

Die Beugungsbilder von Einzel- und Mehrfachspalten werden in Fraunhofer'scher Anordnung aufgenommen und ausgewertet. Dabei soll insbesondere die qualitative Abhängigkeit des Beugungsbildes von der Spaltbreite, den Spaltabständen und der Anzahl der Spalte verdeutlicht werden.

## 1. Theoretische Grundlagen

### 1.1 Beugung am Einzelspalt

Auf einen Spalt mit der Öffnungsbreite  $b$  fällt kohärentes Licht der Wellenlänge  $\lambda$ . Die Ausbreitungsrichtung ist dabei senkrecht zur Spaltebene. Die Höhe des Spaltes soll groß sein gegen  $b$ , so dass es genügt, die Verhältnisse in einer Ebene in halber Höhe des Spaltes zu untersuchen.

Nach dem Huygens'schen Prinzip sind alle Punkte der Spaltöffnung Zentren von kreisförmigen Elementarwellen. Der Übersichtlichkeit wegen sollen nicht die Wellenfronten selbst, sondern nur die Ausbreitungsrichtungen („Strahlen“), die senkrecht auf den Wellenfronten stehen, betrachtet werden (**Bild 1**).

Durch eine hinter dem Spalt angeordnete Sammellinse werden alle unter dem gleichen Beugungswinkel  $\vartheta$  ausgehenden Strahlen in einem Punkt  $P$  der Brennebene zur Interferenz gebracht. Der optische Weg zwischen der Geraden  $\overline{AC}$  und dem Punkt  $P$  ist dabei für jeden Strahl gleich lang. Um eine Aussage über die Intensität in  $P$  zu machen, genügt also die Kenntnis der Phasenbeziehung auf  $\overline{AC}$ .

Um die Lage der Intensitätsminima zu bestimmen, zerlegt man die Spaltbreite in eine gerade Anzahl  $2n$ . Gilt nun in der durch den Winkel  $\vartheta$  festgelegten Richtung

$$\overline{D_1E_1} = \frac{1}{2}\lambda, \quad (1)$$

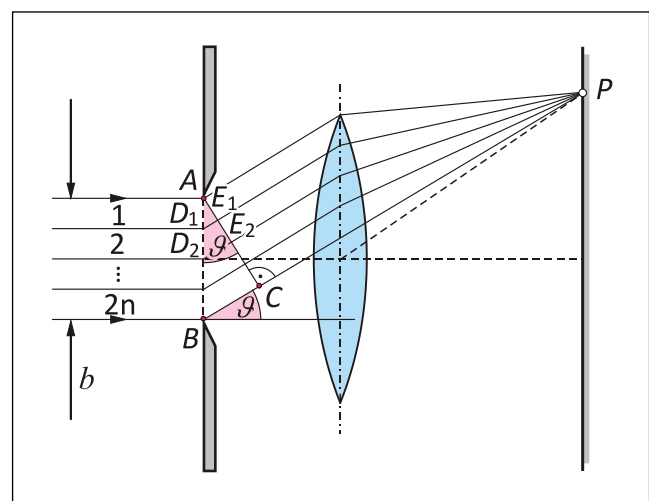
dann hat jedes Teilbündel gegenüber seinem Nachbarn einen Gangunterschied von  $\frac{1}{2}\lambda$ . Jeweils zwei benachbarte Teilbündel löschen sich gegenseitig aus, und wegen der geraden Anzahl von Teilbündeln erhält man in  $P$  vollständige Dunkelheit. Mit

$$\overline{BC} = 2n \cdot \overline{D_1E_1}$$

und Gleichung (1) erhält man die Bedingung für das Beugungsminimum  $n$ -ter Ordnung:

$$b \cdot \sin \vartheta = \pm n \cdot \lambda \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Zerlegt man die Spaltbreite in eine ungerade Anzahl  $(2n+1)$  gleich breiter Streifen, dann bleibt, wenn wieder die Bedingung(1) erfüllt ist, bei obiger Überlegung ein Teilbündel übrig, das nicht durch ein



