

Der Torsionsmodul eines Stabes soll in diesem Versuch nach der statischen und der dynamischen Methode bestimmt werden. Die maximale Messunsicherheit beider Methoden ist dabei zu vergleichen.

1. Theoretische Grundlagen

1.1 Allgemeine Grundlagen

Jeder feste Körper wird unter dem Einfluss einer mechanischen Spannung deformiert. Bei hinreichend kleiner Spannung ist die Deformation meist elastisch, d. h., der Körper nimmt nach der Entlastung seine ursprüngliche Gestalt wieder an. Überschreitet die Spannung dagegen einen kritischen Punkt, so können Fließerscheinungen zu bleibenden Volumen- oder Formänderungen führen. Diese Deformationen sind dann unelastisch oder plastisch.

Das elastische Verhalten homogener isotroper fester Körper wird durch vier Materialgrößen charakterisiert: den Elastizitätsmodul E , die Poissonsche Zahl μ , den Torsions- oder Schubmodul G und den Kompressionsmodul K .

1.2 Torsionsmodul

Wenn auf die obere Deckfläche eines Würfels, dessen Bodenfläche festgehalten wird, eine nicht zu große Kraft F_S in der in **Bild 1** dargestellten Richtung wirkt, so ist der Scherwinkel α der Schubspannung τ proportional.

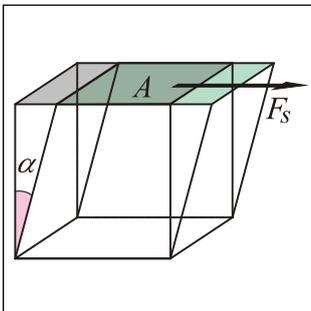


Bild 1: Scherkraft am Würfel

Der Torsionsmodul G lässt sich aus Untersuchungen an verdrehten Stäben mit kreisförmigem Querschnitt bestimmen. Gegeben sei ein einseitig eingespannter Stab, dessen Länge l groß gegen den Radius r sein soll.

Betrachtet man im Stabinneren einen coaxialen Hohlzylinder mit dem Radius r' und der Dicke dr' (**Bild 2**) und lässt am freien Ende tangential eine Schubkraft dF_S angreifen, so wird eine ursprünglich senkrechte Faser des Zylindermantels um den Scherwinkel α gedreht. Für den Bogen $s = r' \cdot \varphi$ gilt unter der Voraussetzung $|\alpha| \ll 1$ in guter Näherung $s = l \cdot \alpha$.

$$\tau = G \cdot \alpha . \quad (1)$$

Den Proportionalitätsfaktor G nennt man **Schub- oder Torsionsmodul**, und die Schubspannung ist das Verhältnis der Scherkraft F_S zum Querschnitt A des Würfels:

$$\tau = \frac{F_S}{A} . \quad (2)$$

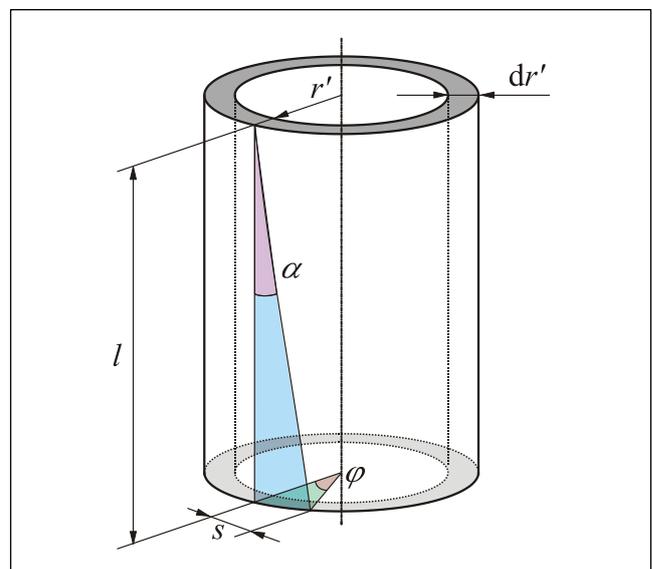


Bild 2: Torsion eines Zylinders

Damit kann man nach Gleichung (1)

