörungen des Metalls wird kinetische Energie der beschleunigten Elektro-

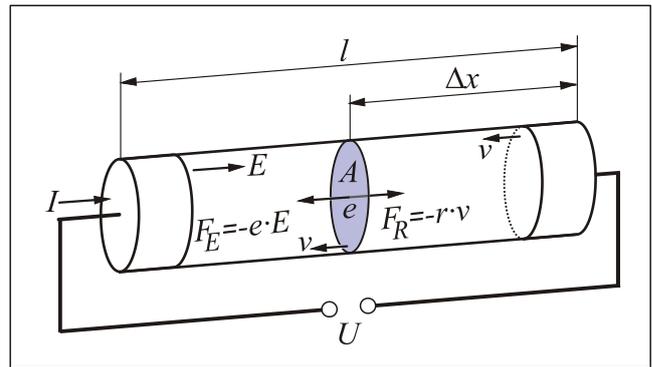


Bild 2: Zur Elektronentheorie der elektrischen Leitung. Die Leitungselektronen erhalten dabei im Mittel nur eine konstante (*mittlere*) Driftgeschwindigkeit \vec{v} in Richtung von $(-\vec{E})$. Die mittlere Driftgeschwindigkeit kann analog zur laminaren Flüssigkeitsströmung auf das Gleichgewicht zwischen der elektrischen Feldkraft \vec{F}_E und einer geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft $\vec{F}_R = r \cdot (-\vec{v})$ mit r als Reibungsfaktor zurückgeführt werden. Mit dem Kräftegleichgewicht $F_R = F_E$ ergibt sich

$$v = \frac{e}{r} \cdot E = \mu \cdot E . \quad (9)$$

Darin stellt μ die Beweglichkeit der Ladungsträger dar. Die Stärke des Ladungsträgerstromes wird makroskopisch durch den Vektor der Stromdichte $\vec{J}(x, y, z)$ beschrieben. Wenn auf einer Querschnittsfläche A durch einen Leiter überall die gleiche Stromstärke auftritt (**Bild 2**), so ist der Betrag der Stromdichte in allen Punkten von A

$$J = \frac{I}{A} \quad \text{bzw.} \quad I = J \cdot A . \quad (10)$$

Die Gleichung (10) stellt nur einen Sonderfall dar, bei dem die Fläche A eine senkrecht durch den Leiter gelegte Ebene ist und bei dem \vec{J} überall auf der Fläche senkrecht steht und konstant ist.

Man kann nun die Driftgeschwindigkeit der Elektronen aus der Stromdichte J bestimmen. In **Bild 2** bewegen sich die Elektronen mit $v = \text{konst.}$ nach links. Die Zahl der Ladungsträger ist durch $n \cdot \Delta V$ gegeben, wobei

$$\Delta V = A \cdot \Delta x$$

das Volumenelement des Leiterstücks und n die Elektronendichte ist.

$$n = \frac{N}{\Delta V}$$

N : Anzahl freier Elektronen

ΔV : Volumenelement

Durch die Fläche fließt eine Ladung vom Betrag

$$\Delta Q = n \cdot A \cdot \Delta x \cdot e$$

in einer Zeit

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} ,$$

und mit

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

folgt für die Stromstärke

$$I = n \cdot e \cdot v \cdot A. \quad (11)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (10) und (9) und mit $E = U/l$ erhält man

$$J = n \cdot e \cdot v = n \cdot e \cdot \mu \cdot E = n \cdot e \cdot \mu \cdot \frac{U}{l}. \quad (12)$$

Aus Gleichung (12) folgt das Ohmsche Gesetz in der Darstellung

$$J = \kappa \cdot E \quad (13)$$

mit der Leitfähigkeit

$$\kappa = n \cdot e \cdot \mu,$$

ohne den im Allgemeinen vektoriellen Charakter der Feldstärke und der Stromdichte zu betrachten.