**Bild 1:** Zur Lage der Intensitätsminima

benachbartes Teilbündel ausgelöscht wird. Im Punkt  $P$  entsteht somit ein Verstärkungsgebiet. Als Bedingung dafür erhält man

$$b \cdot \sin \vartheta = \pm(2n + 1) \cdot \frac{1}{2}\lambda \quad (3)$$

Die Beziehung (3) beschreibt für kleine Winkel in guter Näherung die Lage des Beugungsmaximums  $n$ -ter Ordnung. Das Maximum *Null-ter* Ordnung, das durch die ungebeugten Strahlen entsteht, heißt auch Hauptmaximum. Die tatsächliche Lage der Maxima höherer Ordnung ist bei geringfügig kleineren Winkeln, als durch die Näherung (3) angegeben wird.

Zur exakten Berechnung der Intensitätsverteilung auf dem Schirm zerlegt man die Spaltbreite in Streifen der infinitesimalen Breite  $dx$ . Jeder Streifen sendet eine Elementarwelle aus, die zur Amplitude auf dem Schirm einen infinitesimalen Anteil beiträgt. Durch phasenrichtige Addition dieser Beiträge erhält man für die Intensität:

$$I = I_0 \cdot \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2 \quad u = \frac{\pi}{\lambda} \cdot b \cdot \sin \vartheta \quad (4)$$

## 1.2 Beugung am Doppelspalt

Der Doppelspalt besteht aus zwei parallelen Spalten gleicher Breite  $b$  und dem Abstand zwischen den Spalten  $g$ . Jedes der beiden durch die Spalte tretenden Teilbündel erfährt dabei eine Beugung, wie sie in **Abschnitt 1.1** beschrieben ist.

Es ist jetzt jedoch noch die Interferenz der beiden Teilbündel zu berücksichtigen, die von jedem der beiden Spalte unter dem gleichen Winkel ausgehen. Dabei kommt es zu zusätzlichen Auslöschungen, wenn ihr Gangunterschied ein ungeradzahliges Vielfaches von  $\lambda/2$  ist:

$$g \cdot \sin \vartheta = (2k - 1) \cdot \frac{1}{2}\lambda \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Bei kleinen Beugungswinkeln  $\vartheta$  gilt für das Hauptmaximum der Beugungsfigur eines Einzelspalt

$$-\frac{\lambda}{b} \leq \vartheta \leq \frac{\lambda}{b} \quad (6)$$

In diesem Winkelbereich treten nach Gleichung (5) weitere Minima auf unter den Winkeln

$$\vartheta = \frac{(2k - 1)}{2g} \cdot \lambda \quad (7)$$

Ist beispielsweise  $g=3b$ , so erhält man aus den Gleichungen (6) und (7), dass in dem Hauptmaximum des Einzelspalt 6 dunkle Linien auftreten. Bei Vergrößerung von  $g$  erhöht sich diese Anzahl entsprechend.

Die ausführliche Berechnung des Intensitätsverlaufs erfolgt wie schon beim Einzelspalt beschrieben und ergibt

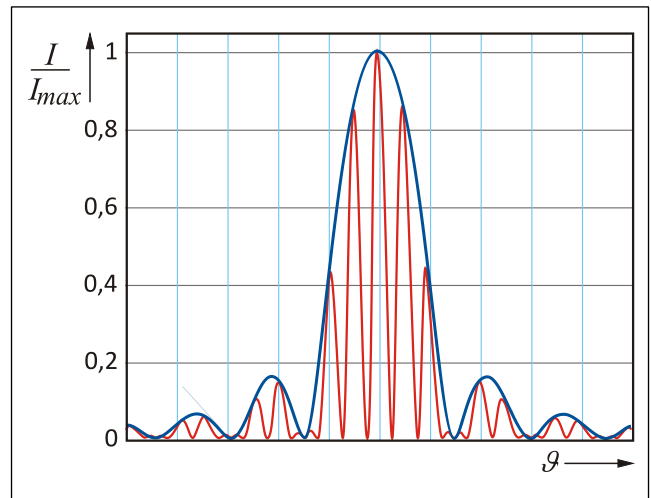
$$I = 4I_0 \cdot \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2 \cdot \cos(v) \quad u = \frac{\pi}{\lambda} \cdot b \cdot \sin \vartheta$$

