

In optischen Systemen spielen Linsen eine zentrale Rolle. In diesem Versuch werden Verfahren zur Bestimmung der Brennweite und der Hauptebenen von Linsen und Linsensystemen vorgestellt.

1. Theoretische Grundlagen

1.1 Allgemeines

Linsen sind Körper aus einer lichtbrechenden Substanz, die von zwei meist kugelförmigen Flächen begrenzt werden. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte dieser Flächen heißt **optische Achse**.

Ein auf die Linse fallender Lichtstrahl wird entsprechend dem Brechungsgesetz gebrochen. Beschränkt man sich auf Strahlen, die nur kleine Winkel mit der optischen Achse bilden, so vereinigt eine Linse alle von einem Gegenstandspunkt G_1 ausgehenden Strahlen in einem Bildpunkt B_1 .

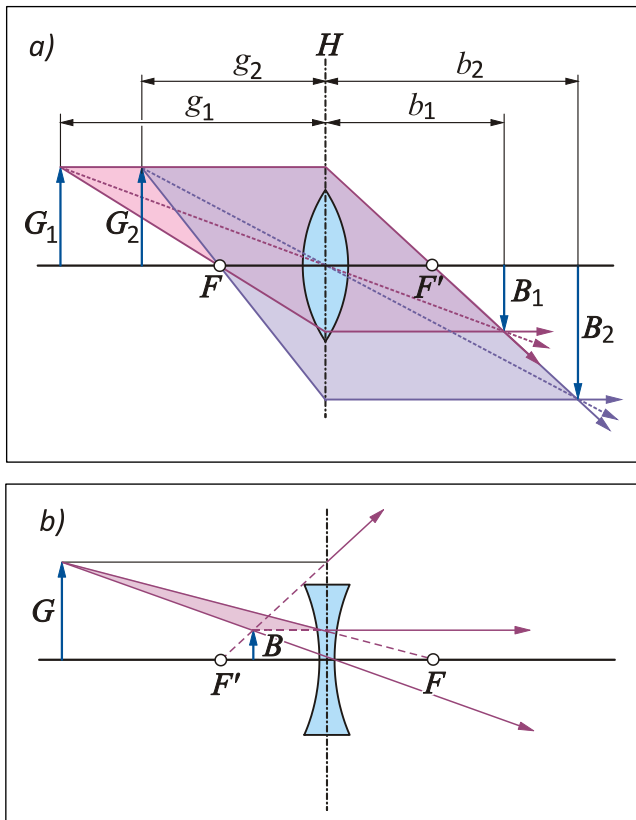


Bild 1: Bildkonstruktion bei (a) einer dünnen Sammellinse und (b) einer Zerstreuungslinse
 B, G : Bild- bzw. Gegenstandsgröße
 b, g : Bild- bzw. Gegenstandsweite

Das Bild heißt **reell**, wenn sich die Strahlen im Bildpunkt wirklich schneiden, es heißt **virtuell**, wenn sich nur die rückwärtigen Verlängerungen der Strahlen schneiden.

Zunächst werden nur dünne Linsen betrachtet. Bei diesen kann man sich die zweimalige Brechung des Lichtes durch eine einzige Brechung an der Mittelebene der Linse ersetzt denken.

Sammellinsen (Konvexlinsen) sind in der Mitte dicker, **Zerstreuungslinsen (Konkavlinsen)** dünner als am Rand.

Parallel zur optischen Achse einfallendes Licht wird von einer Sammellinse im Brennpunkt F' vereinigt; der Abstand des Brennpunktes von der Mittelebene ist die **Brennweite f** der Linse. Der reziproke Wert $D = 1/f$ wird als **Brechkraft** bezeichnet und in Dioptrien gemessen ($1 \text{ Dioptrie} = 1 \text{ m}^{-1}$). Bei Zerstreuungslinsen werden parallel zur optischen Achse einfallende Strahlen so gebrochen, als kämen sie von einem Brennpunkt F' ; auch hier ist der Abstand des Brennpunktes von der Mittelebene die Brennweite. Sammellinsen haben also reelle, Zerstreuungslinsen virtuelle Brennpunkte (**Bild 1**). Befinden sich die beiden brechenden Flächen einer Linse im gleichen umgebenden Medium, so sind objekt- und bildseitige Brennweite gleich.

