Bei symmetrischen Kreiseln sollen die Präzession und die Nutation untersucht und damit die dynamischen Eigenschaften eines Kreisels veranschaulicht werden.

1. Theoretische Grundlagen

1.1 Begriffsbestimmungen

Unter einem Kreisel versteht man einen starren Körper, der eine Rotationsbewegung ausführt. Im Allgemeinen liegt bei rotierenden Körpern die Drehachse fest und wird von wenigstens zwei Lagern gehalten, wobei durch die Lagerung Zwangskräfte entstehen, die die Drehachse raumfest halten.
In diesem Versuch steht das Verhalten rotierender starrer Körper im Vordergrund, bei denen durch geeignete Lagerung Zwangskräfte vermieden werden und deshalb die Rotationsachsen nicht mehr raumfest sein müssen (***Rotation um freie Achsen***).

Ein Kreisel besitzt, wie jeder andere Körper, ein Trägheitsellipsoid mit drei Hauptachsen. Sind die Massenträgheitsmomente in Richtung zweier Hauptachsen gleich groß, so heißt der Kreisel symmetrisch. Das ist insbesondere der Fall bei Rotationskörpern. Die Symmetrieachse wird in diesem Fall als ***Figurenachse*** bezeichnet. Sind alle drei Hauptträgheitsmomente verschieden, spricht man von einem unsymmetrischen Kreisel.

Zwei weitere Achsen spielen beim Kreisel eine Rolle: die (*momentane*) ***Drehimpulsachse*** und die (*momentane*) ***Drehachse***. Das sind die Achsen durch den Körperschwerpunkt, die parallel zum Drehimpulsvektor bzw. zum Vektor der Winkelgeschwindigkeit stehen. Die genannten drei Achsen haben im Allgemeinen voneinander verschiedene Richtungen.

Ein Kreisel, bei dem die Summe aller Drehmomente M_i bezüglich des Schwerpunktes verschwindet

$$\vec{M} = \sum_{i=0}^{n} \vec{M}_i = 0\,, \tag{1}$$

heißt ***kräftefrei***. Wegen

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

sind in diesem Fall Richtung und Betrag des Drehimpulsvektors $\vec{L}$ zeitlich konstant.

1.2 Die Nutation des symmetrischen Kreisels

Ein symmetrischer, kräftefreier Kreisel wird so in Rotation versetzt, dass der Vektor $\vec{\omega}$ in Richtung der Figurenachse zeigt. Da dies eine Hauptträgheitsachse ist, besitzt $\vec{\omega}$ nur eine von Null verschiedene Komponente und der Drehimpulsvektor muss ebenfalls in Richtung der Figurenachse zeigen. Die drei Kreiselachsen – Figurenachse, Drehimpulsachse, Drehachse – stimmen in diesem Fall überein und sind nach der Gleichung (2) raumfest.
Es wirke nun von außen eine kurzzeitige Störung auf den Kreisel, die die Richtung der momentanen Drehachse ändert (*z.B. durch einen Schlag auf die Symmetrieachse*). Dadurch erhält der Vektor $\vec{\omega}$ eine Komponente $\vec{\omega}_2$ senkrecht zur Figurenachse. Auch der Drehimpuls besitzt dann zwei zueinander senkrechte Komponenten

$$\vec{L}_i = J_i \cdot \vec{\omega}_i \quad (3)$$

i=1, 2
J_i : Hauptträgheitsmomente

mit

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 \quad (4)$$

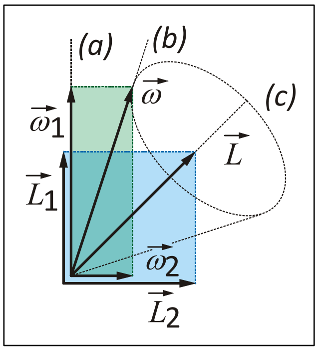

Bild 1: Zur Nutation des Kreisels
a) Figurenachse, **b)** Momentane Drehachse,
c) Drehimpulsachse

Da nach der kurzen Störung kein Drehmoment mehr auf den Kreisel wirkt, muss der Drehimpuls $\vec{L}$ zeitlich konstant bleiben, während $\vec{\omega}$ um $\vec{L}$ läuft (***Bild 1***). Im Experiment kann jedoch nur die Figurenachse unmittelbar beobachtet werden. Sie umläuft ebenfalls auf einem Kegelmantel die raumfeste Drehimpulsachse. Diese Bewegung wird als ***Nutation*** des Kreisels bezeichnet. Durch Reibungseinflüsse klingt diese Nutation mit der Zeit ab.

