M15 Physikalisches Praktikum	Massenträgheitsmomente und Drehschwingungen	b-tu Brandenburgische Technische Universität Cottbus · Senftenberg

Das Massenträgheitsmoment unterschiedlicher starrer Körper soll nach der Schwingungsmethode gemessen werden. Die Ergebnisse sind mit den aus Geometrie und Masse berechneten Werten zu vergleichen. Der Steinersche Satz soll bestätigt werden.

1. Theoretische Grundlagen

1.1 Rotation eines Massepunktes

Ein ***Massepunkt***, der sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, besitzt bezüglich eines festen Punktes 0 den Drehimpuls

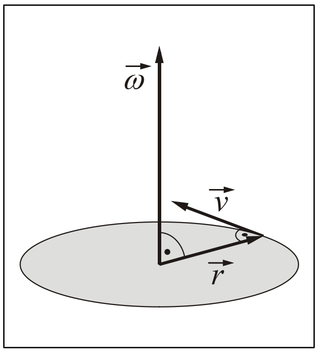


Bild 1: Zur Definition des Drehimpulses

$$\vec{L} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{r} \times \vec{p}\,. \qquad (1)$$

Rotiert der Massenpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ (*Drehvektor*) auf einer Kreisbahn um 0 mit Radius $\vec{r}$, so ist

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}\,. \qquad (2)$$

Da $\vec{\omega}$ senkrecht auf $\vec{r}$ steht, gilt für den Betrag des Drehimpulses

$$L = m \cdot r \cdot \omega\,. \qquad (3)$$

Die ***kinetische Energie*** des Massenpunktes ist

$$E_{kin} = ½m \cdot v^2 = ½L \cdot \omega = ½m \cdot r^2 \cdot \omega^2 \qquad (4)$$

Es besteht eine enge Analogie zwischen der mathematischen Beschreibung von ***Translations- und Rotationsbewegungen***. Dabei entspricht der Drehimpuls $\vec{L}$ dem Bahnimpuls $\vec{p}$ und die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ der Translationsgeschwindigkeit $\vec{v}$. Der Masse bei der Translation entspricht nach Gleichung (3) und (4) bei der Rotation die Größe

$$J = m \cdot r^2\,, \qquad (5)$$

die als ***Trägheitsmoment*** des Massepunktes bzgl. der gegebenen Drehachse bezeichnet wird.

1.2 Rotation starrer Körper

Zur Beschreibung eines starren Körpers um eine beliebige Achse wählen wir den Koordinatenursprung *0* auf der Rotationsachse. Der Drehimpuls eines Massenelementes m_i des Körpers ist nach ***Bild 2***

$$\vec{L}_i = m_i \cdot (r_i \times v_i)\,. \qquad (6)$$

Der Gesamtdrehimpuls ist also

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i \qquad (7)$$

Bild 2 zeigt, dass die Richtungen des Drehimpulses und der Winkelgeschwindigkeit nicht übereinstimmen müssen. Der Drehimpulsvektor kann ausgedrückt werden durch

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega} \tag{8}$$

wobei man J als linearen Operator aufzufassen hat, der dem Vektor $\vec{\omega}$ einen Vektor $\vec{L}$ zuordnet. Er wird als ***Trägheitstensor*** bezeichnet.

Dieser Trägheitstensor kann in Matrixform dargestellt werden. Setzt man die Gleichungen (6) und (2) in Gleichung (7) ein, so erhält man

$$\vec{L} = \sum_i m_i \cdot \left(\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)\right). \tag{9}$$

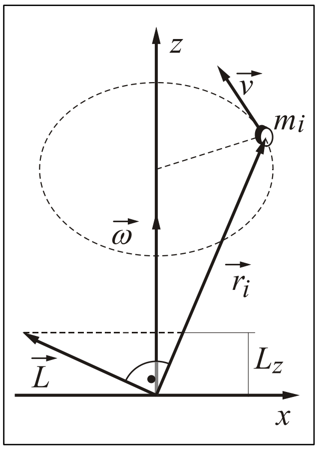


Bild 2: Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit eines Massenelementes