$$\tau = G \cdot \frac{r'}{l} \cdot \varphi$$

schreiben. Somit ist unter Verwendung der Gleichung (2) die Schubkraft das Produkt aus Schubspannung τ und dem Querschnitt A des Hohlzylinders

$$dF_S = 2\pi \cdot r' \cdot dr' \cdot G \cdot \frac{r'}{l} \cdot \varphi .$$

Durch Multiplikation mit dem Hebelarm r' geht die Schubkraft in das Drehmoment

$$dM = \frac{2\pi \cdot G}{l} \cdot \varphi \cdot r'^3 \cdot dr'$$

über. Das resultierende Drehmoment erhält man durch Integration über alle Hohlzylinder:

$$M = \int dM = \frac{2\pi \cdot G}{l} \cdot \varphi \cdot \int_0^r r'^3 \cdot dr' ,$$

$$M = \frac{\pi \cdot G \cdot r^4}{2l} \cdot \varphi . \quad (3)$$

Wenn zur Verdrillung des Stabes ein großes Drehmoment erforderlich ist, empfiehlt sich eine statische Bestimmung des Torsionsmoduls. Liegt dagegen das zu untersuchende Material als Draht vor, wird der Torsionsmodul zweckmäßigerweise mit einer dynamischen Messmethode ermittelt.

1.3 Statische Messmethode

Das nicht eingespannte Ende eines Stabes wird starr mit einer zylindrischen Scheibe (*Radius R*) verbunden. Dabei sollen Stabachse und Scheibenachse übereinstimmen. Wenn man nun die Schubkraft F_S in der in **Bild 3** dargestellten Weise an der Scheibe angreifen lässt, ist das auf den Stab übertragene Drehmoment:

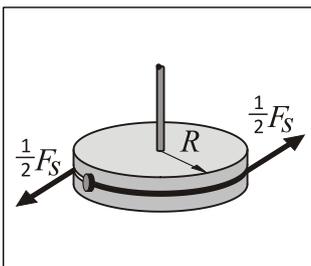


Bild 3: zur Torsion

$$M = R \cdot F_S . \quad (4)$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) erhält man für den Torsionsmodul

$$G = \frac{2l \cdot R}{\pi \cdot r^4} \cdot \frac{F_S}{\varphi} . \quad (5)$$

Der Winkel φ wird aus dem Ausschlag eines auf der Achse angebrachten Zeigers bestimmt.

1.4 Dynamische Messmethode

Ein Stab habe die Länge l und den Radius r . Das obere Ende sei eingespannt, das untere mit einer zylindrischen Scheibe belastet. Dreht man die Scheibe um den Winkel φ_0 aus ihrer Ruhelage und lässt sie zur Zeit $t=0$ los, so führt das System unter der Wirkung der elastischen Kräfte des verdrillten Drahtes Torsionsschwingungen aus. Bei einem Auslenkwinkel φ ist der Betrag des rücktreibenden Drehmomentes durch (3) gegeben.

Die Größe $D = \frac{\pi \cdot G \cdot r^4}{2l}$ (6)

ist das Direktionsmoment des Torsionspendels. Bezeichnet man mit J das Trägheitsmoment des Systems, so lautet die Bewegungsgleichung

$$J \cdot \ddot{\varphi} = -D \cdot \varphi .$$

Aus der Lösung dieser Differenzialgleichung ergibt sich für die Schwingungsdauer:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D}} . \quad (7)$$

Ist das Trägheitsmoment J bekannt, kann der Torsionsmodul aus den Gleichungen (6) und (7) bestimmt werden. Im Allgemeinen lässt sich aber das Trägheitsmoment des Systems (*Stab, Scheibe und Befestigungsvorrichtung*) nicht berechnen. Aus diesem Grunde ist es notwendig, J zu eliminieren.