1.3 Die Präzession des symmetrischen Kreisels

Untersucht wird nunmehr die Wirkung äußerer Kräfte auf einen rotierenden symmetrischen Kreisel. Im Versuch wird dazu ein in ***Bild 2*** skizzierter Apparat (*Gyroskop*) benutzt. Bei diesem Apparat ist der kugelgelagerte Kreisel an einem Ende eines Waagebalkens angebracht, so dass seine Figurenachse mit der Richtung des Waagebalkens zusammenfällt. Der Waagebalken ist in einem Gelenk um die ***Achse A*** drehbar gelagert, und das Gewicht des Kreisels wird durch ein Gegengewicht ausgeglichen. Dadurch ist der Waagebalken im Schwerpunkt unterstützt und es wirken auf den Kreisel zunächst keine äußeren Kräfte. Das ***Achse A*** tragende Gelenk ist schließlich noch um die vertikale ***Achse B*** leicht drehbar.

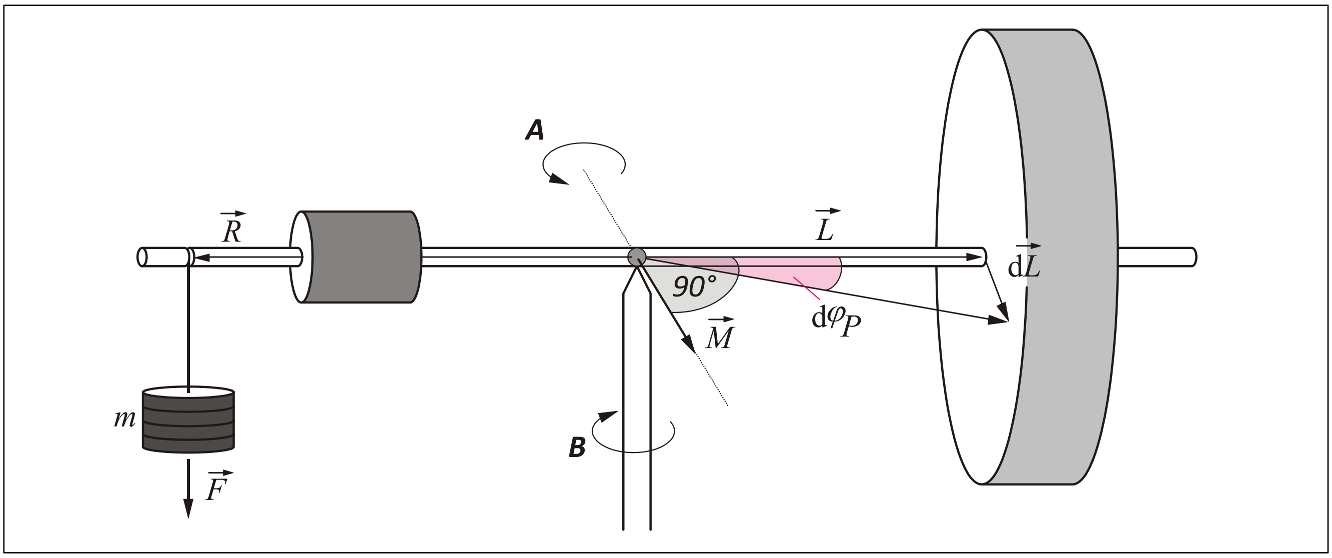

Bild 2: Zur Erklärung der Präzession eines Kreisels

Wird der Kreisel in Rotation versetzt, so behält seine Figurenachse (*zugleich Drehimpulsachse*) ihre Lage im Raum bei, da keinerlei Drehmomente auf den Kreisel einwirken. Wird das Gegengewicht jedoch erhöht, wird mit der Kraft $\vec{F}$ ein Drehmoment $\vec{M}$ auf den Kreisel ausgeübt. Die Achse des Kreisels folgt jedoch diesem Drehmoment nicht, sondern weicht ihm rechtwinklig aus:

Der rotierende Kreisel besitzt einen bestimmten Drehimpuls $\vec{L}$, dessen Richtung durch den Umlaufsinn des Kreiselkörpers gegeben ist (***Bild 2***). Durch das Drehmoment, dessen Vektor auf den Beschauer gerichtet ist, erhält der Kreisel einen weiteren Drehimpuls $\mathrm{d}\vec{L}$, der sich mit $\vec{L}$ zu einem resultierenden Drehimpuls zusammensetzt. Die Kreiselachse stellt sich nun in Richtung des resultierenden Drehimpulses ein. Der Kreisel vollführt also eine Drehung um die vertikale ***Achse B***.
Diese Bewegung des Kreisels unter dem Einfluss einer äußeren Kraft wird ***Präzession*** genannt. Für die Winkelgeschwindigkeit der Präzession ω_P erhält man aus ***Bild 2***:

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{L} \ ,$$

$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F} \ , \qquad M = \left|\vec{M}\right| = R \cdot F = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{L}$$

$$\omega_P = \frac{\mathrm{d}\varphi_P}{\mathrm{d}t} = \frac{M}{L} = \frac{R \cdot F}{L} = \frac{R \cdot F}{J \cdot \omega_R} \ .$$

Das ist die Winkelgeschwindigkeit, mit der der Drehimpulsvektor auf einem Kreis um die Achse ***B*** läuft. Die Präzessionsfrequenz lautet

$$f_P = \frac{\omega_P}{2\pi} = \frac{R \cdot F}{4\pi^2 \cdot J \cdot f_R}$$

f_R : Drehfrequenz um Figurenachse, Rotationsfrequenz

$$\boxed{f_P = \frac{R \cdot g}{4\pi^2 \cdot J} \cdot \frac{m}{f_R}} \qquad (5)$$

und ist unabhängig vom Neigungswinkel α.

2. Versuch

2.1 Versuchsvorbereitung

Aufgabe 1: Was ist der Unterschied zwischen Nutation und Präzession?

Aufgabe 2: Welche technischen Möglichkeiten zur kräftefreien Lagerung beliebig geformter Kreisel gibt es?

2.2 Versuchsdurchführung

2.2.1 Verwendete Geräte

Kreisel mit drei Achsen (*Gyroskop*), Zusatzgewicht, berührungsloser Drehzahlmesser, Stoppuhr, Faden zum Aufziehen, Stativstange und Doppelmuffe zur Fesselung des Kreisels

2.2.2 Versuchshinweise

Für alle Messungen: Die Bestimmung der Rotationsfrequenz f_R bzw. der Winkelgeschwindigkeit ω_R des Kreisels geschieht über einen berührungslosen Drehzahlmesser. Dieser erfasst optisch den Hell-Dunkel-Kontrast eines am Kreisel angebrachten Reflektorstreifens.

Gebrauch des Drehzahlmessers

- Schalten Sie das Gerät ein, in dem Sie kurz die Taste „***MEAS***“ betätigen. Zum Messen müssen Sie diese Taste gedrückt halten und den Laserstrahl auf die Reflexfolie richten.
- Der Messabstand beträgt dabei ***zwischen*** $\mathbf{50...150\ mm}$.
- Die Messung wird durch Blinken des Strahlungszeichens in der Anzeige bestätigt und kann nun abgelesen werden.
- Die Drehzahl n wird in *1/min* angezeigt.