Die Ausführung dieses zweifachen Kreuzproduktes liefert unter Verwendung des Entwicklungssatzes $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$

$$\begin{aligned} L_x &= J_{xx} \cdot \omega_x + J_{xy} \cdot \omega_y + J_{xz} \cdot \omega_z \\ L_y &= J_{yx} \cdot \omega_x + J_{yy} \cdot \omega_y + J_{yz} \cdot \omega_z \\ L_z &= J_{zx} \cdot \omega_x + J_{zy} \cdot \omega_y + J_{zz} \cdot \omega_z \end{aligned} \tag{10}$$

Die Diagonalelemente haben die Form

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \sum_i m_i \cdot ({r_i}^2 - {x_i}^2) = \sum_i m_i \cdot ({y_i}^2 + {z_i}^2) = \sum_i m_i \cdot {r_x}^2 \\ J_{yy} &= \sum_i m_i \cdot ({r_i}^2 - {y_i}^2) = \sum_i m_i \cdot ({x_i}^2 + {z_i}^2) = \sum_i m_i \cdot {r_y}^2 \\ J_{zz} &= \sum_i m_i \cdot ({r_i}^2 - {z_i}^2) = \sum_i m_i \cdot ({x_i}^2 + {y_i}^2) = \sum_i m_i \cdot {r_z}^2 \end{aligned} \tag{11}$$

wobei r_x, r_y, r_z die Abstände von der x-, y- bzw. z-Achse sind, während r der Abstand vom Ursprung *0* ist. Die Nichtdiagonalelemente haben folgende Form:

$$\begin{aligned} J_{xy} &= J_{yx} = \sum_i m_i \cdot x_i \cdot y_i \\ J_{xz} &= J_{zx} = \sum_i m_i \cdot x_i \cdot z_i \\ J_{yz} &= J_{zy} = \sum_i m_i \cdot y_i \cdot z_i\ . \end{aligned} \tag{12}$$

Bei Körpern der Dichte ϱ können die Summationen in Gleichung (11) und (12) durch eine Integration ersetzt werden. Für ein Diagonalelement gilt dann:

$$J_{xx} = \int_V \varrho \cdot (r^2 - x^2) \cdot \mathrm{d}V = \int_V \varrho \cdot {r_x}^2 \cdot \mathrm{d}V\ . \tag{13}$$

Jeder Körper besitzt eine Achse durch den Schwerpunkt mit maximalem und eine andere, dazu senkrechte Schwerpunktachse mit minimalem Masseträgheitsmoment. Diese beiden und die dritte, zu beiden senkrecht stehende Achse werden als Hauptträgheitsachsen bezeichnet. Sie fallen mit den eventuell vorhandenen Symmetrieachsen des betrachteten Körpers zusammen. Die zugehörigen Masseträgheitsmomente heißen Hauptträgheitsmomente J_x, J_y und J_z.
Legt man das Koordinatensystem so, dass seine Achsen mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallen, verschwinden alle Nichtdiagonalelemente von J, und Gleichung (10) vereinfacht sich zu

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix} \cdot \vec{\omega} \,. \tag{14}$$

Lässt man einen Körper um eine beliebige starre Achse rotieren, so sind im Allgemeinen alle drei Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ von *0* verschieden. Da $\vec{\omega}$ durch die starre Achse raumfest gehalten wird, rotiert das körperfeste Koordinatensystem und damit $\vec{L}$ um die starre Achse. Die zeitliche Änderung des Drehimpulses $\vec{L}$ erfordert an der Rotationsachse das Drehmoment

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \quad , \tag{15}$$

das sich bei $\vec{\omega} = \mathrm{konst.}$ als *„Unwucht“* rotierender Körper äußert. Fällt jedoch die starre Achse mit einer Hauptträgheitsachse zusammen, so besitzt $\vec{\omega}$ nur eine von *0* verschiedene Komponente und nach Gleichung (14) zeigt $\vec{L}$ dann immer in Richtung der Achse. In diesem Fall verschwindet das Drehmoment auf die Achse (*bei* $\vec{\omega} = \mathrm{konst.}$), der Körper ist *„ausgewuchtet“*.