Man schraubt einen Zylinder der Masse m und dem Radius R so an die schon vorhandene Scheibe, dass die Achse des Zylinders mit der Stabachse übereinstimmt. Das Trägheitsmoment des Torsionspendels vergrößert sich dadurch additiv um $J_1 = \frac{1}{2}m \cdot R^2$, und die Schwingungsdauer wird

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J + J_1}{D}} . \quad (8)$$

Wenn man die Gleichungen (8) und (7) quadriert und anschließend voneinander abzieht, ergibt sich für das Direktionsmoment

$$D = \frac{4\pi^2 \cdot J_1}{T_1^2 - T^2} = \frac{2\pi^2 \cdot m \cdot R^2}{T_1^2 - T^2} . \quad (9)$$

Aus den Gleichungen (6) und (9) folgt dann also:

$$G = \frac{4\pi \cdot l \cdot m \cdot R^2}{r^4 \cdot (T_1^2 - T^2)} . \quad (10)$$

2. Versuch

2.1 Vorbetrachtung

Aufgabe 1: Nennen Sie vier Materialgrößen, die das elastische Verhalten homogener isotroper fester Körper charakterisieren.

Aufgabe 2: Ein Metallstab mit einem Durchmesser von $d=5 \text{ mm}$ ist senkrecht aufgehängt. Das eine Ende ist dabei fest eingespannt. Am anderen Ende ist im Abstand von einem Meter eine Scheibe mit einem Durchmesser $D=16 \text{ cm}$ am Stab angebracht (*Siehe Bild 4*). Über ein Rollensystem werden symmetrisch Massestücke aufgelegt, die den Stab gleichmäßig verdrehen. Das Verhältnis von Kraft zu Winkel beträgt $F_S/\varphi=60,8 \text{ N/rad}$.

Berechnen Sie den Torsionsmodul! Um welches Material handelt es sich bei dem Metall?

2.2 Versuchsdurchführung

2.2.1 Verwendete Geräte

Stab mit Drehscheibe, 2 Auflageteller für Massestücke, verschiedene Massestücke (2×100 g, 4×200 g, 4×500 g, 4×1 kg), Messschieber mit Tiefenmesser, Bügelmessschraube, Winkelmesser, Lichtschranke mit Zähler, Stoppuhr, Zusatzscheibe, Gliedermaßstab

2.2.2 Versuchshinweise

Aufgabe 1: Bestimmung des Torsionsmoduls eines Stabes nach statischer Messmethode

- Messen Sie die Stablänge l zwischen den Einspannpunkten.
- Messen Sie zur Bestimmung des Scheibenradius R den Scheibendurchmesser in der Rille.
- Messen Sie den Stabdurchmesser d mit der Bügelmessschraube an **10 verschiedenen Stellen**.
- Die Kraft F_S wird durch die Gewichtskraft aufzulegender Massestücke realisiert. Variieren Sie die Gesamtmasse bei selbstfestzulegender Schrittweite im Bereich **von 0 bis 6 kg** entsprechend den Möglichkeiten der bereitgelegten Gewichtsstücke. Beachten Sie dabei eine gleichmäßige Seitenbelastung!
- Messen Sie jeweiliges den Auslenkwinkel φ .
- Führen Sie **mindestens 10 Messungen** durch.
- Für die Entlastung des zu verdrehenden Stabes wiederholen Sie den Vorgang in umgekehrter Reihenfolge (*Entlastungskennlinie*).

