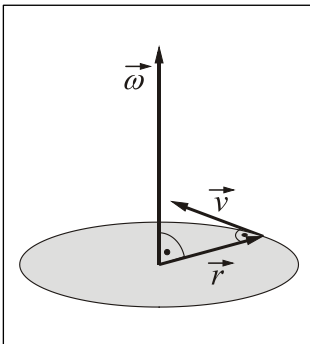


Das Hauptträgheitsmoment eines starren Körpers (Quader) soll nach verschiedenen Messverfahren bestimmt werden. Die Messunsicherheiten der unterschiedlichen Methoden sind dabei zu vergleichen.

## 1. Theoretische Grundlagen

### 1.1 Rotation eines Massepunktes

Ein **Massepunkt**, der sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt, besitzt bezüglich eines festen Punktes 0 den Drehimpuls



**Bild 1:** Definition des Drehimpulses

$$\vec{L} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (1)$$

Rotiert der Massenpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  (Drehvektor) auf einer Kreisbahn um 0 mit Radius  $\vec{r}$ , so ist

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2)$$

Da  $\vec{\omega}$  senkrecht auf  $\vec{r}$  steht, gilt für den Betrag des Drehimpulses

$$L = m \cdot r \cdot \omega. \quad (3)$$

Die **kinetische Energie** des Massenpunktes ist

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} L \cdot \omega = \frac{1}{2} m \cdot r^2 \cdot \omega^2 \quad (4)$$

Es besteht eine enge Analogie zwischen der mathematischen Beschreibung von **Translations- und Rotationsbewegungen**. Dabei entspricht der Drehimpuls  $\vec{L}$  dem Bahnimpuls  $\vec{p}$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  der Translationsgeschwindigkeit  $\vec{v}$ . Der Masse bei der Translation entspricht nach Gleichung (3) und (4) bei der Rotation die Größe

$$J = m \cdot r^2, \quad (5)$$

die als **Trägheitsmoment** des Massepunktes bzgl. der gegebenen Drehachse bezeichnet wird.

### 1.2 Rotation starrer Körper

Zur Beschreibung eines starren Körpers um eine beliebige Achse wählen wir den Koordinatenursprung 0 auf der Rotationsachse. Der Drehimpuls eines Massenelementes  $m_i$  des Körpers ist nach **Bild 2**

$$\vec{L}_i = m_i \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i). \quad (6)$$

Der Gesamtdrehimpuls ist also

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i \quad (7)$$

**Bild 2** zeigt, dass die Richtungen des Drehimpulses und der Winkelgeschwindigkeit nicht übereinstimmen müssen. Der Drehimpulsvektor kann ausgedrückt werden durch

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega} \quad (8)$$

wobei man  $J$  als linearen Operator aufzufassen hat, der dem Vektor  $\vec{\omega}$  einen Vektor  $\vec{L}$  zuordnet. Er wird als **Trägheitstensor** bezeichnet.

Dieser Trägheitstensor kann in Matrixform dargestellt werden. Setzt man nämlich Gleichung (6) und (2) in Gleichung (7) ein, so erhält man

$$\vec{L} = \sum_i m_i \cdot (\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)). \quad (9)$$

Die Ausführung dieses zweifachen Kreuzproduktes liefert unter Verwendung des Entwicklungssatzes  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\begin{aligned} L_x &= J_{xx} \cdot \omega_x + J_{xy} \cdot \omega_y + J_{xz} \cdot \omega_z \\ L_y &= J_{yx} \cdot \omega_x + J_{yy} \cdot \omega_y + J_{yz} \cdot \omega_z \\ L_z &= J_{zx} \cdot \omega_x + J_{zy} \cdot \omega_y + J_{zz} \cdot \omega_z \end{aligned} \quad (10)$$

