M17 Physikalisches Praktikum	Trägheitsmoment unsymmetrischer Körper	b-tu Brandenburgische Technische Universität Cottbus · Senftenberg

Da die Bestimmung von Massenträgheitsmomenten unsymmetrischer Körper aus ihren geometrischen Abmessungen und ihrer Masse oftmals schwierig ist, wird hier die Kenntnis der Schwingungseigenschaften eines Körpers um eine Körperachse genutzt (Physikalisches Pendel). Das Massenträgheitsmoment eines Pleuels wird für zwei Drehachsen durch Messung der jeweiligen Schwingungsdauer bestimmt.

1. Theoretische Grundlagen

1.1 Rotation eines Massepunktes

Ein ***Massepunkt***, der sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, besitzt bezüglich eines festen Punktes 0 den Drehimpuls

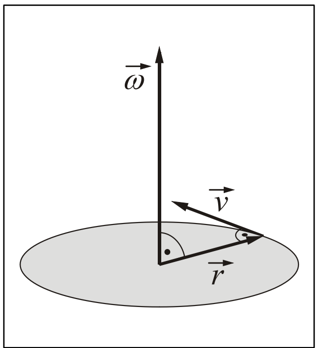

Bild 1: Zur Definition des Drehimpulses

$$\vec{L} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{r} \times \vec{p}\,. \tag{1}$$

Rotiert der Massepunkt mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ (*Drehvektor*) auf einer Kreisbahn um 0 mit dem Radius $\vec{r}$, so ist

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}\,. \tag{2}$$

Da $\vec{\omega}$ senkrecht auf $\vec{r}$ steht, gilt für den Betrag des Drehimpulses

$$L = m \cdot r \cdot \omega\,. \tag{3}$$

Die ***kinetische Energie*** des Massepunktes ist

$$E_{kin} = ½m \cdot v^2 = ½L \cdot \omega = ½m \cdot r^2 \cdot \omega^2 \tag{4}$$

Es besteht eine enge Analogie zwischen der mathematischen Beschreibung von ***Translations- und Rotationsbewegungen***. Dabei entspricht der Drehimpuls $\vec{L}$ dem Bahnimpuls $\vec{p}$ und die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ der Translationsgeschwindigkeit $\vec{v}$. Der Masse bei der Translation entspricht nach Gleichung (3) und (4) bei der Rotation die Größe

$$J = m \cdot r^2\,, \tag{5}$$

die als ***Trägheitsmoment*** des Massepunktes bzgl. der gegebenen Drehachse bezeichnet wird.

1.2 Rotation starrer Körper

Zur Beschreibung eines starren Körpers um eine beliebige Achse wählen wir den Koordinatenursprung *0* auf der Rotationsachse. Der Drehimpuls eines Massenelementes m_i des Körpers ist nach ***Bild 2***

$$\vec{L}_i = m_i \cdot (r_i \times v_i)\,. \tag{6}$$

Der Gesamtdrehimpuls ist also

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i \tag{7}$$

Bild 2 zeigt, dass die Richtungen des Drehimpulses und der Winkelgeschwindigkeit nicht übereinstimmen müssen. Der Drehimpulsvektor kann ausgedrückt werden durch

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega} \tag{8}$$

wobei man J als linearen Operator aufzufassen hat, der dem Vektor $\vec{\omega}$ einen Vektor $\vec{L}$ zuordnet. Er wird als ***Trägheitstensor*** bezeichnet.