$$v = \frac{\pi}{\lambda} \cdot g \cdot \sin \vartheta \quad (8)$$

Man erkennt, dass gegenüber dem Intensitätsverlauf in Gl. (4) des Einzelspaltes in Gl. (8) zusätzlich ein  $\cos^2$ -Faktor auftritt. Dieser beschreibt den Intensitätsverlauf, den man bei der Interferenz zweier punktförmiger kohärenter Erreger mit dem Abstand  $g$  erhält. Die Gleichung (8) kann also so interpretiert werden, dass der bei punktförmigen Erregern zu erwartende Intensitätsverlauf durch die Funktion moduliert wird, die die Beugung am Einzelspalt beschreibt.

Weiterhin zeigt die Gleichung (8), dass die Intensität bei  $\vartheta=0$  gegenüber dem Einfachspalt vervierfacht ist. Dies ist unmittelbar plausibel, wenn man bedenkt, dass bei  $\vartheta=0$  die Anteile der beiden Einzelspalte konstruktiv interferieren und sich damit die Amplitude verdoppelt, die Intensität also um den Faktor 4 größer wird.

In **Bild 2** wird der Intensitätsverlauf bei einem Einzel- bzw. Doppelspalt gleicher Spaltbreite verglichen. Beide Darstellungen sind auf die jeweilige Maximalintensität normiert.



**Bild 2:** Vergleich des Intensitätsverlaufes beim Einzel- und Doppelspalt ( $g=3b$ )

Die Intensität im ersten Nebenmaximum des Einzelspaltes beträgt nur noch 5% der Maximalintensität. In **Bild 2** wurde deshalb für die Intensität eine logarithmische Skala gewählt, um geringe Intensitäten „anzuheben“.

### 1.3 Beugung am Gitter

Ein optisches Gitter besteht aus  $N > 2$  äquidistanten Einzelspalten („Gitterstrichen“) der Breite  $b$  und dem Mittenabstand  $g$ . Der Abstand  $g$  heißt **Gitterkonstante**. Oft wird beim Gitter statt  $g$  der Kehrwert  $1/g$  angegeben, also die Anzahl der Striche je Millimeter.

Bei der Interferenz vieler äquidistanter Einzelspalte kommt es unter dem Winkel  $\vartheta$  zu konstruktiver Interferenz aller in dieser Richtung laufenden Teilstrahlen, wenn je zwei benachbarte Teilstrahlen den Gangunterschied  $n \cdot \lambda$  haben:

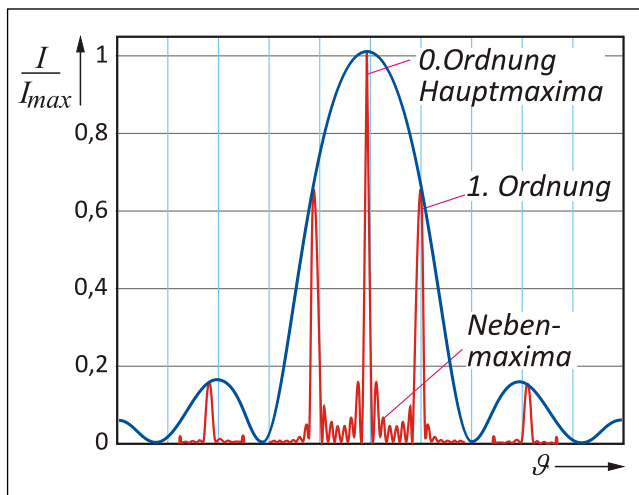
$$g \cdot \sin \vartheta = n \cdot \lambda \tag{9}$$