Für die geometrische Konstruktion des Bildes benutzt man (**Bild 1**)

- den **Mittelpunktstrahl**, der seine Richtung nicht ändert,
- den **Parallelstrahl**, der zum Brennpunktstrahl durch F' wird und
- den **Brennpunktstrahl** durch F , der zum Parallelstrahl wird.

Das Verhältnis von Bildgröße B zu Gegenstandsgröße G bezeichnet man als **linearen Abbildungsmaßstab** A . Mit Hilfe des Strahlensatzes ergibt sich aus **Bild 1a**

$$A = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \quad (1)$$

Man erhält auch $G \cdot f^{-1} = B \cdot (b - f)^{-1}$ woraus die **Linsengleichung** folgt:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad \boxed{f = \frac{g \cdot b}{g + b}} \quad (2)$$

Bei virtuellen Bildern bzw. Brennpunkten sind b bzw. f negativ einzusetzen.

Zwei im Abstand d voneinander angeordnete Sammellinsen mit den Einzelbrennweiten f_1 und f_2 ergeben eine resultierende Gesamtbrennweite f_g , die sich aus

$$\frac{1}{f_g} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2} \quad (3)$$

berechnen lässt. Ist der Abstand d klein gegenüber den Brennweiten, so addieren sich die Brechkkräfte:

$$\frac{1}{f_g} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (3a)$$

Bei **dicken Linsen** oder Linsengruppen kann man sich die zweimalige Brechung der Lichtstrahlen an den Linsenflächen nicht mehr durch eine einzige Brechung an der Mittelebene ersetzt denken. Man hilft sich durch die Einführung der **gegenstandsseitigen Hauptebene H** und der **bildseitigen Hauptebene H'** (**Bild 2**), an denen man sich die Strahlen gebrochen denkt.

Die Bildkonstruktion ist nach folgender Vorschrift auszuführen:

- Zwischen H und H' laufen alle Strahlen parallel zur Achse.
- Der Parallelstrahl 1 wird an der Hauptebene H' gebrochen und wird zum Brennpunktstrahl 1' durch den zu H' gehörenden Brennpunkt F' .
- Der Brennpunktstrahl 2 durch den zu H gehörenden Brennpunkt F wird zum Parallelstrahl 2'.
- Der Mittelpunktstrahl 3 wird lediglich parallel verschoben.

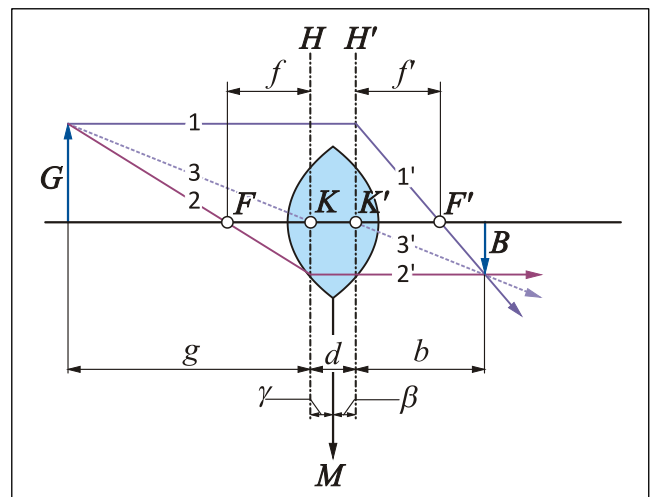


Bild 2: Bildkonstruktion bei einer dicken Sammellinse

Bezieht man g , b und f auf die zugehörigen Hauptebenen, so gelten die Gleichungen (2) und (1) auch für dicke Linsen und Linsengruppen. Die Lage der Hauptebenen lässt sich nach dem in **Abschnitt 1.3** beschriebenen Verfahren von **Ernst Abbe** bestimmen.