Die Diagonalelemente haben die Form

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \sum_i m_i \cdot (r_i^2 - x_i^2) = \sum_i m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2) = \sum_i m_i \cdot r_x^2 \\ J_{yy} &= \sum_i m_i \cdot (r_i^2 - y_i^2) = \sum_i m_i \cdot (x_i^2 + z_i^2) = \sum_i m_i \cdot r_y^2 \\ J_{zz} &= \sum_i m_i \cdot (r_i^2 - z_i^2) = \sum_i m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i \cdot r_z^2 \end{aligned} \quad (11)$$

wobei  $r_x, r_y, r_z$  die Abstände von der  $x$ -,  $y$ - bzw.  $z$ -Achse sind, während  $r$  der Abstand vom Ursprung  $O$  ist. Die Nichtdiagonalelemente haben folgende Form:

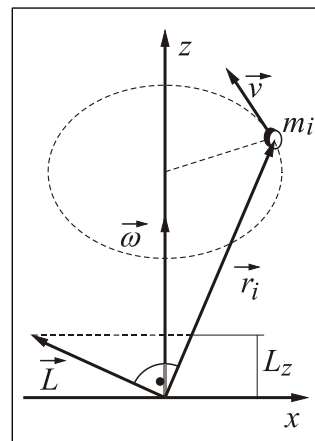
$$\begin{aligned} J_{xy} &= J_{yx} = \sum_i m_i \cdot x_i \cdot y_i \\ J_{xz} &= J_{zx} = \sum_i m_i \cdot x_i \cdot z_i \\ J_{yz} &= J_{zy} = \sum_i m_i \cdot y_i \cdot z_i. \end{aligned} \quad (12)$$

Bei Körpern der Dichte  $\rho$  können die Summationen in Gleichung (11) und (12) durch eine Integration ersetzt werden. Für ein Diagonalelement gilt dann:

$$J_{xx} = \int_V \rho \cdot (r^2 - x^2) \cdot dV = \int_V \rho \cdot r_x^2 \cdot dV. \quad (13)$$

Jeder Körper besitzt eine Achse durch den Schwerpunkt mit maximalem und eine andere, dazu senkrechte Schwerpunktsachse mit minimalem Massenträgheitsmoment. Diese beiden und die dritte, zu beiden senkrecht stehende Achse werden als Hauptträgheitsachsen bezeichnet. Sie fallen mit den eventuell vorhandenen Symmetrieachsen des betrachteten Körpers zusammen. Die zugehörigen Massenträgheitsmomente heißen Hauptträgheitsmomente  $J_x, J_y$  und  $J_z$ .

Legt man das Koordinatensystem so, dass seine Achsen mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallen, verschwinden alle Nichtdiagonalelemente von  $J$ , und Gleichung (10) vereinfacht sich zu



**Bild 2:** Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit eines Massenelementes

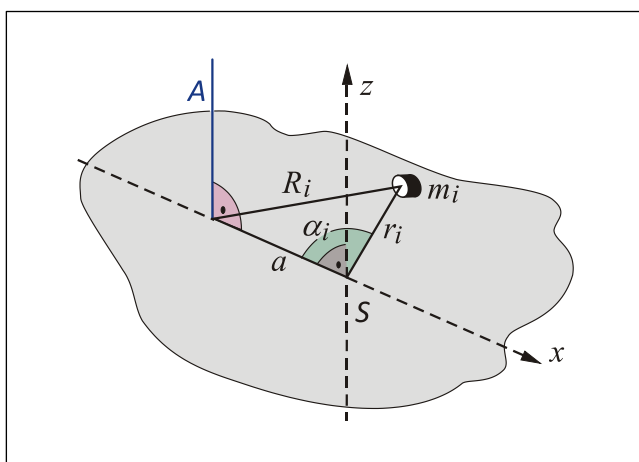
$$\vec{L} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix} \cdot \vec{\omega}. \quad (14)$$

Lässt man einen Körper um eine beliebige starre Achse rotieren, so sind im Allgemeinen alle drei Komponenten der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  von 0 verschieden. Da  $\vec{\omega}$  durch die starre Achse raumfest gehalten wird, rotiert das körperfeste Koordinatensystem und damit  $\vec{L}$  um die starre Achse. Die zeitliche Änderung des Drehimpulses  $\vec{L}$  erfordert an der Rotationsachse das Drehmoment

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad (15)$$

das sich bei  $\vec{\omega} = \text{konst.}$  als „Unwucht“ rotierender Körper äußert. Fällt jedoch die starre Achse mit einer Hauptträgheitsachse zusammen, so besitzt  $\vec{\omega}$  nur eine von 0 verschiedene Komponente und nach Gleichung (14) zeigt  $\vec{L}$  dann immer in Richtung der Achse. In diesem Fall verschwindet das Drehmoment auf die Achse (bei  $\vec{\omega} = \text{konst.}$ ), der Körper ist „ausgewuchtet“.