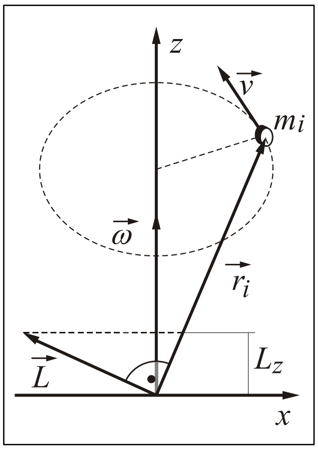

Bild 2: Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit eines Massenelementes

Dieser Trägheitstensor kann in Matrixform dargestellt werden. Setzt man nämlich Gleichungen (6) und (2) in Gleichung (7) ein, so erhält man

$$\vec{L} = \sum_i m_i \cdot \left(\vec{r_i} \times (\vec{\omega} \times \vec{r_i})\right). \tag{9}$$

Die Ausführung dieses zweifachen Kreuzproduktes liefert unter Verwendung des Entwicklungssatzes $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$

$$\begin{aligned} L_x &= J_{xx} \cdot \omega_x + J_{xy} \cdot \omega_y + J_{xz} \cdot \omega_z \\ L_y &= J_{yx} \cdot \omega_x + J_{yy} \cdot \omega_y + J_{yz} \cdot \omega_z \\ L_z &= J_{zx} \cdot \omega_x + J_{zy} \cdot \omega_y + J_{zz} \cdot \omega_z \end{aligned} \tag{10}$$

Die Diagonalelemente haben die Form

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \sum_i m_i \cdot ({r_i}^2 - {x_i}^2) = \sum_i m_i \cdot ({y_i}^2 + {z_i}^2) = \sum_i m_i \cdot {r_x}^2 \\ J_{yy} &= \sum_i m_i \cdot ({r_i}^2 - {y_i}^2) = \sum_i m_i \cdot ({x_i}^2 + {z_i}^2) = \sum_i m_i \cdot {r_y}^2 \\ J_{zz} &= \sum_i m_i \cdot ({r_i}^2 - {z_i}^2) = \sum_i m_i \cdot ({x_i}^2 + {y_i}^2) = \sum_i m_i \cdot {r_z}^2 \end{aligned} \tag{11}$$

wobei r_x, r_y, r_z die Abstände von der x-, y- bzw. z-Achse sind, während r der Abstand vom Ursprung *0* ist. Die Nichtdiagonalelemente haben folgende Form:

$$\begin{aligned} J_{xy} &= J_{yx} = \sum_i m_i \cdot x_i \cdot y_i \\ J_{xz} &= J_{zx} = \sum_i m_i \cdot x_i \cdot z_i \\ J_{yz} &= J_{zy} = \sum_i m_i \cdot y_i \cdot z_i \,. \end{aligned} \tag{12}$$

Bei Körpern der Dichte ϱ können die Summationen in Gleichung (11) und (12) durch eine Integration ersetzt werden. Für ein Diagonalelement gilt dann:

$$J_{xx} = \int_V \varrho \cdot (r^2 - x^2) \cdot \mathrm{d}V = \int_V \varrho \cdot {r_x}^2 \cdot \mathrm{d}V \,. \tag{13}$$

Jeder Körper besitzt eine Achse durch den Schwerpunkt mit maximalem und eine andere, dazu senkrechte Schwerpunktachse mit minimalem Massenträgheitsmoment. Diese beiden und die dritte, zu beiden senkrecht stehende Achse werden als Hauptträgheitsachsen bezeichnet. Sie fallen mit den eventuell vorhandenen Symmetrieachsen des betrachteten Körpers zusammen. Die zugehörigen Massenträgheitsmomente heißen Hauptträgheitsmomente J_x, J_y und J_z.
Legt man das Koordinatensystem so, dass seine Achsen mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallen, verschwinden alle Nichtdiagonalelemente von J, und Gleichung (10) vereinfacht sich zu

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix} \cdot \vec{\omega}\,. \tag{14}$$

Lässt man einen Körper um eine beliebige starre Achse rotieren, so sind im Allgemeinen alle drei Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ von 0 verschieden. Da $\vec{\omega}$ durch die starre Achse raumfest gehalten wird, rotiert das körperfeste Koordinatensystem und damit $\vec{L}$ um die starre Achse. Die zeitliche Änderung des Drehimpulses $\vec{L}$ erfordert an der Rotationsachse das Drehmoment