1.2 Brennweitenmessung

1.2.1 Bestimmung aus Gegenstands- und Bildweitenmessung

Die Brennweite von Sammellinsen misst man am einfachsten aus Gegenstands- und Bildweite, indem man das Bild eines leuchtenden Gegenstandes (*beleuchteter Glasmaßstab*) auf einem Schirm auffängt und die entsprechenden Abstände zum Linsenmittelpunkt misst. Aus der Gleichung (2) berechnet man daraus die Brennweite.

Das Verfahren hat den Nachteil, dass bei gefassten Linsen die Lage der Mittelebene nicht genau bekannt ist.

1.2.2 Besselsches Verfahren

Bei festem Abstand s zwischen Gegenstand und Schirm (**Bild 3**) erhält man bei zwei symmetrischen Linsenstellungen **1** und **2** scharfe reelle Bilder auf dem Schirm (*in Stellung 1 ein vergrößertes, in Stellung 2 ein verkleinertes im Versuch nur ein heller Punkt*), wenn der Abstand s größer als die vierfache Brennweite der Linse ist.

Ist die Größe der Verschiebung von **Stellung 1** nach **Stellung 2** gleich e , so gilt wegen der Symmetrie der Linsenstellungen ($g_1 = b_2$, $g_2 = b_1$)

$$e = b_1 - g_1 \quad \text{bzw.} \quad e = g_2 - b_2 \quad (4)$$

$$s = g_1 + b_1 \quad \text{bzw.} \quad s = g_2 + b_2 \quad (4a)$$

Löst man nach g und b auf und setzt in die Linsengleichung (2) ein, so ergibt sich

$$f = \frac{1}{4} \cdot \left(s - \frac{e^2}{s} \right) . \quad (5)$$

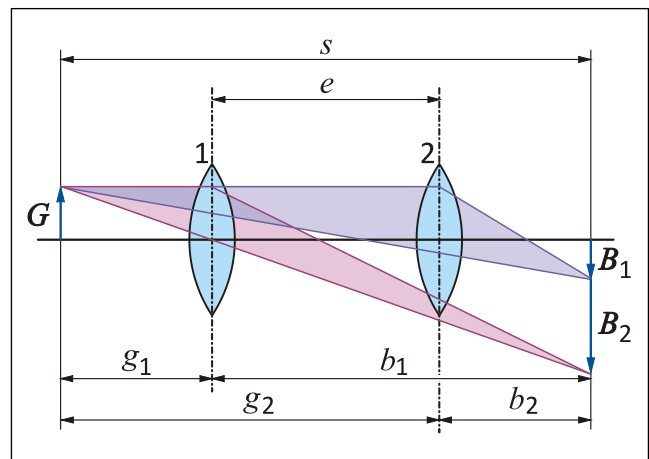


Bild 3: Besselsche Methode der Brennweitenbestimmung

1.2.3 Zerstreulinsen

Da die Abbildung mit Zerstreulinsen nur virtuelle Bilder liefert, muss deren Brennweite indirekt gemessen werden. Man setzt zu diesem Zweck die Zerstreulinse, deren Brennweite f_Z zu messen ist, mit einer Sammellinse bekannter Brennweite f_S zu einem zentrierten Linsensystem zusammen. Ist der Linsenabstand zu vernachlässigen, so ergibt sich nach Gleichung (3a) für die Brennweite f_g des Gesamtsystems

$$\frac{1}{f_g} = \frac{1}{f_S} + \frac{1}{f_Z} ,$$

wobei f_Z negativ ist. Wählt man die Brennweite der Sammellinse kleiner als den Betrag der Brennweite der Zerstreulinse, so überwiegt die sammelnde Wirkung, und das System hat eine positive Brennweite, die sich nach den beschriebenen Methoden messen lässt. Aus f_S und f_g ergibt sich