### 1.3 Der Satz von Steiner



**Bild 3:** Trägheitsmoment für beliebige Achsen

Nach Betrachtung von Rotationsachsen durch den Schwerpunkt eines Körpers wird nun der Koordinatenursprung in den Schwerpunkt S des Körpers mit der Masse  $m$  gelegt und dessen Rotation um die Achse A, die nicht durch S geht, untersucht (**Bild 3**).

Das Massenträgheitsmoment bezüglich A ist

$$J_A = \sum_i m_i \cdot R_i^2. \quad (16)$$

Wegen

$$R_i^2 = a^2 + r_i^2 - 2a \cdot r_i \cdot \cos \alpha_i \quad (17)$$

erhält man aus der Gleichung (16)

$$J_A = m \cdot a^2 + \sum_i m_i \cdot r_i^2 - 2a \cdot \sum_i m_i \cdot r_i \cdot \cos \alpha_i, \quad (18)$$

Der mittlere Term ist gerade das Massenträgheitsmoment  $J_S$  bezüglich der zu A parallelen Schwerpunktsachse. Im letzten Term der Gleichung (18) sind die Produkte  $r_i \cdot \cos \alpha_i$  die Projektionen der Ortsvektoren auf die x-Achse. Der Term verschwindet, denn

$$\sum_i m_i \cdot r_i \cdot \cos \alpha_i = \sum_i m_i \cdot x_i = m \cdot x_S \quad (19)$$

$x_S$  ist aber gerade die x-Koordinate des Schwerpunktes, der im Koordinatenursprung liegt. Für das Trägheitsmoment um eine beliebige Achse A ergibt sich somit aus Gleichung (18) der **Satz von Steiner**:

$$J_A = J_S + m \cdot a^2 \quad (20)$$

wobei  $J_S$  das Massenträgheitsmoment um die zu A parallele Schwerpunktsachse ist.

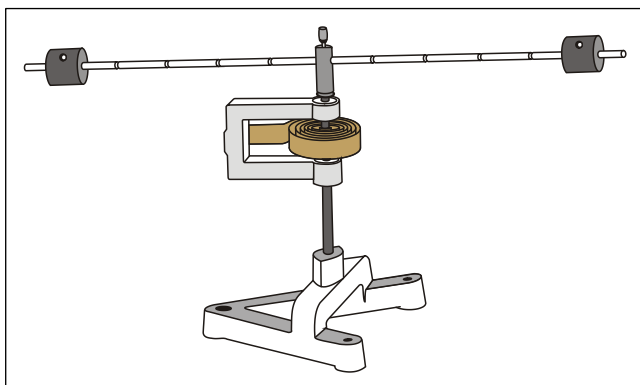
## 1.4 Experimentelle Bestimmung von Massenträgheitsmomenten

### 1.4.1 Verwendung der Drillachse

Zur Messung von Massenträgheitsmomenten kann man eine Torsionsfeder verwenden, die beim Auslenken des Körpers aus der Ruhelage ein zum Auslenkwinkel proportionales Drehmoment

$$M = -D \cdot \varphi \quad (21)$$

erzeugt. Der Faktor  $D$  wird als zur Torsionsfeder gehöriges **Direktionsmoment** (auch *Direktionskonstante, Richtkonstante oder Federkonstante*) bezeichnet.