1.3 Der Satz von Steiner

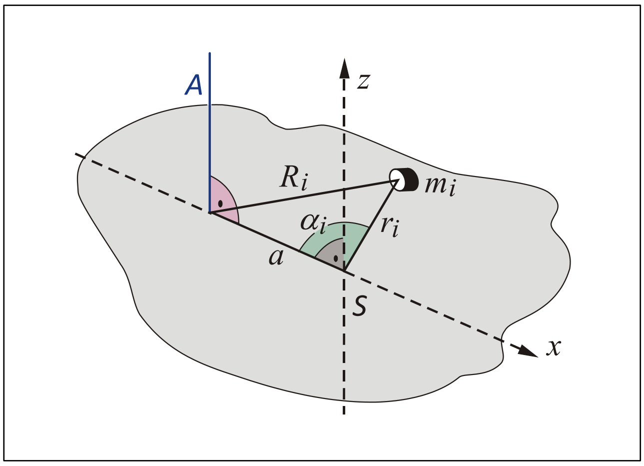


Bild 3: Trägheitsmoment für beliebige Achsen

Nach Betrachtung von Rotationsachsen durch den Schwerpunkt eines Körpers wird nun der Koordinatenursprung in den Schwerpunkt *S* des Körpers mit der Masse m gelegt und dessen Rotation um die Achse *A*, die nicht durch *S* geht, untersucht (***Bild 3***).

Das Massenträgheitsmoment bezüglich *A* ist

$$J_A = \sum_i m_i \cdot {R_i}^2. \tag{16}$$

Wegen

$${R_i}^2 = a^2 + {r_i}^2 - 2a \cdot r_i \cdot \cos\alpha_i \tag{17}$$

erhält man aus der Gleichung (16)

$$J_A = m \cdot a^2 + \sum_i m_i \cdot {r_i}^2 - 2a \cdot \sum_i m_i \cdot r_i \cdot \cos\alpha_i \,, \tag{18}$$

Der mittlere Term ist gerade das Massenträgheitsmoment J_S bezüglich der zu *A* parallelen Schwerpunktachse. Im letzten Term der Gleichung (18) sind die Produkte $r_i \cdot \cos\alpha_i$ die Projektionen der Ortsvektoren auf die x-Achse. Der Term verschwindet, denn

$$\sum_i m_i \cdot r_i \cdot \cos\alpha_i = \sum_i m_i \cdot x_i = m \cdot x_S \tag{19}$$

x_S ist aber gerade die x-Koordinate des Schwerpunktes, der im Koordinatenursprung liegt. Für das Trägheitsmoment um eine beliebige Achse *A* ergibt sich somit aus Gleichung (18) der ***Satz von Steiner***:

$$\boxed{J_A = J_S + m \cdot a^2} \tag{20}$$

wobei J_S das Massenträgheitsmoment um die zu *A* parallele Schwerpunktachse ist.

1.4 Experimentelle Bestimmung von Massenträgheitsmomenten

Zur Messung von Massenträgheitsmomenten kann man eine Torsionsfeder verwenden, die beim Auslenken des Körpers aus der Ruhelage ein zum Auslenkwinkel proportionales Drehmoment

$$M = -D \cdot \varphi \tag{21}$$

erzeugt. Der Faktor D wird als zur Torsionsfeder gehöriges ***Direktionsmoment*** (*auch Direktionskonstante, Richtkonstante oder Federkonstante*) bezeichnet.

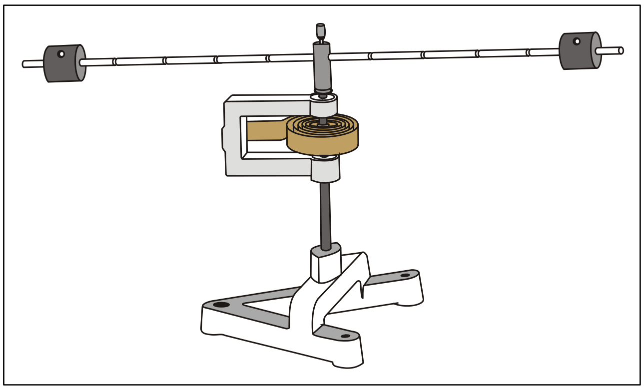


Bild 4: Drillachse mit montiertem horizontalen Stab

Die entstehende Schwingung hat die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D}}\,. \tag{22}$$

Das Direktionsmoment D kann nach dem Hookeschen Gesetz (*Gleichung (21)*) bestimmt werden oder mit der Gleichung (22) durch Messung der Schwingungsdauer T eines Körpers bei bekanntem Massenträgheitsmoment J.

2. Versuch

2.1 Vorbetrachtung

Aufgabe 1: Warum ist das Massenträgheitsmoment bezüglich einer Schwerpunktachse immer kleiner als das für eine parallele Achse, die nicht durch den Schwerpunkt geht?