$$f_Z = - \frac{f_g \cdot f_S}{f_g - f_S} \quad (6)$$

1.3 Brennweite und Hauptebenen eines Linsensystems

Die Messung der Brennweite und die Bestimmung der Lage der Hauptebenen eines Linsensystems erfolgt nach dem **Verfahren von Ernst Abbe** (1840-1905), das auf der Messung des Abbildungsmaßstabes reeller Bilder beruht. Kombiniert man die Gleichungen (2) und (1) miteinander, so ergibt sich

$$g = f \cdot (1 + A^{-1}) \quad (7a)$$

und

$$b = f(1 + A). \quad (7b)$$

Die Krümmungsmittelpunkte K und K' der sich ergebenden Flächen befinden sich bei einem optischen zentrierten System auf einer Geraden. Diese wird im Allgemeinen als optische Achse bezeichnet.

Für die Brennweiten f und f' kann gesagt werden, wenn links und rechts der Linse die gleiche Brechzahl n vorliegt, dann gilt:

$$f = f' \quad (8)$$

ansonsten gilt:

$$\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'} \quad (9)$$

Die Brechung erfolgt eigentlich an den gekrümmten Flächen der Linsen.

Zur Vereinfachung werden aber die gekrümmten Flächen durch Ebenen ersetzt und diese als Hauptebene bezeichnet, wobei sich die Hauptebene H auf der Gegenstandsseite und die Hauptebene H' auf der Bildseite befindet.

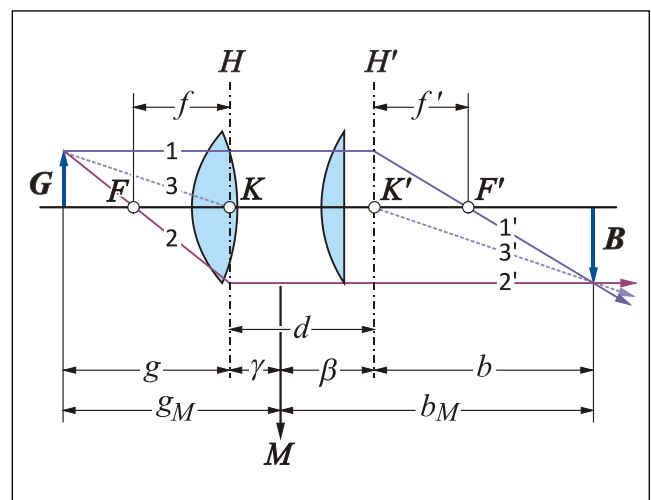


Bild 4: Messung der Hauptebenenlage nach Abbe

Der Hauptebenenabstand d beträgt typischerweise $\frac{1}{3}$ der Linsendicke. Bei einer dünnen Linse fallen die Hauptebenen zusammen. Es gibt nur eine Hauptebene H .

Die Gegenstandsweite g und die Bildweite b sind nicht direkt messbar. Da die Positionen der Hauptebenen H und H' noch unbekannt sind, misst man zunächst die Entfernungen g_M und b_M von einer beliebig am Linsensystem angebrachten Ablesemarke M . Man erhält somit

$$g_M = g + \gamma \quad \text{bzw.} \quad b_M = b + \beta \quad (10)$$

Setzt man die Gleichungen (7a) bzw. (7b) in die Gleichung (10) ein so erhält man:

$$g_M = f \cdot (1 + A^{-1}) + \gamma \quad \text{bzw.} \quad b_M = f \cdot (1 + A) + \beta \quad (11)$$

Es kann vorkommen, dass γ oder β negativ sind. Ein negatives γ bedeutet, dass die Hauptebene H rechts von der Ablesemarke M liegt. Ein negatives β bedeutet, dass H' links von M sich befindet. Die Brennweite f kann ebenfalls negativ werden. In diesem Falle liegt der gegenstandsseitige Brennpunkt F rechts von H , der bildseitige Brennpunkt F' links von H' .

