

An Hand einer Saitenschwingung sollen die Wellengleichung studiert und die theoretischen Zusammenhänge experimentell überprüft werden.

1. Theoretische Grundlagen

Unter einer Saite versteht man einen elastischen Körper, der in seinen Querabmessungen auf die unmittelbare Umgebung der neutralen Faser reduziert ist, so dass er einer Biegung keinen Widerstand entgegengesetzt. Experimentell realisiert man die Saite z.B. durch einen dünnen Metalldraht. Die Ruhelage eines Stabes ist aufgrund der elastischen Kräfte im Material räumlich fixiert, wenn er in einer Stellung eingespannt ist. Dagegen ist die Ruhelage einer Saite erst definiert, wenn sie an beiden Enden fest eingespannt ist und eine axiale Normalspannung $\sigma = F_0/A$ (F_0 : Zugkraft, A : Querschnitt) wirkt. Lenkt man eine Saite aus ihrer Ruhelage aus (durch Streichen oder Zupfen), so treten rücktreibende Kräfte auf, und die Saite kehrt in Form einer gedämpften longitudinalen und transversalen Schwingung in ihre Ruhelage zurück.

Im vorliegenden Versuch sind nur die transversalen Schwingungen beobachtbar und für die Akustik der Saiteninstrumente interessant.

1.1 Differenzialgleichung einer schwingenden Saite

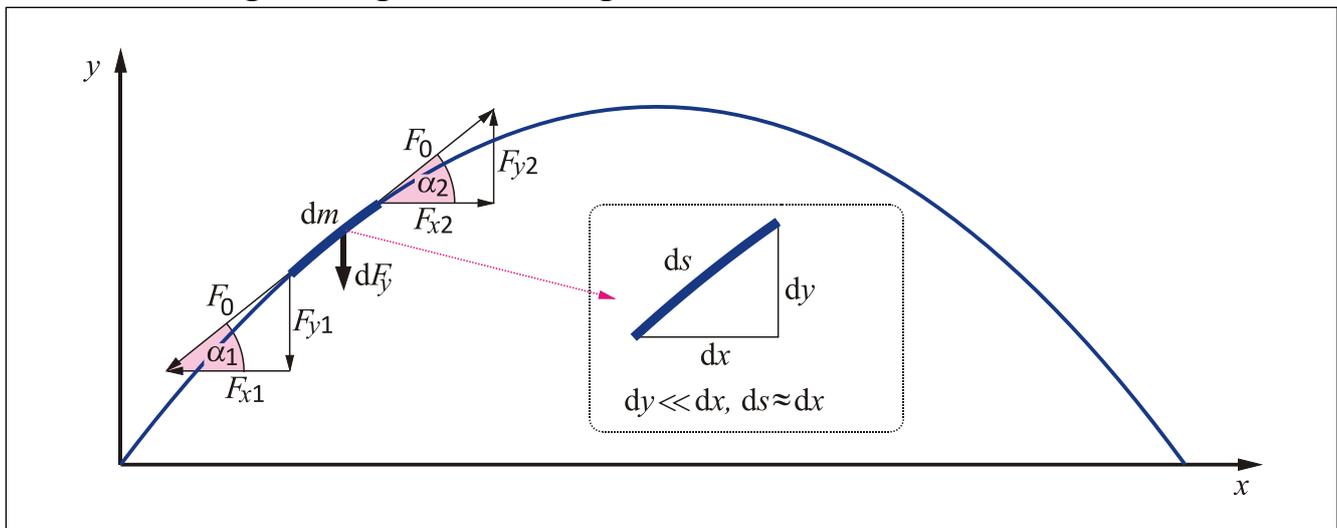


Bild 1: Ableitung der Wellengleichung

Zur Ableitung der Bewegungsgleichung einer ungedämpft schwingenden Saite wird vorausgesetzt, dass die Bewegung in der x - y -Ebene (**Bild 1**) erfolgt und der Einfluss der Schwerkraft vernachlässigt werden kann. Eine Saite der Länge l , des Querschnittes A und der Massendichte ρ bzw. der linearen Massendichte $\mu = m/l$ wird durch die Kraft F_0 gespannt. Diese bildet aber unterschiedliche Winkel α zur Horizontalen. Die Zugspannung am Element dm zieht links nach unten und rechts nach oben. Der Betrag der y -Kraftkomponente ist links größer als rechts ($|F_{y1}| > |F_{y2}|$), es verbleibt eine Differenz dF_y als rücktreibende Kraft nach unten.