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\ , \tag{15}$$

das sich bei $\vec{\omega} = \mathrm{konst.}$ als *„Unwucht"* rotierender Körper äußert. Fällt jedoch die starre Achse mit einer Hauptträgheitsachse zusammen, so besitzt $\vec{\omega}$ nur eine von 0 verschiedene Komponente und nach Gleichung (14) zeigt $\vec{L}$ dann immer in Richtung der Achse. In diesem Fall verschwindet das Drehmoment auf die Achse (*bei* $\vec{\omega} = \mathrm{konst.}$), der Körper ist *„ausgewuchtet"*.

1.3 Der Satz von Steiner

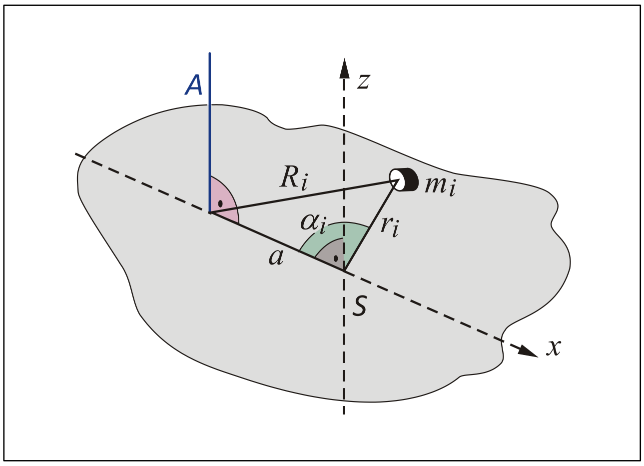

Bild 3: Trägheitsmoment für beliebige Achsen

Nach Betrachtung von Rotationsachsen durch den Schwerpunkt eines Körpers wird nun der Koordinatenursprung in den Schwerpunkt *S* des Körpers mit der Masse m gelegt und dessen Rotation um die Achse *A*, die nicht durch *S* geht, untersucht (***Bild 3***).

Das Massenträgheitsmoment bezüglich *A* ist

$$J_A = \sum_i m_i \cdot {R_i}^2. \tag{16}$$

Wegen

$${R_i}^2 = a^2 + {r_i}^2 - 2a \cdot r_i \cdot \cos\alpha_i \tag{17}$$

erhält man aus der Gleichung (16)

$$J_A = m \cdot a^2 + \sum_i m_i \cdot {r_i}^2 - 2a \cdot \sum_i m_i \cdot r_i \cdot \cos\alpha_i\,, \tag{18}$$

Der mittlere Term ist gerade das Massenträgheitsmoment J_S bezüglich der zu *A* parallelen Schwerpunktachse. Im letzten Term der Gleichung (18) sind die Produkte $r_i \cdot \cos\alpha_i$ die Projektionen der Ortsvektoren auf die x-Achse. Der Term verschwindet, denn

$$\sum_i m_i \cdot r_i \cdot \cos\alpha_i = \sum_i m_i \cdot x_i = m \cdot x_S \tag{19}$$

x_S ist aber gerade die x-Koordinate des Schwerpunktes, der im Koordinatenursprung liegt. Für das Trägheitsmoment um eine beliebige Achse *A* ergibt sich somit aus Gleichung (18) der ***Satz von Steiner***:

$$\boxed{J_A = J_S + m \cdot a^2} \tag{20}$$

wobei J_S das Massenträgheitsmoment um die zu *A* parallele Schwerpunktachse ist.