Beispiel: Bestimmung von Brennweiten und Hauptebenen eines Linsensystems

n	l_1 cm	l_2 cm	l_3 cm	G mm	B mm	g_M mm	b_M mm	A	A^{-1}
1	15	27,1	150	9	63	121	1229	7,000	0,143
2	15	28,8	100	9	29	138	712	3,222	0,310

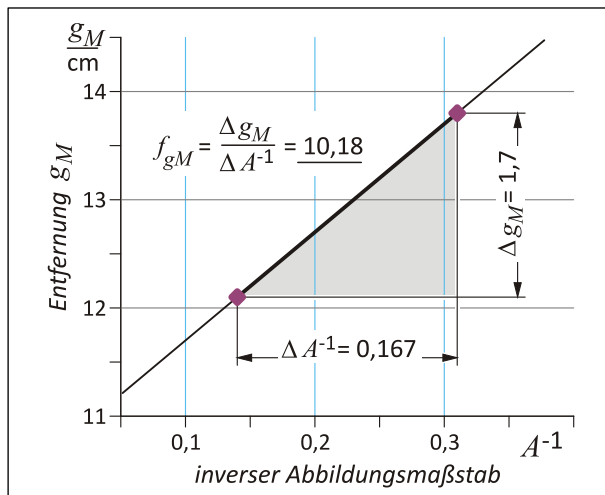
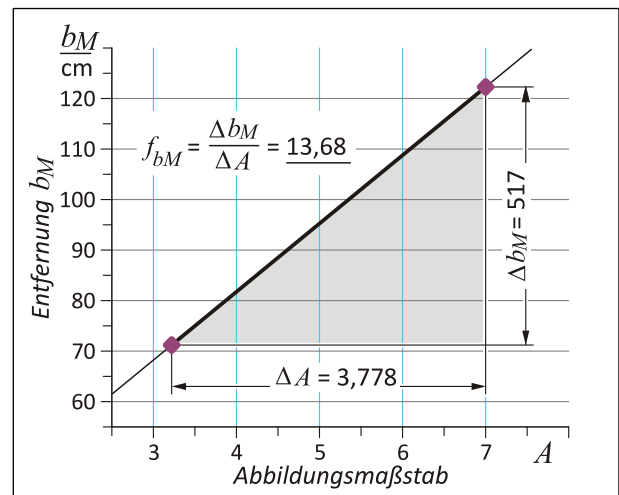
• Bestimmungsgleichungen

$$g_M = l_2 - l_1$$

$$b_M = l_3 - l_2$$

$$A = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{A}$$

**Bild 5a:** Entfernung g_M über reziproken Abbildungsmaßstab**Bild 5b:** Entfernung b_M über Abbildungsmaßstab• Bestimmung der Brennweite f

$$f = \frac{1}{2} \cdot (f_{gM} + f_{bM}) = 0,5 \cdot (101,8 + 136,8) \text{ mm} = \underline{\underline{119,3 \text{ mm}}}$$

n	g mm	b mm	γ mm	β mm	H mm	H' mm	F mm	F' mm	d mm
1	136,4	954,4	-15,4	274,6	286,4	545,6	167,1	664,9	259,2
2	156,3	503,7	-18,3	208,3	306,3	496,3	187,0	615,6	190,0

• Bestimmung der Gegenstandsweite g bzw. der Bildweite b

$$g_n = f \cdot (1 + A_n^{-1})$$

$$b_n = f \cdot (1 + A_n)$$

• Bestimmung von γ und β bzw. den Hauptebenen H und H' , der Brennpunkte F und F' sowie den Hauptebenenabstand d

$$\gamma_n = g_{Mn} - g_n$$

$$H_n = l_{2n} - \gamma_n$$

$$F_n = H_n - f$$

$$\beta_n = b_{Mn} - b_n$$

$$H'_n = l_{2n} + \beta_n$$

$$F'_n = H'_n + f$$

$$d_n = \gamma_n + b_n$$

2. Versuch

2.1 Vorbetrachtung

Aufgabe 1: Leiten Sie aus der Linsengleichung Gleichung (2) und der Bestimmungsgleichung für den Abbildungsmaßstab $A = b/g$ die Gleichung (7a) und (7b) her.

Aufgabe 2: Warum kann man die Brennweite einer Zerstreuungslinse nicht direkt messen?