**Bild 4:** Drillachse mit montiertem horizontalen Stab

Die entstehende Schwingung hat die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D}} \quad (22)$$

Das Direktionsmoment  $D$  kann bestimmt werden nach dem Hookeschen Gesetz (*Gleichung (21)*) oder mit der Gleichung (22) durch Messung der Schwingungsdauer  $T$  eines Körpers bei bekanntem Massenträgheitsmoment  $J$ .

### 1.4.2 Bestimmung nach dem Energieerhaltungssatz

Zur Bestimmung des Massenträgheitsmomentes nach dem Energieerhaltungssatz wird derselbe Körper auf dem kugelgelagerten Zylinder angebracht. Die beiden über eine Rolle geführten Fäden mit angehängten Gewichtsstücken werden aufgewickelt. Wird der Körper danach freigegeben, führen die Gewichtsstücke eine gleichmäßig beschleunigte Translationsbewegung und der Körper eine gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung aus. In der Zeit  $t$  bewegen sich die Gewichtsstücke  $m_{ges} = m_1 + m_2$  um die Strecke  $h$  abwärts und setzen die potentielle Energie

$$E_{pot} = m_{ges} \cdot g \cdot h \quad (23)$$

in die kinetische Energie der Gewichtsstücke

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_{ges} \cdot v^2 \quad (24)$$

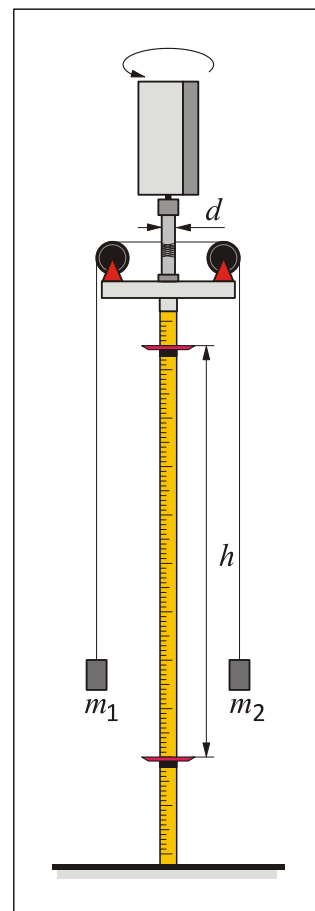
und in Rotationsenergie des rotierenden Körpers um

$$E_{rot} = \frac{1}{2} J_S \cdot \omega^2 \quad (25)$$

Der Energiesatz ohne Berücksichtigung der auftretenden Reibung lautet

$$E_{pot} = E_{kin} + E_{rot} \quad (26)$$

In nachstehender Gleichung sind  $m_{ges}$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $r$ ,  $t$  bekannt bzw. werden gemessen. Die Endgeschwindigkeit  $v$  der Gewichtsstücke ist gleich der Umlaufgeschwindigkeit der Trommel nach der Zeit  $\Delta t$ .



**Bild 5:** Versuchsanordnung nach Energieerhaltungssatz

Mit diesen Messgrößen ergibt sich:

$$J_S = m_{ges} \cdot r^2 \cdot \left( \frac{g \cdot t^2}{2 \cdot h} - 1 \right) \quad (27)$$

## 2. Versuch

### 2.1 Versuchsvorbereitung

**Aufgabe 1:** Leiten Sie in der Versuchsvorbereitung die Gleichung (27) aus dem Energieerhaltungssatz (Gleichung (26)) her und überprüfen Sie das Ergebnis durch Herleitung aus dem dynamischen Grundgesetz der Rotation  $M = J \cdot \alpha$  (Steinerschen Satz  $J = J_S + m \cdot r^2$  verwenden).

**Aufgabe 2:** Warum ist das Massenträgheitsmoment bezüglich einer Schwerpunktsachse immer kleiner als das für eine parallele Achse, die nicht durch den Schwerpunkt geht?