1.4 Physikalisches und mathematisches Pendel

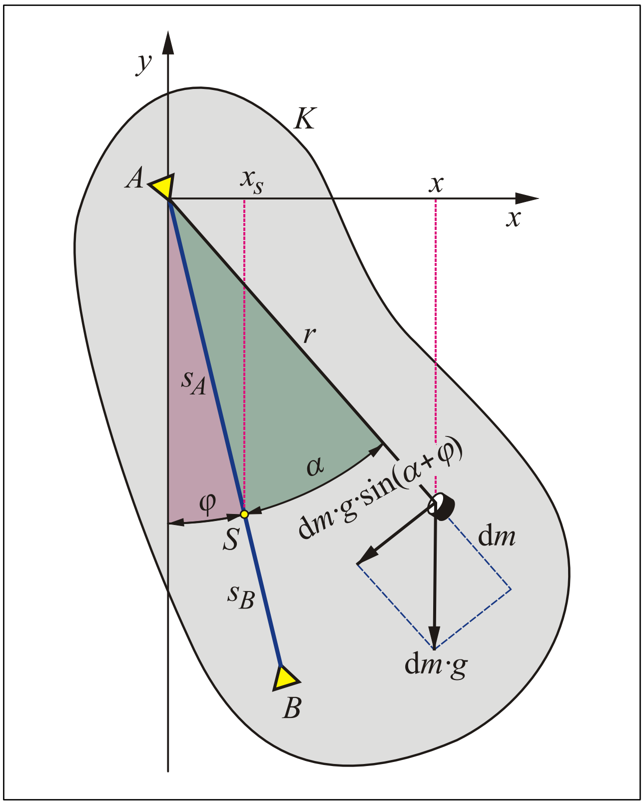

Bild 4: Physikalisches Pendel

Ein physikalisches Pendel ist ein starrer Körper mit einer im Allgemeinen horizontalen, fest vorgegebenen Drehachse, die nicht durch den Massenmittelpunkt des Körpers geht. Nach einer Auslenkung führt das Pendel unter Einfluss der Schwerkraft Schwingungen um seine Ruhelage aus. In den folgenden Überlegungen wird vorausgesetzt, dass die Reibung im Achsenlager vernachlässigbar klein ist.

Der senkrechte Abstand des Massenmittelpunktes S eines Körpers K von der Drehachse A soll mit s_A bezeichnet werden (*vgl. **Bild 4***). Ein beliebiges Massenelement $\mathrm{d}m$ habe den senkrechten Abstand r von der Achse A. Der zeitlich konstante Winkel zwischen r und s_A sei α. Bildet s_A mit der Vertikalen den Winkel φ, so lautet die Bewegungsgleichung (21) für das Massenelement

$$\mathrm{d}m \cdot r \cdot \ddot{\varphi} = -\mathrm{d}m \cdot g \cdot \sin(\alpha + \varphi)$$

Durch Multiplikation der Gleichung (21) mit dem Kraftarm r und anschließender Integration über den gesamten Körper K erhält man die Drehmomentgleichung

$$\int_m \ddot{\varphi} \cdot r^2 \cdot \mathrm{d}m = -g \cdot \int_m r \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \mathrm{d}m \qquad (22)$$

Da der Körper starr sein soll, ist die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ für alle Massenelemente gleich und kann vor das Integral geschrieben werden. Mit der Gleichung (16) kann man dann schreiben

$$\ddot{\varphi} \cdot \int_m r^2 \cdot \mathrm{d}m = \ddot{\varphi} \cdot J_A \qquad (23)$$

und nach der Definition des Massenmittelpunktes gilt

$$\int_m r \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot \mathrm{d}m = \int_m x \cdot \mathrm{d}m = m \cdot s_A \cdot \sin\varphi\ . \qquad (24)$$

m: *Masse des Pendels*

Mit den Gleichungen (23) und (24) kann man schreiben:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{m \cdot s_A \cdot g}{J_A} \cdot \sin\varphi\ . \qquad (25)$$

Die Größe

$$D_A = m \cdot s_A \cdot g \qquad (26)$$

hat die Dimension eines Drehmoments und wird als Direktionsmoment des Pendels bezeichnet.