2.2 Versuchsdurchführung

2.2.1 Verwendete Geräte

Optische Bank mit Reitern, Lampe, verschiedenen Linsen, Fotoobjektiv, Abbildungsmaßstab, Lineal, Messschieber

2.2.2 Versuchshinweise

Aufgabe 1: Ermittlung der Brennweite f zweier Sammellinsen mit Hilfe zweier unterschiedlicher Messmethoden

Aufgabe 1a: Drei-Längen Messverfahren

- Um den Maßstab der optischen Bank zur Messung nutzen zu können, bestimmen Sie den Gegenstandsort l_1 , den Linsenort l_2 sowie den Bildort l_3 (siehe **Bild 6**).
- Bestimmen Sie aus diesen Werten die Gegenstandsweite g und Bildweite b .
- Führen Sie jeweils **drei** Messungen pro Linse durch. Variieren Sie dabei den Abstand von l_3 in Schrittweiten von $l_3 = 25 \text{ cm}$.

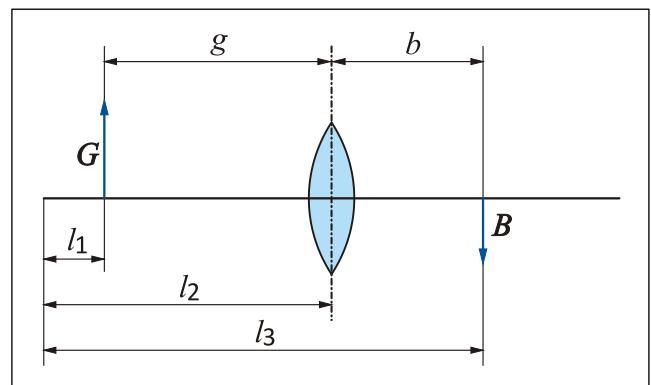


Bild 6: Bestimmung von g und b nach **Aufgabe 1a**

Aufgabe 1b: Verfahren nach Bessel (siehe **Abschnitt 1.2.2**)

- Messen Sie den Abstand s zwischen Gegenstand und Bild sowie den Abstand e der beiden Linseneinstellungen.
- Führen Sie jeweils **drei** Messungen pro Sammellinse durch. Variieren Sie dabei die Einstellung des Bildschirmes in Schrittweiten von $l_3 = 25 \text{ cm}$.

Aufgabe 2: Ermittlung der Brennweite einer Zerstreuungslinse (siehe **Abschnitt 1.2.3**)

- Bestimmen Sie die Brennweite einer Zerstreuungslinse.
- Wählen Sie die dafür notwendige Sammellinse selbständig aus
- Messen Sie das Linsensystem nach dem Besselschen Verfahren.
- Führen Sie **drei** Messungen bei unterschiedlichem Abstand zwischen Gegenstand und Bild durch.

Aufgabe 3: Bestimmung charakteristischer Parameter eines kompakten Linsensystems (siehe **Abschnitt 1.3**)

- Die Messung erfolgt analog zur **Aufgabe 1a**

- Bestimmen Sie für das kompakte Linsensystem (*Projektionsobjektiv*) den Gegenstandsort l_1 , den Linsenort l_2 (*Ablesemarke M*) sowie den Bildort l_3 .
- Ermitteln Sie bei jeder Einzelmessung den Abbildungsmaßstab A . Messen Sie dazu die Bildgröße B mit Hilfe eines Messschiebers aus. Wählen Sie aus Gründen der Messsicherheit den größtmöglichen Skalenabstand. Der als Gegenstand G eingesetzte Glasmaßstab besitzt eine **Millimeterteilung**.
- Führen Sie je **6 Messungen** bei einem unterschiedlichen Abstand (Schrittweite $l_3=10\text{ cm}$) vom Bildort durch.