In diesem Fall ergeben sich Maxima, die umso schärfer ausgeprägt sind, je größer die Anzahl der beleuchteten Spalte ist. Falls der Winkel nämlich nur geringfügig von dem durch Gleichung (9) definierten Winkel abweicht, verhalten sich die Gangunterschiede von Teilstrahl zu Teilstrahl so, dass sehr bald Auslöschung anstatt Verstärkung auftritt. Die Gleichung

$$I = I_0 \cdot \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2 \cdot \left( \frac{\sin(N \cdot v)}{\sin v} \right)^2 \quad u = \frac{\pi}{\lambda} \cdot b \cdot \sin \vartheta$$

$$v = \frac{\pi}{\lambda} \cdot g \cdot \sin \vartheta \tag{10}$$

beschreibt den Intensitätsverlauf hinter einem Gitter, das von parallelen, senkrecht zur Gitterebene einfallendem Licht beleuchtet wird. Sie besitzt die gleiche Struktur wie Gleichung (8): die erste Klammer ist wieder die Funktion, die die Beugung an einem Einzelspalt der Breite  $b$  beschreibt, während man den letzten Faktor aus der phasenrichtigen Überlagerung von  $N$  punktförmigen Erregern mit Abstand  $g$  erhält.



**Bild 3:** Vergleich des Intensitätsverlaufes beim Einzelspalt und am Gitter ( $N=3$ )

Nach der Regel von L'Hospital geht der letzte Faktor für kleine Winkel  $\vartheta$  gegen  $N^2$ . Die Intensität der Hauptmaxima wächst also quadratisch mit der Anzahl der Gitterstriche.

In **Bild 3** wird der berechnete Intensitätsverlauf für  $N=8$ , wieder im Vergleich mit der Spaltbeugungsfunktion gezeigt. Auch hier sind beide Funktionen wieder auf gleiche Maximalintensität normiert, und die Intensität ist logarithmisch dargestellt.

Als Hauptmaxima bezeichnet man die Linien, die durch das Maximum des letzten Klammersausdrucks in Gleichung (10) gegeben sind. Bei ihnen interferieren alle  $N$  Teilbündel konstruktiv. Ab  $N=3$  treten zwischen den Hauptmaxima  $N-2$  durch teilweise konstruktive Interferenz verursachte Nebenmaxima auf.

Die Intensität dieser Nebenmaxima nimmt mit wachsendem  $N$  immer mehr ab und ist bei Gittern mit hoher Spaltzahl praktisch nicht mehr zu beobachten. In **Bild 3** wird deutlich, dass die Hauptmaxima zweiter und vierter Ordnung nicht auftreten, da sie genau mit den Minima der Spaltbeugungsfunktion zusammenfallen.

## 2. Versuch

### 2.1 Vorbetrachtung

**Aufgabe:** Was passiert mit einem kohärenten Lichtstrahl, wenn dieser an einem Einzelspalt gebeugt wird? Wie verändert sich das Beugungsmuster, wenn sich die Breite des Einzelspalt **a)** vergrößert oder **b)** verkleinert?