Aufgabe 2: Worin bestehen die Unterschiede der beiden im Versuch zu benutzenden Methoden für die Bestimmung des Direktionsmomentes D (***Aufgabe 1*** *und* ***2***)?

Aufgabe 3: Sie bestimmen in ***Aufgabe 3*** der Versuchsdurchführung bzw. Versuchsauswertung das Massenträgheitsmoment J für verschiedene Körper mit zwei unterschiedlichen Methoden. Beschreiben Sie kurz diese beiden Messmethoden.

2.2 Versuchsdurchführung

2.2.1 Verwendete Geräte

Drillachse, Stab mit zwei darauf verschiebbaren Massen, Federkraftmesser, Lichtschranke mit Zähler, unterschiedliche starre Körper (*Vollzylinder, Hohlzylinder, Vollkugel, Scheibe*), Scheibe mit kreisförmiger, dreieckiger und quadratischer Grundfläche für Steinerschen Satz, Laborwaage, Messschieber

2.2.2 Versuchshinweise

Aufgabe 1: Bestimmung des Direktionsmomentes D der Torsionsfeder

1a) nach dem Hookeschen Gesetz Gleichung (21)

- Bestimmen Sie mit einem Federkraftmesser (F_{max}=1N) die Kräfte F in den Abständen r $(\mathbf{10...30})\mathbf{cm}$, in $\mathbf{5cm}$-***Schritten*** (*ausgehend von der Stabmitte*), in dem Sie den Kraftmesser senkrecht am Stab ansetzen (*siehe **Bild 5***).
- Bringen Sie die Anordnung durch Drehen im Uhrzeigersinn ($\boldsymbol{\alpha}$=**180°**) aus der Gleichgewichtslage.

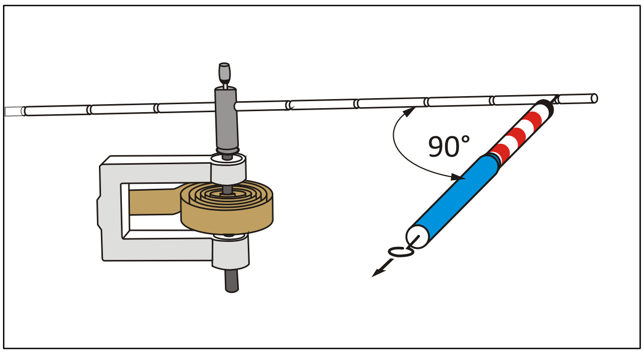


Bild 5: Aufbau Drillachse mit Stab

Hinweis zur Zeitmessung in Aufgaben 1b bis 3:

Zur Messung der Schwingungsdauer wird eine Lichtschranke mit Zähler verwendet. Dabei wird die Betriebsart gewählt, die eine Zeitmessung zwischen der ersten und der dritten Abschattung erlaubt und damit die Schwingungsdauer T misst und im Display anzeigt.

- *Betriebsartenschalter in Stellung*
- *Nach dem Drücken der „**SET**"-Taste sind vier Dezimalpunkte eingeschaltet, die Messung ist vorbereitet.*

1b) nach der Schwingungsmethode (*Gleichung (22)*) sowie **1c)** Nachweis der Abhängigkeit des Massenträgheitsmomentes von der Massenverteilung

- Die Messungen sind für die folgenden Aufgaben ***immer 10-mal*** durchzuführen (***Aufgabe 1b, 2b***).
- Messen Sie die Schwingungsdauer T zunächst nur mit dem Stab ohne dabei die zusätzlichen Massen auf die Achse zu stecken.
- Positionieren Sie die Lichtschranke so, dass der Stab die Lichtschranke auslösen kann. Dabei ist die Auslenkung nur so groß zu halten, wie sie zur Messung notwendig ist.
- Bestimmen Sie die Masse m der Aufschiebekörper.
- Stecken Sie die beiden Aufschiebekörper symmetrisch in den Abständen $\boldsymbol{r}$=$(\mathbf{5...25})$ $\mathbf{cm}$ in $\mathbf{5cm}$-***Schritten*** auf den Stab (*ausgehend von der Stabmitte*).