Das mathematische Pendel stellt eine Idealisierung dar. Man denkt sich die gesamte Masse im Massenmittelpunkt S vereinigt und sieht die Bindung an die Drehachse A als masselos an. Dieser Idealisierung entspricht näherungsweise das Fadenpendel, das aus einer Metallkugel besteht, die an einem dünnen Faden der Länge l aufgehängt ist. Die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels lautet

$$m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \cdot \sin \varphi \qquad \text{oder} \qquad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \cdot \sin \varphi \tag{27}$$

Die Gleichungen (25) und (27), deren Lösung elementar nicht möglich ist, vereinfachen sich, wenn man nur sehr kleine Auslenkungen $|\varphi| \ll 1$ zulässt. Dann kann man den Sinus durch das Argument ersetzen und erhält

$$\ddot{\varphi} = -\frac{m \cdot s_A \cdot g}{J_A} \cdot \varphi \tag{25a}$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \cdot \varphi \tag{27a}$$

Die Bewegungsgleichungen (25a) und (27a) sind vom Typ

$$\ddot{\varphi} = -{\omega_0}^2 \cdot \varphi \tag{28}$$

Gleichung (28) sagt aus: Es wird eine Funktion gesucht, die ihrer zweiten Ableitung nach der Zeit proportional ist. Da die Gleichung (28) durch zwei nacheinander auszuführende Integrationen gelöst wird, muss die vollständige mathematische Lösung zwei Integrationskonstanten enthalten.

Die Funktion

$$\varphi = c_1 \cdot \cos \omega_0 \cdot t + c_2 \cdot \sin \omega_0 \cdot t \tag{29}$$

erfüllt die genannten Forderungen. Die Konstanten c_1 und c_2 sind aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen. Dem Versuchsbeginn entsprechen: $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = 0$ für $t = 0$.

Damit lautet (29):

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos \omega_0 \cdot t = \varphi_0 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right) \tag{29a}$$

T ist die Schwingungsdauer bei sehr kleinen Auslenkungen.

Wenn man die Schwingungsdauer stoppen will, wählt man dagegen den Augenblick als Anfang der Zeitmessung, in dem das Pendel die maximale Geschwindigkeit hat, das heißt, es ist $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = \varphi_{max}$ für $t = 0$. Dann ist

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_{max}}{\omega_0} \cdot \sin \omega_0 \cdot t = \varphi_0 \cdot \sin \omega_0 \cdot t = \varphi_0 \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right) \tag{29b}$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (29a) oder (29b) in (25a) bzw. (27a) findet man

für das Fadenpendel

$$\boxed{T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}} \tag{30}$$

für das physikalische Pendel

$$\boxed{T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_A}{m \cdot s_A \cdot g}}} \tag{31}$$

1.5 Massenträgheitsmoment für einen Pleuel

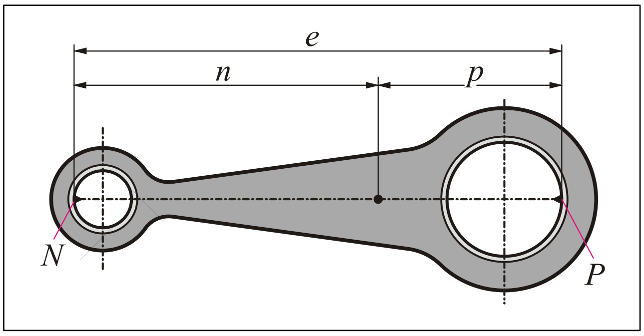

Bild 5**:** Darstellung eines Pleuels mit Bezeichnungen

Für einen Pleuel mit dem in ***Bild 5*** verwendeten Benennungen ergibt sich für das Massenträgheitsmoment in Bezug auf die Schwerpunktachse:

$$J_{S(P)} = m \cdot p \cdot \left(\frac{{T_P}^2 \cdot g}{4\pi^2} - p \right) \qquad (32a)$$

$$J_{S(N)} = m \cdot p \cdot \left(\frac{{T_N}^2 \cdot g}{4\pi^2} - n \right) \qquad (32b)$$

Dabei werden die Schwingungen um die Aufhängepunkte P und N betrachtet.