Im vorliegenden Messaufbau des Versuches (**Bild 4**) wird durch einen runden Metallstab ein zu variierender Strom I geschickt. An diesem Metallstab wird über zwei Punkten im Abstand l mit Hilfe eines Messverstärkers eine Spannung U abgegriffen und zur Anzeige gebracht. Durch Ermittlung der Querschnittsfläche A ergibt sich der Leitwert κ wie folgt:

$$\kappa = \frac{l}{A} \cdot \frac{I}{U} \quad (14)$$

1.3 Zusammenhang zwischen elektrischer und Wärmeleitfähigkeit in Metallen

Substanzen mit guter elektrischer Leitfähigkeit sind in der Regel auch gute Wärmeleiter. Bei nicht zu tiefen Temperaturen gilt das Wiedemann-Franz-Gesetz:

$$L = \frac{\lambda}{T \cdot \kappa} = \text{konst.} \quad (15)$$

T ist dabei die absolute Temperatur des Stoffes, L wird als Lorenzsche Zahl bezeichnet und hat für alle Metalle annähernd denselben Wert $L=2,45 \cdot 10^{-8} \text{ V}^2 \cdot \text{K}^{-2}$. Dies lässt den Schluss zu, dass die hohe Wärmeleitfähigkeit der Metalle und ihre hohe elektrische Leitfähigkeit auf demselben mikroskopischen Transportmechanismus beruhen, dem der freien Leitungselektronen.

2. Versuch

2.1 Vorbetrachtung

Aufgabe 1: Beschreiben Sie kurz mit eigenen Worten, warum sich im oberen Kalorimeter siedendes Wasser und im unteren Kalorimeter Eiswasser befindet.

Erläutern Sie, was beim Wärmeübergang oberes Wasserbad und Metallstab sowie Metallstab und unteres Wasserbad zu beachten ist.

Aufgabe 2: Berechnen Sie den Wärmewiderstand R_{th} eines **2 cm** dicken Eisenblocks mit einer quadratischen Durchströmungsfläche von $(5 \times 5)\text{cm}$ (Wärmeleitfähigkeit von Eisen $\lambda=80,4 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$).

2.2 Versuchsdurchführung

2.2.1 Verwendete Geräte

Thermische Leitfähigkeit: 2 Kalorimetergefäße **500 ml** ($K=70 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$), Cu-Wärmeleitstab, Al-Wärmeleitstab, Stativmaterial, Tauchsieder mit Leistungsstellgerät, Magnetrührer, Wärmeleitpaste, Gazebeutel zur Eisaufnahme, 2 Temperaturmessgeräte, Temperatur-Tauchsonde, Temperatur-Oberflächenfühler, Stoppuhr

Elektrische Leitfähigkeit: Netzgerät (**0...36**)V/40A, Messverstärker, Multimeter, Verbindungsleitungen

2.2.2 Versuchshinweise

Aufgabe 1: Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit λ zweier Metallstäbe zwischen siedendem Wasser und Eiswasser

Die Versuchsanordnung zur Messung der Wärmeleitfähigkeit besteht aus (**Bild 3**) zwei Kalorimetergefäßen, die als Wärmespeicher mit Eiswasser (*unten*) bzw. mit siedendem Wasser (*oben*) gefüllt sind. Die beiden Wärmeleitstäbe bestehen aus massivem Kupfer bzw. aus massivem Aluminium und sind mit Kunststoff ummantelt, um die seitlichen Wärmeverluste zu vermindern.

1a) gleichmäßige Wärmeverteilung der Stäbe

- Sorgen Sie beim Aufbau für einen guten Wärmekontakt zwischen dem oberen Kalorimetergefäß und der Stirnfläche des Wärmeleitstabes durch die Verwendung von Wärmeleitpaste.
- Bestimmen Sie die Leermasse m_{Leer} des unteren Kalorimetergefäßes.
- Halten Sie im unteren Kalorimetergefäß das Wasser mit in dem Gazebeutel befindlichen Eisstücken **nahe 0°C**, schalten Sie den Magnetrührer ein und verwenden Sie den Tauchfühler zur Temperaturmessung.
- Bringen Sie im oberen Kalorimetergefäß das Wasser mit dem Tauchsieder (*über einen Leistungssteller angeschlossen*) zum Sieden und halten Sie es am Sieden.