Achtung: *Niemals in den Laserstrahl sehen!*

Speicherfunktion: Nach Betätigung der Memory-Taste „***MEM***“ wird zunächst der ***letzte Wert*** (***LA***), nach erneutem Betätigen der ***höchste Wert*** (***UP***) und nach nochmaligem Betätigen der ***niedrigste Wert*** (***dn***) der Messreihe angezeigt. Dabei springt die Anzeige zwischen den Werten und der Kennzeichnung.

Aufgabe 1: Bestimmung des Massenträgheitsmomentes bezüglich der Figurenachse des Kreisels aus der Winkelbeschleunigung bei bekanntem Drehmoment

- Die Fesselung des Kreisels erfolgt durch Anbringen der Stativstange mit einer Doppelmuffe entsprechend ***Bild 3***.
- Wickeln Sie den Faden mit dem Gewichtsstück auf. Der Kreisel ist so zu stellen, dass das Gewichtsstück frei zum Fußboden fallen kann.
- Messen Sie mit der Stoppuhr die Zeit Δt vom Loslassen des Kreisels bis zum Aufschlagen des Gewichtsstückes auf den Fußboden.
- Messen Sie gleichzeitig mit Beginn der Bewegung die Drehzahl n bis nach dem Aufschlagen des Gewichtsstückes. Verwenden Sie zur Berechnung der Endwinkelgeschwindigkeit ω_E den höchsten Wert aus dem Speicher.
- Wiederholen Sie diese ***Messung 10-mal***.
- Bestimmen Sie die Masse m des beschleunigenden Gewichtsstückes und den Durchmesser d der Seiltrommel.

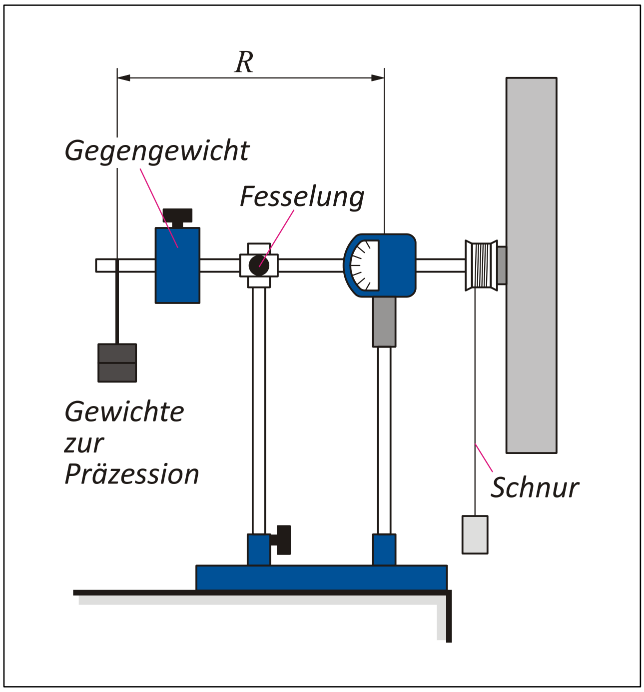

Bild 3: Skizze des Versuchsaufbaus

Aufgabe 2: Bestimmung der Präzession des Kreisels

- Beseitigen Sie die Fesselung und tarieren Sie den Kreisel kräftefrei mit dem Gegengewicht aus. Das Aufziehen des Kreisels erfolgt mittels einer zuvor aufgewickelten Schnur und sollte vor der Durchführung der Messung erprobt werden.
- Ziehen Sie den kräftefrei austarierten Kreisel auf.
- Hängen Sie das Gewicht zur Präzession der Masse $\boldsymbol{m}\mathbf{=30\ g}$ in die Nut an dem der Scheibe gegenüberliegenden Ende der Kreiselachse ein. (*Der Abstand R zum Lagerpunkt der Kreiselachse beträgt* $\mathbf{270\,mm}$.)

Gleichzeitig gemessen werden muss:

- die Zeit eines halben Präzessionsumlaufs ½t_p (*zur Berechnung den Wert verdoppeln*).
- ständig die Drehzahl n während des halben Präzessionsumlaufs.