Hinweis: *Die Aufschiebekörper rasten eigenständig ein!*

Aufgabe 2: Untersuchung der Massenträgheitsmomente eines ***Voll-*** bzw. ***Hohlzylinders*** sowie einer ***Holzscheibe*** und einer ***Kugel***

a) durch Masse- und Längenbestimmungen (*siehe Ergänzung*),

- Bestimmen Sie die Massen m und Radien r der verwendeten vier Körper.

b) nach der Schwingungsmethode

- Ermitteln Sie das Massenträgheitsmoment des Auflagetellers (*dient zur Befestigung beider Zylinder*) über die Messung der Schwingungsdauer T und berücksichtigen Sie dieses bei der Berechnung der Massenträgheitsmomente der Zylinder.
- Führen Sie die Messungen analog zur ***Aufgabe 1b*** durch. Verwenden Sie zur Auslösung der Lichtschranke einen an der Drillachse befestigten Zeiger.

Aufgabe 3: Bestimmung der Abhängigkeit des Massenträgheitsmomentes J vom Abstand a zwischen Rotations- und Schwerpunktachse

a) durch Masse- und Längenbestimmungen (*siehe Ergänzung*),

- Ermitteln Sie die Massen m sowie die geometrischen Abmessungen (Radius r, Kantenlänge b, Abstand a) der Kreis-, Dreiecks- (*gleichseitig*) und Quadratscheibe.

b) nach der Schwingungsmethode

- Stecken Sie zunächst die Kreisscheibe auf die Drillachse im Schwerpunkt (a=0) und lassen Sie diese um ihre Achse rotieren.
- Messen Sie die Schwingungsdauer T analog zur ***Aufgabe 1b***.
- Wiederholen Sie diese Messung ***5-mal***.
- Führen Sie die Messungen im Abstand $\boldsymbol{a}=(\mathbf{0...8})\ \mathbf{cm}$ in **2cm-*Schritten*** zwischen Rotations- und Schwerpunktachse durch.

Hinweis: *Justieren Sie die Kreisscheibe bzw. die anderen zu untersuchenden Körper bei der Montage sowie bei jeder Abstandsänderung möglichst waagerecht!*

- Wiederholen Sie die Messung mit Körpern dreieckiger bzw. quadratischer Grundfläche.

2.3 Versuchsauswertung

Aufgabe 1: Bestimmung des Direktionsmomentes D der Torsionsfeder

1a) nach dem Hookeschen Gesetz Gleichung (21)

- Stellen Sie die Funktion $\boldsymbol{F = f(r^{-1})}$ in einem Diagramm graphisch dar und ermitteln Sie daraus den Anstieg des Graphen. Bestimmen Sie auf dieser Grundlage das Drehmoment M der Torsionsfeder.
- Berechnen Sie daraus das Direktionsmoment D_1 nach dem Hookeschen Gesetz (*siehe **Abschnitt 1.4***) und ermitteln Sie dazu die Messunsicherheit durch eine Fehlerrechnung (*absolut und relativ*) an. (*α in Bogenmaß verwenden!*)

Hinweis: *Das Massenträgheitsmoment der Drillachse ohne Stab liegt in der Größenordnung bei* $10^{-5}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$. *Es wird bei den mit den experimentell bestimmten Daten durchgeführten Berechnungen nicht berücksichtigt, so dass diese Ergebnisse stets größer als die theoretisch zu erwartenden Werte sind.*

1b) nach der Schwingungsmethode (*Gleichung (22)*)

- Berechnen Sie aus den Messwerten die Mittelwerte der Schwingungsdauern T und die Messabweichungen aus den Summen der systematischen und zufälligen Fehler (*Mittelwert, Standardabweichung, t-Verteilung*).
- Stellen Sie in einem Diagramm die Funktion $\boldsymbol{T^2 = f(r^2)}$ graphisch dar und ermitteln Sie daraus den Anstieg des Graphen.

- Leiten Sie aus Gleichung (22) und dem Steinerschen Satz Gleichung (20) zur Bestimmung des Direktionsmomentes D der Torsionsfeder her.
- Berechnen Sie daraus das Direktionsmoment D_2 und bestimmen Sie die Messunsicherheit durch eine Fehlerrechnung (*absolut und relativ*).