Durch Gleichsetzen der Beziehungen $J_{S(P)}$ und $J_{S(N)}$ und Verwendung von $p + n = e$ können die Abstände p und n und damit die Lage des Schwerpunktes bestimmt werden.

2.Versuch

2.1 Vorbetrachtung

Aufgabe: Leiten Sie die Gleichungen (32a) und (32b) eigenständig unter Verwendung der Gleichungen (20) und (31) her.

2.2 Versuchsdurchführung

2.2.1 Verwendete Geräte

Pleuel, Stoppuhr, Fadenpendel, Messstab, Waage

2.2.2 Versuchshinweise

Aufgabe 1: Bestimmung des Trägheitsmomentes J_S eines Pleuels durch Messung der Schwingungsdauer T_P und T_N

- Bestimmen Sie die Pleuelmasse m und ermitteln Sie den Abstand e.
- Hängen Sie das Pleuel am ***Punkt P*** auf.
- Der Auslenkwinkel φ ist dabei **<5°**.
- Messen Sie ***10-mal*** die Zeit für ***20 Schwingungen***.
- Errechnen Sie daraus die Schwingungsdauer T_P.
- Hängen Sie das Pleuel im ***Punkt N*** auf und ermitteln Sie die Schwingungsdauer T_N in gleicher Weise.

- Messen Sie die Abstände für p und n durch eine Schwerpunktbestimmung über der Schneide.

Aufgabe 2: Bestimmung der Schwingungsdauer T durch Auspendeln des Pleuels

- Messen Sie die Pendellänge l.
- Bestimmen Sie die Schwingungsdauer T.
- Messen Sie ***10-mal*** die Zeit t für ***20 Schwingungen*** und berechnen Sie daraus die Schwingungsdauer T.

2.3 Versuchsauswertung

Aufgabe 1: Bestimmung des Massenträgheitsmomentes J_S eines Pleuels durch Messung der Schwingungsdauer T_P und T_N

- Berechnen Sie aus den Messwerten die Mittelwerte der Schwingungsdauern T_P und T_N sowie die Messabweichungen aus den Summen der systematischen und zufälligen Fehler (*Mittelwert, Standardabweichung, t-Verteilung*).

- Berechnen Sie die Abstände p und n nach einer ***selbst zu entwickelnder Gleichung.***
- Führen Sie eine Fehlerrechnung durch und geben Sie die Messunsicherheiten an.

Hinweis: *Für die Berechnungen zur Bestimmung der Messunsicherheit ist es günstig, bei den auftretenden Brüchen Zähler und Nenner getrennt unter Verwendung des vollständigen Differentials zu behandeln und erst dann das Ergebnis zusammen zu führen.*

- Vergleichen Sie die berechneten Werte für p, n und e mit den gemessenen Werten.
- Überprüfen Sie, ob die Bedingung $p + n = e$ erfüllt ist.
- Diskutieren Sie die Ergebnisse.

- Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment $J_{S(P)}$ und $J_{S(N)}$.
- Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment J_S einschließlich der Messunsicherheit durch Fehlerrechnung und weisen Sie nach, dass folgende Bedingung gilt:

$$J_S = J_{S(P)} = J_{S(N)}.$$

Aufgabe 2: Bestimmung der Schwingungsdauer T durch Auspendeln des Pleuels

- Berechnen Sie aus den Messwerten den Mittelwert der Schwingungsdauer T und die Messabweichung aus der Summe des systematischen und des zufälligen Fehlers (*Mittelwert, Standardabweichung, t-Verteilung*).
- Vergleichen und diskutieren Sie die Ergebnisse mit dem theoretisch zu erwartenden Wert entsprechend der Gleichung (30).