- Führen Sie in gleicher Weise mindestens ***8 bis 10 weitere Messungen*** bei Abnahme der Kreiseldrehzahl durch.
- Wiederholen Sie den Versuch mit Gewichten von $\boldsymbol{m}$**=60 g** und $\boldsymbol{m}$**=90 g**.

Aufgabe 3: Bestimmung der Nutation des Kreisels

- Ziehen Sie den kräftefrei austarierten Kreisel auf.
- Erzeugen Sie die Nutation durch einen leichten seitlichen Schlag auf die Kreiselachse.
- Messen Sie gleichzeitig die Zeit $5t_N$ (***5 Nutationsumläufe***) und ständig die Drehzahl n während dieser Nutationsumläufe.
- Führen Sie in gleicher Weise ***8 bis 10 weitere Messungen*** bei Abnahme der Kreiseldrehzahl durch.

Hinweis Aufgabe 2 und 3: *Sollte die Anzahl der Messungen pro Aufziehen nicht erreicht werden, ist der Kreisel **erneut** aufzuziehen und die Messung **fortzuführen**!*

2.3 Versuchsauswertung

Aufgabe 1: Bestimmung des Massenträgheitsmomentes bezüglich der Figurenachse des Kreisels aus der Winkelbeschleunigung bei bekanntem Drehmoment

- Berechnen Sie aus den Messwerten die Mittelwerte der Fallzeit Δt und der Drehzahl n sowie die Messabweichungen aus den Summen des systematischen und des zufälligen Fehlers (*Mittelwert, Standardabweichung, t-Verteilung*).

Das Drehmoment ist das Produkt aus der Beziehung des Massenträgheitsmomentes und der Winkelbeschleunigung zur Kreiselachse x. So schreibt man:

$$M_x = J_x \cdot \alpha_x$$ x*: Kreiselachse*

und es folgt dann

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{M}{J} \quad .$$

- Berechnen Sie aus dem Drehmoment M ($M = m \cdot g \cdot r$) bzw. der Winkelbeschleunigung α ($\alpha = \omega_E = 2\pi \cdot n$) das Massenträgheitsmoment J und bestimmen Sie die Messunsicherheit durch eine Fehlerrechnung (*absolut und relativ*).

Aufgabe 2: Bestimmung der Präzession des Kreisels

- Bestimmen Sie aus der Zeit ½t_p eines halben Präzessionsumlaufs die Zeit t_p eines ganzen Präzessionsumlaufs.
- Berechnen Sie die Rotationsfrequenz f_R aus dem Mittelwert der maximalen und minimalen Drehzahl n.

- Tragen Sie alle ermittelten Messwerte entsprechend der Aufgabenstellung in ein Diagramm ein und ermitteln Sie die Funktion $\boldsymbol{f_R = f(t_P)}$ mit den ***3 unterschiedlichen Gewichten*** als Parameter, legen Sie die Fehlerbalken fest und schätzen Sie die relative Messunsicherheit ab.
- Bestimmen Sie die Anstiege über eine lineare Regression.
- Tragen Sie zum Vergleich in das Diagramm die nach Gleichung (5) ermittelten Kurven ein und diskutieren Sie die Ergebnisse.

- Untersuchen Sie den Zusammenhang zwischen der Präzessionsfrequenz f_P und dem auf die Kreiselachse ausgeübten Kippmoment bei jeweils gleichen Rotationsfrequenzen f_R.

Aufgabe 3: Bestimmung der Nutation des Kreisels

- Untersuchen Sie den Zusammenhang zwischen der Rotationsfrequenz f_R der Kreisscheibe und der Nutationsfrequenz f_N.
- Verwenden Sie zur Berechnung der Rotationsfrequenz den Mittelwert aus der höchsten und niedrigsten Drehzahl.
- Stellen Sie die Funktion $\boldsymbol{f_N = f(f_R)}$ in einem Diagramm graphisch dar und schätzen Sie die auftretenden Abweichungen unter Verwendung festzulegender Fehlerbalken relativ ab.