2.3 Versuchsauswertung

Aufgabe 1: Ermittlung der Brennweite f zweier Sammellinsen mit Hilfe zweier unterschiedlicher Messmethoden

Aufgabe 1a: Drei-Längen Messverfahren

- Berechnen Sie die Brennweite f der beiden Sammellinsen aus Gegenstandsweite g und Bildweite b .
- Bestimmen Sie die Messunsicherheit durch eine Fehlerrechnung für beide Sammellinsen.
- Prüfen Sie die Messgenauigkeit bei der Brennweitenbestimmung durch die Ermittlung von Gegenstands- und Bildweite. Stellen Sie dazu die Wertepaare von g und b in einem Diagramm der Funktion $b = f(g)$ graphisch dar und verbinden Sie die zusammengehörigen Punkte miteinander (siehe Bild 7).
- Die sich daraus ergebenden drei Geraden einer Linse sollten sich in einem Punkt P schneiden. Durch Loten ausgehend von diesen Punkten auf die Koordinatenachsen erhalten Sie so die Brennweiten der beiden Sammellinsen.
- Vergleichen Sie die graphisch bestimmten mit den berechneten Werten. Diskutieren Sie das Ergebnis.

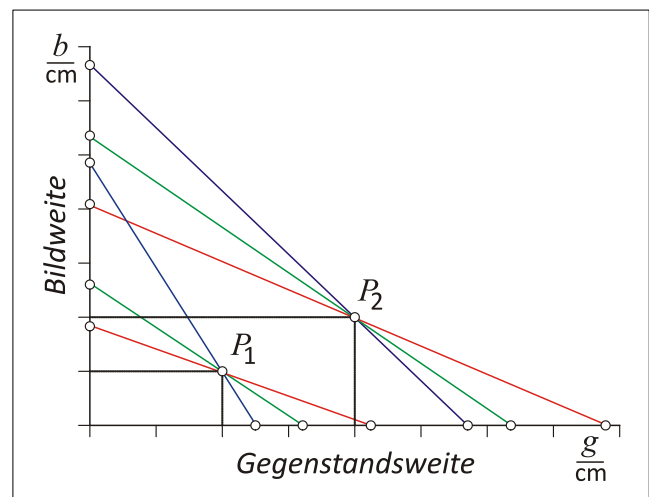


Bild 7: Graphische Bestimmung der Brennweiten

Aufgabe 1b: Verfahren nach Bessel (siehe Abschnitt 1.2.2)

- Berechnen Sie die Brennweite f der beiden Sammellinsen aus dem Abstand s zwischen Gegenstand und Bild sowie dem Abstand e der beiden Linseneinstellungen.
- Bestimmen Sie die Messunsicherheit durch eine Fehlerrechnung für beide Sammellinsen.
- Vergleichen (*tabellarisch*) und diskutieren Sie beide Methoden hinsichtlich der Brennweiten bzw. der Messunsicherheiten.

Aufgabe 2: Ermittlung der Brennweite einer Zerstreuungslinse (siehe Abschnitt 1.2.3)

- Berechnen Sie die Brennweite einer Zerstreuungslinse und bestimmen Sie die Messunsicherheit (*absolut und relativ*) durch eine Fehlerrechnung.

Aufgabe 3: Bestimmung charakteristischer Parameter eines kompakten Linsensystems (siehe **Abchnitt 1.3**)

- Stellen Sie in je einem Diagramm die graphische Funktion von $g_M = f(A^{-1})$ sowie $b_M = f(A)$ dar und bestimmen Sie die Anstiege der Regressionsgraden.
- Ermitteln Sie aus diesen Ansteigen die mittlere **Brennweite f** .
- Berechnen Sie **Gegenstandsweite g** und **Bildweite b** , die **Differenzabstände γ** bzw. **β** , die **Hauptebenen H** und **H'** sowie die **Brennpunkte F** und **F'** des kompakten Linsensystems.
- Die Summe aus γ und β ist der **Hauptebenenabstand d** . Dieser ist ebenfalls zu ermitteln. Fertigen Sie für den maximalen Abstand d_{max} eine maßstabsgerechte Skizze des Systems an und zeichnen Sie alle gemessenen bzw. alle berechneten Werte mit ein (siehe **Unterlagen Platzanleitung**).