### 2.2 Versuchsdurchführung

#### 2.2.1 Verwendete Geräte

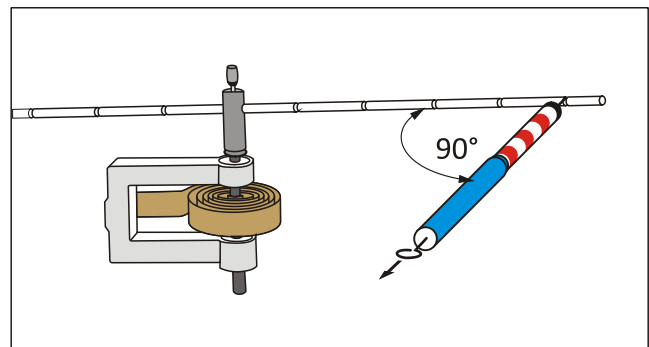
Drillachse, Federkraftmesser, starrer Körper (Quader), Laborwaage (Messtisch), Messschieber, Bügelmessschraube, Stoppuhr, Versuchsanordnung zum Energiesatz

#### 2.2.2 Versuchshinweise

**Aufgabe 1:** Bestimmung des Direktionsmomentes  $D$  der Torsionsfeder

a) nach dem Hookeschen Gesetz (siehe **Bild 6**)

- Ermitteln Sie mit Hilfe eines Federkraftmessers die Kraft  $F$  für zwei unterschiedliche Hebelarmlängen  $r$ .
- Befestigen Sie zunächst den Stab mittig auf der Drillachse und den Federkraftmesser am Ende des Stabes (kleines Loch nutzen).
- Lenken Sie die Drillachse mit dem Federkraftmesser um  $\varphi = \pi \dots 3\pi$  in  $\frac{1}{2} \pi$ -Schritten aus.
- Bestimmen Sie den Radius  $r_1$ .
- Beachten Sie, dass  $r_2$  größer sein sollte als  $r_1$ . (Kraftübertragung sonst zu groß)



**Bild 6:** Aufbau Drillachse mit Stab

b) nach der Schwingungsmethode

- Bestimmen Sie die Masse  $m$  (Oberschalenwaage am Wägetisch) und die geometrischen Abmessungen des Stabes. Befestigen Sie den Stab mittig auf der Drillachse.
- Bestimmen Sie die Schwingungsdauer  $T$  für **10 Schwingungen** mit der Stoppuhr.
- Führen Sie die Messung **5-mal** durch.

**Aufgabe 2:** Bestimmung der Massenträgheitsmomente (achsenbezogen) eines Quaders nach der Masse  $m$  bzw. den geometrischen Abmessungen  $x, y, z$

- Legen Sie selbständig die Seiten des Quaders ( $x, y, z$ ) fest (wichtig für die **Aufgaben 3 und 4**).
- Bestimmen Sie die **3 Kantenlängen** des Quaders mit Hilfe eines Messschiebers.
- Ermitteln Sie die Masse  $m$  des Quaders (Laborwaage am Wägetisch).

**Aufgabe 3:** Bestimmung der Massenträgheitsmomente (*achsenbezogen*) eines Quaders mit der Schwingungsmethode

- Befestigen Sie den Quader mit der jeweiligen Drehachse auf der Drillachse.
- Bestimmen Sie die Schwingungsdauer  $T$  für **10 Schwingungen** mit der Stoppuhr.
- Führen Sie die Messung **10-mal** durch.

**Aufgabe 4:** Bestimmung der Massenträgheitsmomente (*achsenbezogen*) eines Quaders aus dem Energieerhaltungssatz

- Bestimmen Sie den Durchmesser  $d$  der Zylinderwelle mittels einer Bügelmessschraube.
- Legen Sie die Fallstrecke  $h$  fest (*Bezugspunkt ist Unterkante des rechten Gewichtsstücks*).
- Stecken Sie den Quader mit der jeweiligen Achse auf. Rollen Sie die Sehne auf die Zylinderwelle und messen Sie beim Loslassen die Zeit  $t$  für das Durchlaufen der Fallstrecke mit der Stoppuhr.
- Wiederholen Sie ebenfalls die Messung **10-mal** für jede Achse.