Aufgabe 4: Untersuchung des Zusammenhanges Präzessionsdauer, Rotationsfrequenz und Kippmoment

- Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment J aus der Präzessionsdauer t_P und der Rotationsfrequenz f_R sowie dem auf die Kreiselachse ausgeübten Kippmoment M.

> Der Zusammenhang ist in Gleichung (5) dargestellt. Für das Kippmoment gilt:
>
> $$M = m \cdot g \cdot R \,.$$
>
> $\boldsymbol{R}$**=270 mm**, *Abstand Angriffspunkt der Massen m vom Lagerpunkt der Kreiselachse*

- Verwenden Sie die Anstiege der zum jeweiligen Gewicht gehörigen Kurve aus dem Diagramm der ***Aufgabe 2***
- Vergleichen Sie die ermittelten Massenträgheitsmomente mit dem Wert von ***Aufgabe 1*** und diskutieren Sie die Ergebnisse.

3. Ergänzung

Beispiele zur Kreiselbewegung:

Freihändiges Fahrradfahren

Der Drehimpuls der Räder hilft dem Fahrer per Drehimpulserhaltungssatz die Balance zu halten. Beim freihändig Fahren stabilisiert er die Lage des Vorderrades. Leichtes Kippen des Fahrrades (*Drehmoment* $\vec{M}$, ***Bild 4a***) lässt das Vorderrad mit $\vec{\omega}_P$ präzedieren, es dreht sich in die gewünschte Fahrtrichtung.

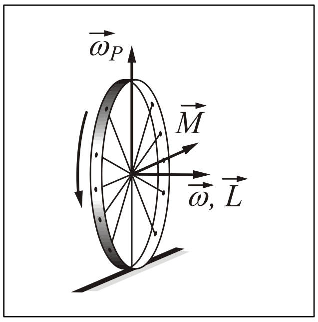

Bild 4a: Fahrrad

Erde als Kreisel

Die Erde ist ein abgeplattet-ellipsoidförmiger Körper. Sie dreht sich einmal pro Tag um sich selbst, besitzt also einen Drehimpuls $\vec{L}$, der von Süden nach Norden gerichtet ist. Da die Erdachse gegen die Ebene der Ekliptik (*Ebene der Bahnellipse*) geneigt ist, entsteht durch die Anziehungskraft der Sonne ein Drehmoment, das die Erdachse *„aufzurichten"* versucht. Die Erdkreisel-Achse weicht senkrecht zur Kraftwirkung aus und beschreibt einen Präzessionskegel mit 23,5° halbem Öffnungswinkel, der in 26.000 Jahren einmal umfahren wird.

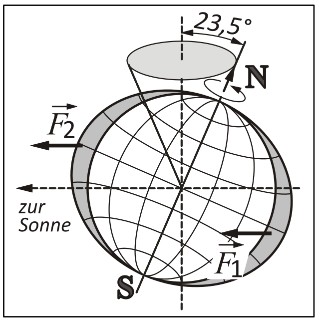

Bild 4b: Skizze zur Erde als Kreisel

Atomare Kreisel

Viele Atome besitzen einen Drehimpuls $\vec{L}$ und damit ein verknüpftes magnetisches Moment $\vec{m}$. Das magnetische Moment macht das Atom zu einer kleinen *„Magnetnadel"*, die sich in einem Magnetfeld parallel zu den Feldlinien einzustellen trachtet. Der Drehimpuls macht das Atom aber auch zu einem kleinen Kreisel – und reagiert auf die Drehmomentwirkung des äußeren Magnetfeldes mit einer Präzessionsbewegung. Das Atom präzediert mit seinem Drehimpuls um die Richtung des Feldes.

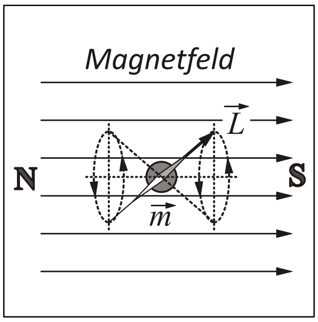

Bild 4c: Skizze zum Atomaren Kreisel