### 2.2 Versuchsdurchführung

#### 2.2.1 Verwendete Geräte

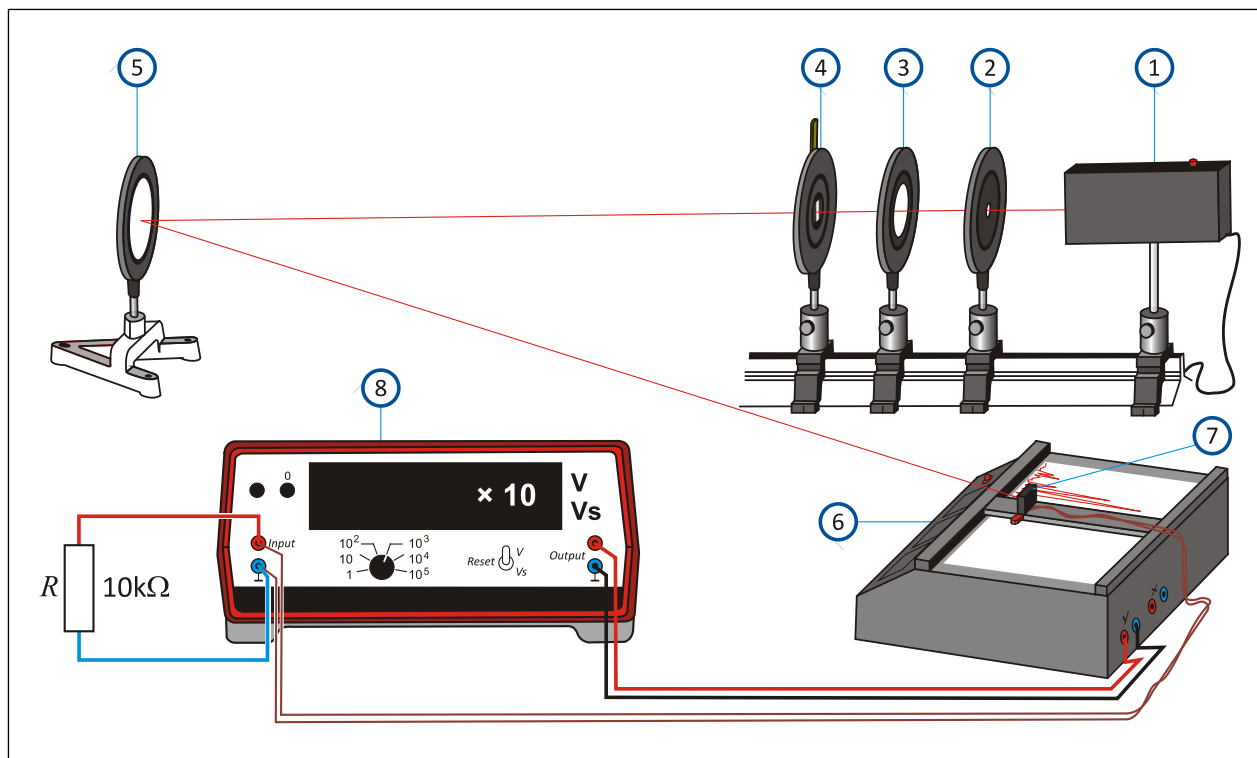
HeNe-Laser, Linsen  $f=5$  mm,  $f=100$  mm, XY-Schreiber, Mikrovoltmeter, Fotoelement, Blende mit drei Einfachspalten, Blende mit drei Doppelspalten, Blende mit verstellbarem Gitter, Messschieber

#### 2.2.2 Versuchshinweise

##### Anmerkung zum Strahlengang (Siehe Bild 4)

- Die Sammellinse (2) weitet den Laserstrahl auf. Die Sammellinse (3) dient der Fokussierung auf die Beugungsobjekte (4), dann auf die Projektionsfläche (am Spiegel) und anschließend auf die zweite Projektionsfläche (am XY-Schreiber (6)). Mit den Einstellschrauben am Stativ des Spiegels

(5) wird das Beugungsmuster auf den Eintrittsspalt des Detektors (7) gelenkt. Der Spiegel dient zur Verlängerung des Lichtweges zwischen den einzelnen Beugungsobjekten und der Photozelle.



**Bild 4:** Versuchsaufbau

### Aufgabe 1: Untersuchung der Beugung am Einzelspalt

- Nehmen Sie für die **drei Einzelspalte (A, B, C)**, die jeweilige Intensitätsverteilung des Beugungsbildes mit Hilfe eines Schreibers auf.

#### Method 1

- Zeichnen Sie in die Beugungsbilder die Mittelsenkrechten der *Null-ter* Ordnung ein.
- Tragen Sie nun rechts oder links von der Mittelsenkrechten die weiteren Extrema mit in die Beugungsbilder ein. (*Minima*  $m=1; 2; 3$ , u. s. w. und die *Maxima*  $m=1,5; 2,5; 3,5$ ; u. s. w.)

#### Method 2

- Zeichnen Sie die Halbwertsbreite  $x_{0,5}$  des Hauptmaximums ebenfalls in die Beugungsbilder mit ein.
- Messen Sie nun mit Hilfe eines Messschiebers die Abstände zwischen der Mittelsenkrechten und den entsprechenden Extrema (**Method 1**) sowie die Halbwertsbreite  $x_{0,5}$  (**Method 2**) aus.