## 2.3 Versuchsauswertung

**Aufgabe 1:** Bestimmung des Direktionsmomentes  $D$  einer Torsionsfeder nach dem Hookeschen Gesetz sowie nach der Schwingungsmethode

- Bestimmen Sie die Direktionsmomente  $D_1$  und  $D_2$  beider Radien  $r$  aus den Anstiegen der graphischen Darstellung  $F = f(\varphi)$  ( $\varphi$  in **Bogenmaß verwenden!**) und ermitteln Sie durch Einzeichnen der Fehlerbalken die entstandene relative Messunsicherheit.
- Leiten Sie eigenständig die zur Berechnung des Direktionsmomentes benötigte Bestimmungsgleichung aus der Gleichung (21) her.
- Bestimmen Sie das benötigte Massenträgheitsmoment  $J$  des Stabes nach **Abschnitt 3** aus der Masse  $m$  und den geometrischen Abmessungen und ermitteln Sie die Messunsicherheit durch eine Fehlerrechnung (*absolut und relativ*).
- Berechnen Sie das Direktionsmoment  $D_3$  nach Gleichung (22) unter Verwendung des Mittelwertes der Schwingungsdauer  $T$  und bestimmen Sie die Messabweichung aus der Summe des systematischen bzw. des zufälligen Fehlers (*Mittelwert, Standardabweichung,  $t$ -Verteilung*).
- Vergleichen Sie beide Messmethoden miteinander hinsichtlich ihrer Messunsicherheiten.

**Wichtig:**

Bestimmen Sie aus den **drei** Direktionsmomenten der beiden Messmethoden den „**gewichteten Mittelwert**“ des Direktionsmomentes  $\bar{D}$  (siehe **Abschnitt 4.4** „Einführung in das Physikalische Praktikum“) und verwenden Sie **diesen** für die weiteren Aufgaben.

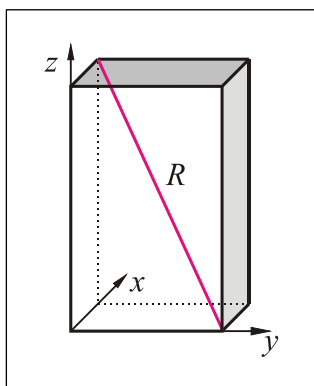
**Aufgabe 2:** Bestimmung der Massenträgheitsmomente (*achsenbezogen*) eines Quaders nach der Masse  $m$  bzw. den geometrischen Abmessungen  $x, y, z$

- Bestimmen Sie die Massenträgheitsmomente  $J_x, J_y, J_z$  der Hauptträgheitsachsen aus den geometrischen Abmessungen und der Masse des Quaders sowie deren Messunsicherheiten.
- Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment  $J_R$  der Raumdiagonalachse  $R$  aus den Hauptträgheitsmomenten und ermitteln Sie die Messunsicherheit durch Fehlerrechnung (*absolut und relativ*).
- Benutzen Sie zur Berechnung die gemessenen Kantenlängen des Quaders.

**Bestimmung des Trägheitsmomentes der Raumdiagonalachse  $R$  aus den Hauptträgheitsmomenten**

Die Grundvoraussetzung hierfür ist, dass die Rotationsachse durch den Schwerpunkt verläuft. Das Massenträgheitsmoment  $J_R$  bezüglich der Raumachse  $R$  ergibt sich aus der Überlegung, dass der Wert der Rotationsenergie  $E_{rot}$  unabhängig vom Koordinatensystem sein muss, in dem die Drehbewegung beschrieben wird. Im Koordinatensystem, das durch die Hauptträgheitsachsen vorgegeben ist, ergibt sich mit der Gleichung (14):

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} (J_x \cdot \omega_x^2 + J_y \cdot \omega_y^2 + J_z \cdot \omega_z^2). \quad (28)$$



Liegt  $\vec{\omega}$  in Richtung der Raumdiagonalen, so werden seine Komponenten als Betrag  $\omega$  (siehe **Bild 7**) betrachtet:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega \cdot \cos \alpha \\ \omega_y &= \omega \cdot \cos \beta \\ \omega_z &= \omega \cdot \cos \gamma \end{aligned} \quad (29)$$