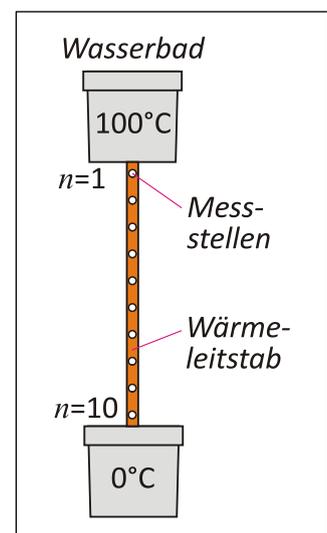


Bild 3: Versuchsaufbau Aufgabe 1

Hinweis:

*Der Tauchsieder darf nur in einem Flüssigkeitsbad (Wasser) betrieben werden!
Dabei muss die Heizwendel vollständig in der Flüssigkeit eingetaucht sein.*

- Warten Sie nach dem Einsetzen des Siedens **ca. (5 bis 10) min** und tasten Sie mit dem Oberflächenfühler zügig die **10 Messstellen** am Stab ab.
- Tragen Sie sofort am Versuchsplatz die Messwerte in ein lineares Diagramm ein (*Temperatur als Funktion zur Messstelle $\vartheta = f(n)$*). Verwenden Sie dazu **Millimeterpapier**.

Wichtig:

Bringen Sie zum Versuch Millimeterpapier mit!

- Legen sie in das Diagramm eine Regressionsgrade. Liegen die Messwerte nicht auf dieser Geraden, ist der stationäre Zustand noch nicht erreicht und die Messung (*einschließlich Diagrammeintragung*) muss wiederholt werden.

1b) Messung der Temperatur als Funktion der Zeit im unteren Kalorimetergefäß

- Entfernen Sie nach Erreichen des stationären Zustandes den Gazebeutel mit den Eisstückchen aus dem unteren Kalorimetergefäß. Achten Sie darauf, dass der Stab im unteren Kalorimetergefäß leicht eintaucht (*mögliche Nachjustierung erforderlich*).
- Messen Sie unter ständigem Rühren (*Magnetrührer in Betrieb*) den Temperaturanstieg ΔT im unteren Kalorimetergefäß für einen Zeitraum Δt **von 5 min in 30s-Schritten**.
- Beenden Sie das Experiment durch Ausschalten des Tauchsieders.
- Bestimmen Sie den Stabdurchmesser d (*ohne Isolierung*), den Abstand l zwischen den beiden äußeren Messstellen des Wärmeleitstabes und die Masse m des Wassers im unteren Kalorimetergefäß.

Hinweis:

Das Auswechseln der Stäbe erfolgt durch das Laborpersonal!

- Führen Sie nach dem Umbau die Messung in gleicher Weise durch.
- Bestimmen Sie die Raumtemperatur ($[T_{RT}] = \text{K}$).

Aufgabe 2: Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit der beiden Metallstäbe

- Nehmen Sie den Strom I als Funktion des Spannungsabfalls U am Wärmeleitstab auf (**Bild 4**).
- Variieren Sie dazu den Strom **von (2...20)A in 2A-Schritten** am Netzgerät und nutzen Sie den Grob- bzw. Feinregler für die Stromeinstellung.
- Begrenzen Sie aber vorher die Spannung **auf 2 V** mit Hilfe des Spannungsreglers am Netzgerät. Die eingestellten Strom- und Spannungswerte werden direkt von der LCD-Anzeige des Netzgerätes angezeigt.

Achtung:

Vorsicht bei der Stromeinstellung - Überlastung sehr schnell möglich!

- Notieren Sie die jeweils dazugehörige Spannung am Voltmeter unter Berücksichtigung des am Verstärker eingestellten Verstärkungsfaktors.