Wichtig: *Bestimmen Sie aus den zwei Direktionsmomenten D_1 und D_2 den* ***„gewichteten Mittelwert“*** *des Direktionsmomentes $\overline{\overline{D}}$ (siehe* ***Abschnitt 4.4*** *„Einführung in das Physikalische Praktikum“) und verwenden Sie* ***<u>diesen</u>*** *für die weiteren Aufgaben.*

1c) Nachweis der Abhängigkeit des Massenträgheitsmomentes von der Massenverteilung

- Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment J mit Hilfe des Direktionsmomentes $\overline{\overline{D}}$.
- Stellen Sie den Zusammenhang $\boldsymbol{J = f(r)}$ und $\boldsymbol{J = f(r^2)}$ in je einem Diagramm graphisch dar und interpretieren Sie die Darstellung.

Aufgabe 2: Untersuchung der Massenträgheitsmomente eines ***Voll-*** bzw. ***Hohlzylinders*** sowie einer ***Holzscheibe*** und einer ***Kugel***

2a) durch Masse- und Längenbestimmungen (*siehe Gleichung (20) und Ergänzung*),

2b) nach der Schwingungsmethode

- Vergleichen und diskutieren Sie die Ergebnisse der nach ***Aufgabe 2a*** und ***2b*** bestimmten Massenträgheitsmomente J und ermitteln Sie die Messunsicherheiten durch entsprechende Fehlerrechnungen.

Aufgabe 3: Bestimmung der Abhängigkeit des Massenträgheitsmomentes J vom Abstand a zwischen Rotations- und Schwerpunktachse

3a) durch Masse- und Längenbestimmungen (*siehe Gleichung (20) und Ergänzung*),

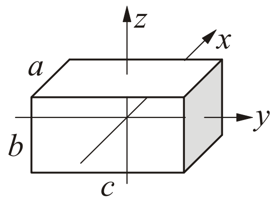
3b) nach der Schwingungsmethode

- Bestimmen Sie die Massenträgheitsmomente J nach ***Aufgabe 3a*** und ***3b***.
- Weisen Sie an Hand der in ***Aufgabe 3b*** ermittelten Werte mit Hilfe der graphischen Darstellung der Funktion $\boldsymbol{J = f(a^2)}$ den Steinersche Satz nach (*ein Diagramm pro Körperfläche*).
- Zeichnen Sie eine Regressionsgeraden in das Diagramm ein. Legen Sie die Fehlerbalken fest und schätzen Sie daraus die relative Messunsicherheit ab.
- Zeichnen Sie aus den berechneten Daten nach ***Aufgabe 3a*** eine Kennlinie in die jeweilige graphische Darstellung mit ein.
- Welche Schlussfolgerungen ziehen Sie daraus?

3. Ergänzung

Massenträgheitsmomente einiger einfacher Körper (*schwerpunktbezogen*)

Quader

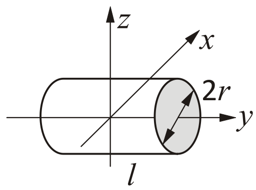


$$J_x = \frac{1}{12} m \cdot (b^2 + c^2)$$

$$J_y = \frac{1}{12} m \cdot (a^2 + b^2)$$

$$J_z = \frac{1}{12} m \cdot (a^2 + c^2)$$

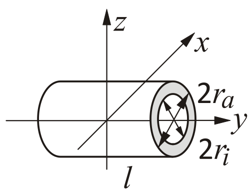
Vollzylinder



$$J_y = \frac{1}{2} m \cdot r^2$$

$$J_z = \frac{1}{12} m \cdot (3r^2 + l^2)$$

Hohlzylinder

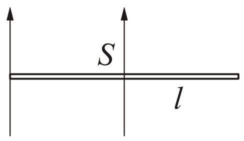


$$J_y = \frac{1}{2} m \cdot ({r_a}^2 + {r_i}^2)$$

$$J_z = \frac{1}{4} m \cdot \left({r_a}^2 + {r_i}^2 + \frac{1}{3} h^2\right)$$

---

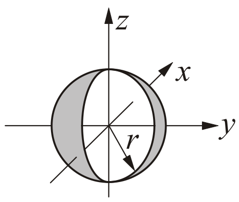
langer dünner Stab



$$J_S = \frac{1}{12} m \cdot l^2$$

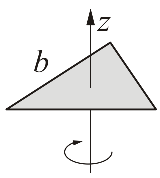
$$J_l = \frac{1}{3} m \cdot l^2$$

Kugel



$$J = \frac{2}{5} m \cdot r^2$$

Körper mit dreieckiger (gleichschenklig) Grundfläche



$$J_z = \frac{1}{12} m \cdot b^2$$