Andererseits ist auch:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} J_R \cdot \omega^2 \quad (30)$$

**Bild 7:** Richtungsfestlegung

Durch Gleichsetzen der Gleichungen (28) und (30) und unter Verwendung der Gleichung (29) ergibt sich:

$$\frac{1}{2} (J_x \cdot \cos^2 \alpha + J_y \cdot \cos^2 \beta + J_z \cdot \cos^2 \gamma) \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} J_R \cdot \omega^2$$

Also lautet der gesuchte Zusammenhang:

$$J_R = J_x \cdot \cos^2 \alpha + J_y \cdot \cos^2 \beta + J_z \cdot \cos^2 \gamma \quad (31)$$

**Aufgabe 3:** Bestimmung der Massenträgheitsmomente (*achsenbezogen*) eines Quaders mit der Schwingungsmethode

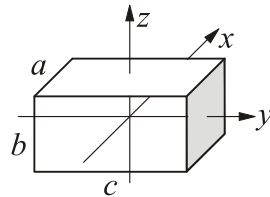
- Berechnen Sie die Massenträgheitsmomente nach Gleichung (22) unter Verwendung der Mittelwerte der Schwingungsdauer  $T$  und ermitteln Sie die entsprechenden Fehler.
- Bestimmen Sie das Trägheitsmoment  $J_R$  der Raumdiagonalachse  $R$  aus den Hauptträgheitsmomenten und bestimmen Sie die Messunsicherheit durch Fehlerrechnung (*absolut und relativ*).
- Benutzen Sie zur Berechnung die in **Aufgabe 2** ermittelten Kantenlängen des Quaders.

**Aufgabe 4:** Bestimmung der Massenträgheitsmomente (*achsenbezogen*) eines Quaders aus dem Energieerhaltungssatz

- Berechnen Sie die Mittelwerte der Zeit  $t$  und bestimmen Sie die Messunsicherheiten aus der Summe der systematischen bzw. der zufälligen Fehler (*Mittelwert, Standardabweichung,  $t$ -Verteilung*).
- Ermitteln Sie die Massenträgheitsmomente der **3 Achsen** dieser Methode (*geg.:  $m_{ges} = (199 \pm 1) \text{ g}$* ) und geben Sie die Messunsicherheit durch Fehlerrechnung (*absolut und relativ*) an.
- Bestimmen Sie das Trägheitsmoment  $J_R$  der Raumdiagonalachse  $R$  aus den Hauptträgheitsmomenten und ermitteln Sie die Messunsicherheit durch Fehlerrechnung (*absolut und relativ*).
- Benutzen Sie zur Berechnung die in **Aufgabe 2** ermittelten Kantenlängen des Quaders.

**Aufgabe 5:** Methodenvergleich

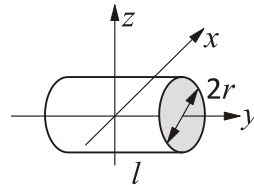
- Führen Sie einen tabellarischen Vergleich aller **3 Messmethoden** hinsichtlich der Massenträgheitsmomente  $J_R$  und deren Abweichungen (*Geometrie-Masse-, Schwingungs- und Fallbeschleunigungsmethode*) durch und bewerten Sie die Ergebnisse.

**3. Ergänzung****Massenträgheitsmomente einiger einfacher Körper (*schwerpunktbezogen*)****Quader**

$$J_x = \frac{1}{12} m \cdot (b^2 + c^2)$$

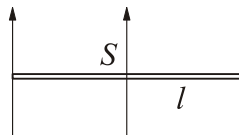
$$J_y = \frac{1}{12} m \cdot (a^2 + b^2)$$

$$J_z = \frac{1}{12} m \cdot (a^2 + c^2)$$

**Vollzylinder**

$$J_y = \frac{1}{2} m \cdot r^2$$

$$J_z = \frac{1}{12} m \cdot (3r^2 + l^2)$$

**langer dünner Stab**

$$J_S = \frac{1}{12} m \cdot l^2$$

$$J_l = \frac{1}{3} m \cdot l^2$$