3.1 Ergänzende Bemerkungen zum Linsenfehler

Die Aussage, dass sich achsenparallele Strahlen in einem Punkt, dem Brennpunkt der Linse, schneiden, ist nur für Strahlen mit kleinem Abstand zur optischen Achse in guter Näherung erfüllt. Je achsenferner der Strahl im Gegenstandsraum verläuft, umso näher rückt im Bildraum sein Schnittpunkt mit der optischen Achse an die Linse heran. Die Brennweite für achsenferne Strahlen ist also geringer als diejenige für achsennahe Strahlen (**sphärische Abberation**).

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht in Materie mit dem Brechungsindex n ist wellenlängenabhängig (**Dispersion**). Rotes Licht wird an den Grenzflächen schwächer gebrochen als blaues Licht, die Brennweite einer Linse ist also für rotes Licht größer als für blaues Licht (**chromatische Abberation**).

Ein weiterer Abbildungsfehler macht sich bemerkbar bei parallelen Lichtbündeln, die unter großem Winkel gegen die optische Achse einfallen. Als „Bild“ ergibt sich in zwei verschiedenen Entfernungen von der Linse je ein Strich. Die beiden Striche sind zueinander senkrecht (**Astigmatismus schiefer Bündel**).

Neben den genannten gibt es weitere Linsenfehler (z.B. **Koma**, **Bildwölbung**, **Verzeichnung**), auf die hier nicht eingegangen werden soll. Linsenfehler können weitgehend kompensiert werden durch geeignete Kombination mehrerer Linsen mit unterschiedlichen Krümmungsradien und aus verschiedenen Glassorten mit unterschiedlicher Dispersion. Eine Korrektur der chromatischen Abberation zumindest für zwei Farben erreicht man durch Kombination einer Sammellinse mit einer Zerstreuungslinse aus zwei Glassorten mit geeignetem Brechungsindex (**Achromat**). Weitgehende Korrekturen machen kompliziertere Linsensysteme mit mehreren Linsen erforderlich.

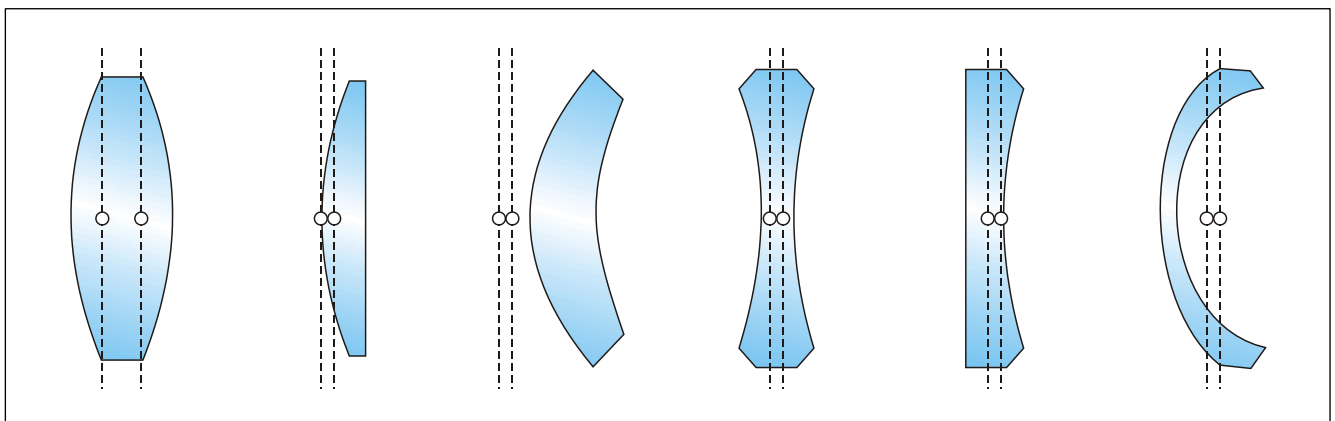


Bild 8: Einige Linsenbeispiele mit eingetragenen Hauptebenen