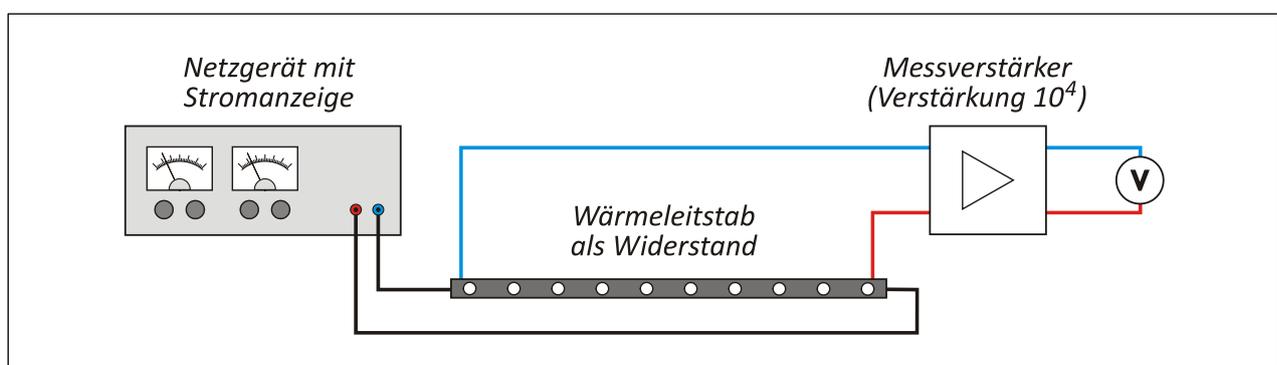


Bild 4: Versuchsaufbau **Aufgabe 2**

2.3 Versuchsauswertung

Aufgabe 1: Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit λ zweier Metallstäbe zwischen siedendem Wasser und Eiswasser

- Stellen Sie für beide Metallstäbe die Funktionen $\vartheta = f(z)$ graphisch dar. Tragen Sie in das Diagramm die Regressionsgeraden und deren Anstiege sowie die Fehlerbalken ein und bestimmen Sie die relative Messunsicherheit, dabei ist $l = z_1 - z_{10}$, und $z_{10} = 0$.
- Stellen Sie für beide Metallstäbe die Funktionen $\vartheta = f(t)$ graphisch dar. Tragen Sie in das Diagramm die Regressionsgeraden und deren Anstiege sowie die Fehlerbalken ein und bestimmen Sie die relative Messunsicherheit.
- Berechnen Sie die Wärmeleitfähigkeit λ für beide Stäbe (siehe **Abschnitt 3.1**).
- Bestimmen Sie die Messunsicherheiten für die ermittelten Wärmeleitfähigkeiten durch eine Fehlerrechnung.
- Vergleichen Sie die Messwerte mit den Tabellenwerten und diskutieren Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 2: Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit der beiden Metallstäbe

- Erstellen Sie das Strom-Spannungs-Diagramm der Funktion $I = f(U)$ für beide Metallstäbe.
- Ermitteln Sie die Anstiege der Regressionsgeraden, tragen Sie die Fehlerbalken ein und bestimmen Sie die relative Messunsicherheit.
- Benutzen Sie die ermittelten Anstiege zur Berechnung der elektrischen Leitfähigkeiten nach Gleichung (14) und bestimmen Sie die Messunsicherheit durch eine Fehlerrechnung (*absolut und relativ*).
- Diskutieren Sie die erhaltenen Messwerte und vergleichen Sie diese mit der Aussage des Wiedemann-Franz-Gesetzes nach Gleichung (15).

3. Ergänzungen

3.1 Hinweise zur Berechnung der Wärmeleitfähigkeit λ

Zur Berechnung der Wärmeleitfähigkeit ergibt sich der Temperaturgradient

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{Stab} = \frac{\vartheta_{10} - \vartheta_1}{l}$$

aus der Temperaturdifferenz $\vartheta_{10} - \vartheta_1$ (aus Diagramm nach linearer Regression entnehmen) und Abstand der äußeren Messpunkte l . Das aufgenommene Erwärmungsdiagramm ergibt den Temperaturanstieg

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)_{Res2}$$

Die weitere Berechnung erfolgt entsprechend Gleichung (8).

3.2 Ergänzende Bemerkung

Die Wärmeleitfähigkeit λ eines festen Stoffes lässt sich auch aus dem Quotienten der Stoffdicke d , der wärmedurchströmenden Fläche A und dem reziproken Wärmewiderstand R_{th} bestimmen.

$$\lambda = \frac{1}{R_{th}} \cdot \frac{d}{A}$$