### Aufgabe 2: Untersuchung der Beugung am Doppelspalt

- Nehmen Sie für die **drei Doppelspalte (A, B, C)**, die jeweilige Intensitätsverteilung des Beugungsbildes mit Hilfe eines Schreibers auf.
- Zeichnen Sie in die Beugungsbilder die **Hüllkurven** der verschiedenen Ordnungen ein.
- Gehen Sie zur Bestimmung der Messwerte analog zu **Aufgabe 1, Methode 1** (*Hüllkurve und Messsignal innerhalb der Null-ter Ordnung*) vor.
- Messen Sie  $n \cdot \Delta x$  (*Hüllkurve*) bzw.  $n \cdot \Delta \alpha$  (nach **Method 3**)

**Aufgabe 3:** Untersuchung der Beugung am Gitter

- Nehmen Sie die Beugungsfigur eines Gitters auf und variieren Sie dabei die Anzahl der beleuchteten Gitterspalte.
- Bringen Sie dazu den verstellbaren Spalt mit dem Gitter in den Strahlengang (*Gitter 80 IIII/cm*).
- Beobachten Sie die Beugungsfigur auf der Projektionsfläche hinter dem Detektor
- Fertigen Sie mit Hilfe eines Schreibers je eine Aufzeichnung (*analog zur Aufgabe 1 und 2*) für **3, 7** und **11** Nebenmaxima an.
- Messen Sie mit Hilfe des Messschiebers  $n \cdot \Delta x$ .
- Nach Beendigung der Aufzeichnungen messen Sie die Entfernung  $L$  zwischen Beugungsobjekt und Detektor.

**2.3 Versuchsauswertung****Aufgabe 1:** Untersuchung der Beugung am Einzelspalt

- Berechnen Sie die Spaltbreiten  $b$  nach **Methode 1** und **2** und führen Sie für jedes Ergebnis eine Fehlerrechnung durch.

**Methode 1**

- Stellen Sie in einem Diagramm für die 3 Einzelspalte die Funktion  $x = f(m)$  graphisch dar. (*Minima  $m=1; 2; 3$ , u. s. w. und die Maxima  $m=1,5; 2,5; 3,5$ ; u. s. w.*)
- Zeichnen Sie die Regressionsgraden ein und bestimmen Sie die Anstiege  $d_{A,B,C}$  und die relativen Messunsicherheiten unter Verwendung der eingetragenen Fehlerbalken.

Die Spaltbreite  $b$  ergibt sich:

$$b = \lambda \cdot \frac{L}{d} \quad d: \text{Anstieg der Funktion } x = f(m) \quad (12)$$

- Vergleichen und interpretieren Sie die Ergebnisse mit den Tabellenwerten und führen Sie einen tabellarischen Methodenvergleich durch.

**Aufgabe 2:** Untersuchung der Beugung am Doppelspalt

Beim Doppelspalt wird aus der Einhüllenden der Intensitätskurve auf die Spaltbreite  $b$  geschlossen (*siehe Einzelspalt*). Den Spaltabstand  $g$  erhält man aus der Intensitätskurve selbst. Nach der Gleichung (5) ist in Gleichung (12) die Spaltbreite  $b$  durch den Spaltabstand  $g$  zu ersetzen.

- Berechnen Sie die Spaltbreiten  $b$  und den Spaltabstand  $g$  nach **Methode 1** und **3** und führen Sie für jedes Ergebnis eine Fehlerrechnung durch.