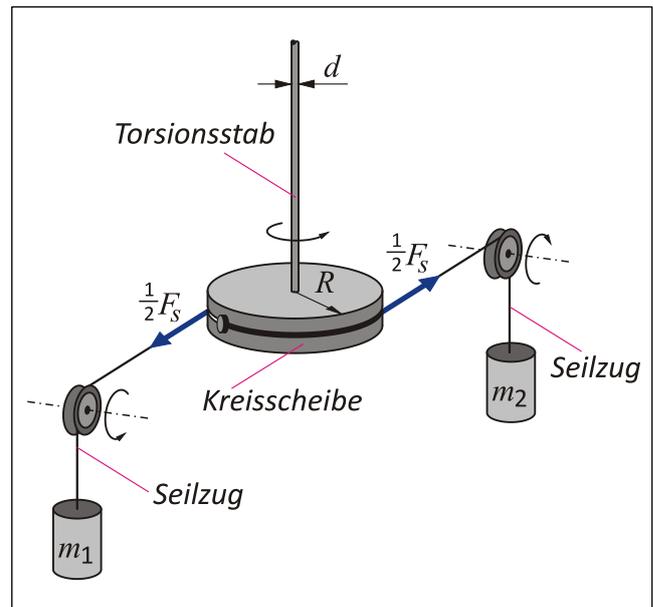


Bild 4: Versuchsaufbau

Aufgabe 2: Bestimmung des Torsionsmoduls eines Stabes nach dynamischer Messmethode

- Demontieren Sie **vorsichtig** den Zeiger und die Seile zur Befestigung der beiden Auflageteller.
- Bestimmen Sie die Masse m und den Durchmesser $D = 2R$ der Zusatzscheibe.
- Zur Bestimmung der Schwingungsdauer stoppen Sie die Zeit für **50 Schwingungen** (T ohne, T_1 mit montierter Zusatzscheibe). Wiederholen Sie die Messung **10-mal**.
- Verwenden Sie zur Zählung der **50 Schwingungen** die Lichtschranke.
 - Kontrollieren Sie den kleinen Zeiger an der Scheibe. Dieser muss die Lichtschranke unterbrechen können.
 - Positionieren Sie die Lichtschranke so, dass der Zeiger nur mit geringem Abstand neben dem Lichtweg ruht.
 - Schalten Sie die Betriebsspannung der Lichtschranke zu (*Stecker von Trafo*).
 - Überprüfen Sie, ob die Stellung des Betriebsartenschalters auf „**Count**“ steht.
 - Verdrehen Sie zur Messung die Scheibe **ca. 10° bis 15°**, und mit dem Loslassen starten Sie die Zeitmessung. An der Lichtschranke werden die Durchgänge des Zeigers gezählt und angezeigt.

Beachte:

Jede Schwingung durchläuft die Lichtschranke zweimal!

2.3 Versuchsauswertung

Aufgabe 1: Bestimmung des Torsionsmoduls eines Stabes nach statischer Messmethode

- Berechnen Sie aus den Messwerten den Mittelwert des Stabdurchmessers d und die Messabweichung aus der Summe des systematischen und des zufälligen Fehlers (*Mittelwert, Standardabweichung, t-Verteilung*).
- Stellen Sie in einem Diagramm die Funktionen $F_S = f(\varphi_{zu})$ und $F_S = f(\varphi_{ab})$ der Be- und Entlastungskurve graphisch dar (**φ in Bogenmaß verwenden**) und ermitteln Sie deren Anstieg unter Verwendung der linearen Regression.
- Bestimmen Sie den Mittelwert der Anstiege und benutzen Sie diesen für die Berechnung des Torsionsmoduls G nach Gleichung (5).
- Geben Sie die Messunsicherheit durch eine Fehlerrechnung (*absolut und relativ*) an. Verwenden Sie für die Fehlerbetrachtung die Standardabweichung des Kurvenanstiegs (*siehe **Abschnitt 4.3** „Einführung in das Physikalische Praktikum“*)

Aufgabe 2: Bestimmung des Torsionsmoduls eines Stabes nach dynamischer Messmethode

- Berechnen Sie aus den Messwerten die Mittelwerte der Schwingungsdauern T und T_1 sowie die Messabweichungen aus den Summen der systematischen und zufälligen Fehler (*Mittelwert, Standardabweichung, t-Verteilung*).
- Berechnen Sie den Torsionsmodul G nach Gleichung (10) und geben Sie die Messunsicherheit durch eine Fehlerrechnung (*absolut und relativ*) an.

Aufgabe 3: Vergleich

- Vergleichen und diskutieren Sie die Ergebnisse des Torsionsmoduls und deren Messunsicherheiten. Worin unterscheiden sich beide Methoden?