**Methode 1**

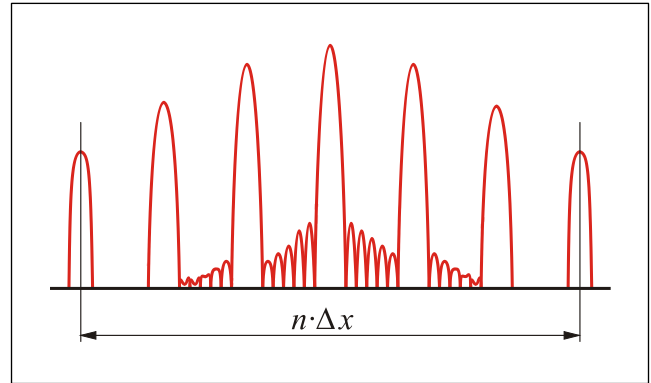
- Stellen Sie in einem Diagramm für die 3 Doppelspalte die Funktion  $x = f(m)$  für die Hüllkurve und in einem weiteren Diagramm die Funktion  $a = f(m)$  für die Intensität innerhalb der Hüllkurve 0. Ordnung graphisch dar. (*Minima  $m=1; 2; 3$ , u. s. w. und die Maxima  $m=1,5; 2,5; 3,5$ ; u. s. w.*)
- Zeichnen Sie die Regressionsgraden ein und bestimmen Sie die sechs Anstiege und die relativen Messunsicherheiten unter Verwendung der eingetragenen Fehlerbalken.
- Vergleichen und interpretieren Sie die Ergebnisse mit den Tabellenwerten und führen Sie einen tabellarischen Methodenvergleich durch.

**Aufgabe 3:** Untersuchung der Beugung am Gitter

- Berechnen Sie die Gitterkonstante  $G$ .

$$G = \frac{\lambda \cdot L}{\Delta x}$$

- In welchem Zusammenhang stehen die Anzahl der Nebenmaxima zur Anzahl der sichtbaren Spalten?



**Bild 5:** Bestimmung der Gitterkonstanten  $G$

**3. Ergänzungen**

**Methode 2:** Die Spaltbreite  $b$  bei Einzel- und Doppelspalt (Hüllkurve) und der Spaltabstand  $g$  (bei Doppelspalt) ergibt sich hier aus der Beziehung:

$$b = 0,8862 \cdot \lambda \cdot \frac{L}{x_{0,5}}$$

$$g = 0,8862 \cdot \lambda \cdot \frac{L}{a_{0,5}}$$

$x_{0,5}$ : Halbwertsbreite (Breite des Intensitätspeaks in halber Peakhöhe)

$a_{0,5}$ : Halbwertsbreite (Breite des Intensitätspeaks in halber Peakhöhe)

$\lambda$ : Laserwellenlänge ( $\lambda = 633\text{nm}$ )

$L$ : Entfernung vom Beugungsobjekt (Einzelspalt, Doppelspalt, Gitter) über den Reflektorspiegel zur Mitte des Schreibers

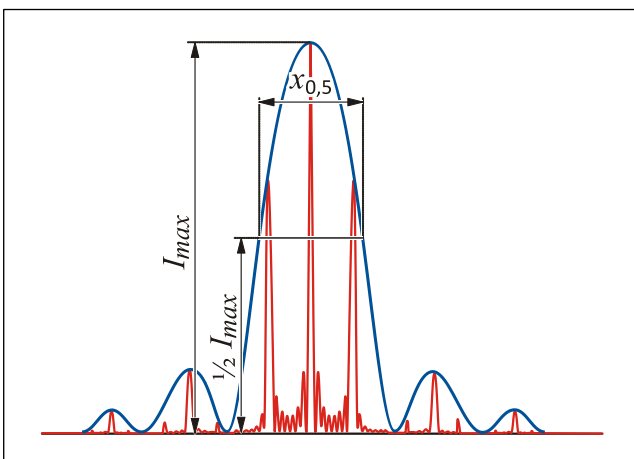
**Methode 3:** Berechnung der Spaltbreite  $b$  aus  $n \cdot \Delta x$  bzw. des Spaltabstandes  $g$  aus  $n \cdot \Delta a$  ergibt sich aus der Beziehung:

$$b = \lambda \cdot \frac{L}{\Delta x}$$

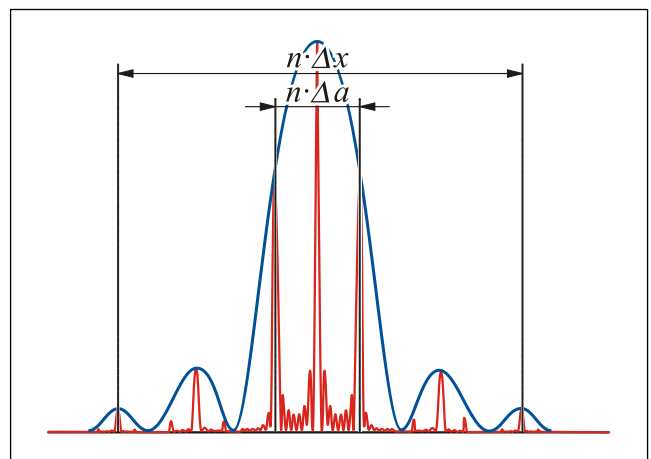
$$g = \lambda \cdot \frac{L}{\Delta a}$$

$\Delta x$ : Abstand zwischen zwei benachbarten Maxima der Hüllkurve

$\Delta a$ : Abstand zwischen zwei benachbarten Maxima innerhalb der Hüllkurve der 0. Ordnung



**Bild 6:** Prinzip der Methode 2



**Bild 7:** Prinzip der Methode 3 ( $n=4$  bei  $\Delta x$  und  $n=2$  bei  $\Delta a$ )

### 3.1 Ergänzung zur Aufgabe 2

Für ein Beugungsminimum gilt Gleichung (2):

$$\sin \vartheta = \frac{n \cdot \lambda}{b} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ist  $x_1$  der Abstand des ersten Minimums ( $n=1$ ) vom Zentralmaximum und  $L$  der Abstand zwischen Spalt und Detektor, dann gilt (für kleine Beugungswinkel  $\vartheta$ ):

$$\frac{x_1}{L} = \tan \vartheta \approx \vartheta ; \text{ also } \frac{x_1}{L} = \frac{\lambda}{b} \text{ so ist } b = \frac{\lambda \cdot L}{x_1} .$$

Aus Gleichung (3) erhält man unter gleichen Voraussetzungen mit  $x_2$  gleichem Abstand des ersten Nebenmaximums ( $n=1$ ) vom Zentralmaximum:

$$b \cdot \sin \vartheta = \frac{3}{2} \cdot \lambda \text{ und damit wie oben: } b = \frac{3}{2} \cdot \frac{\lambda \cdot L}{x_2} .$$

### 3.2 Ergänzende Bemerkungen

Wird das beugende Objekt nicht, wie bei der Fraunhofer'schen Beugungsanordnung, von einem parallelen Lichtbündel getroffen, sondern von divergentem Licht aus einer Punktquelle, so ergibt sich ein verändertes Beugungsbild. Dieses nähert sich mehr dem Bild bei der Fraunhofer-Anordnung, je weiter die Projektionsfläche vom Beugungsobjekt entfernt und je weniger divergent das einfallende Licht wird. Obwohl die Grundidee der Beschreibung durch Überlagerung von Elementarwellen beibehalten wird, gestaltet sich die quantitative Behandlung des Beugungsbildes bei der sogenannten **Fresnel'schen Beugungsanordnung** als wesentlich schwieriger.

Verwendet man statt einer rechteckigen Spaltöffnung eine kreisförmige Blende mit dem Durchmesser  $d$ , so erhält man als Beugungsfigur konzentrische helle und dunkle Ringe. Das erste Minimum tritt unter dem Winkel

$$\vartheta \approx \sin \vartheta = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{d} \quad (13)$$

auf.

Durch die Beugung z.B. an der Eintrittsöffnung ist eine prinzipielle Grenze für das räumliche Auflösungsvermögen optischer Instrumente gegeben. Punktförmige Lichtquellen werden nicht mehr als Punkte, sondern als Beugungsscheibchen abgebildet. Bei eng benachbarten Lichtquellen überlappen sich die Beugungsscheibchen „beugungslimitiert“ und können somit nicht mehr getrennt werden.