Quantitativ folgt:

$$-F_{y1} - dF_y + F_{y2} = 0$$

mit

$$dF_y = F_{y2} - F_{y1}$$

$$F_{y1} = F_0 \cdot \sin \alpha_1 \qquad F_{y2} = F_0 \cdot \sin \alpha_2 = F_0 \cdot \sin(\alpha_1 + d\alpha)$$

$$dF_y = F_0 \cdot (\sin(\alpha_1 + d\alpha) - \sin \alpha_1) \qquad (1)$$

Für kleine Auslenkungen der Saite gilt näherungsweise

$$\sin \alpha \approx \alpha \approx \tan \alpha \approx \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad \sin(\alpha + d\alpha) \approx \alpha + d\alpha \approx \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx.$$

Eingesetzt in die Gleichung (1) erhält man

$$dF = F_0 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx. \qquad (2)$$

Diese Kraft führt zu einer Beschleunigung des Massenelementes $dm = \rho \cdot A \cdot dx = \mu \cdot dx$ und es ergibt sich mit der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$dF = dm \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = \mu \cdot dx \cdot \frac{d^2y}{dt^2}$$

folgende Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{F_0}{\mu} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \qquad (3)$$

Diese Differenzialgleichung zeigt, dass die Transversalschwingungen nicht von der Elastizität sondern nur von der Spannkraft F_0 und der linearen Massendichte μ der Saite abhängen. Das Ergebnis war zu erwarten, da die mit der Auslenkung verbundene Längsdehnung von dx bei der Herleitung vernachlässigt wurde. Mit einer erweiterten Herleitung kann gezeigt werden, dass die Dehnung und damit die durch den Elastizitätsmodul E beschriebene Elastizität die Ursache für die immer auch auftretende Longitudinalschwingung ist, welche einer der Gleichung (3) sehr ähnlichen Bewegungsgleichungen genügt:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{d^2\xi}{dx^2} \qquad (4)$$

Die Größe ξ kennzeichnet hier die Auslenkung der Massenelemente in der x -Richtung.

1.2 Diskussion der Wellengleichung

Die Bewegungsgleichungen (3) und (4) der Saite sind Spezialfälle der allgemeinen eindimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (5)$$

Die Lösung der Wellengleichung ergibt sich mit dem Ansatz:

$$u = A \cdot \sin(k \cdot x + \omega \cdot t) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= A \cdot \omega \cdot \cos(k \cdot x + \omega \cdot t) & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(k \cdot x + \omega \cdot t) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= A \cdot k \cdot \cos(k \cdot x + \omega \cdot t) & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -A \cdot k^2 \cdot \sin(k \cdot x + \omega \cdot t) \end{aligned}$$

Nach Einsetzen des behandelten Ansatzes in die Wellengleichung (5) ergibt sich:

$$\omega^2 = c^2 \cdot k^2 \quad (6)$$

oder, mit weiterem Einsetzen

$$c = \pm \frac{\omega}{k} = \pm \lambda \cdot f. \quad (7)$$

Bei dieser Phasengeschwindigkeit c bedeutet das positive Vorzeichen eine Welle in Minus-Richtung einer positiven x -Achse, das negative Vorzeichen beschreibt eine Welle in entgegengesetzte Richtung.

Durch Koeffizientenvergleich (nach Gleichung (3) bzw. (4)) erhält man für die Phasengeschwindigkeit der Transversal- bzw. Longitudinalwelle der schwingenden Saite

$$c_{trans} = \sqrt{\frac{F_0}{\mu}} = \sqrt{\frac{F_0/A}{\rho}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \quad \text{bzw.} \quad c_{long} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (8)$$

σ : Zugspannung

Die Phasengeschwindigkeit mechanischer Wellen hat allgemein die Form

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}},$$

wobei K eine Größe der Dimension Druck ist (Elastizitätsmodul bei Drähten, Kompressionsmodul bei Flüssigkeiten).

1.3 Lösung für stehende Wellen

Um die Bewegung einer ungedämpft schwingenden Saite zu beschreiben, benötigt man eine Lösung der Wellengleichung (5), die auch experimentell gegebene Randbedingungen erfüllt. Die Randbedingungen aufgrund der Einspannung der Saite sind:

$$\text{für alle } t \quad u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (9)$$

Die Anfangsbedingung ($t = 0$) sei so gewählt, dass die Saite durch die Ruhelage schwingt:

$$\text{für } t = 0 \quad u(x, 0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{du(x, 0)}{dt} \neq 0 \quad (10)$$

Betrachtet man in Richtung der x -Achse zwei sich entgegengesetzt ausbreitende harmonische Wellen $u_1(x, t)$ und $u_2(x, t)$ schreibt man:

$$u_1(x, t) = A \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \omega \cdot \frac{x}{c}\right) \quad u_2(x, t) = A \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \omega \cdot \frac{x}{c}\right)$$

So erfüllen sie zwar beide die Wellengleichung, aber nicht die Rand- und Anfangsbedingung. Die Wellengleichung ist eine lineare Differenzialgleichung, deshalb ist auch jede Linearkombination aus u_1 und u_2 eine Lösung der Wellengleichung, also auch

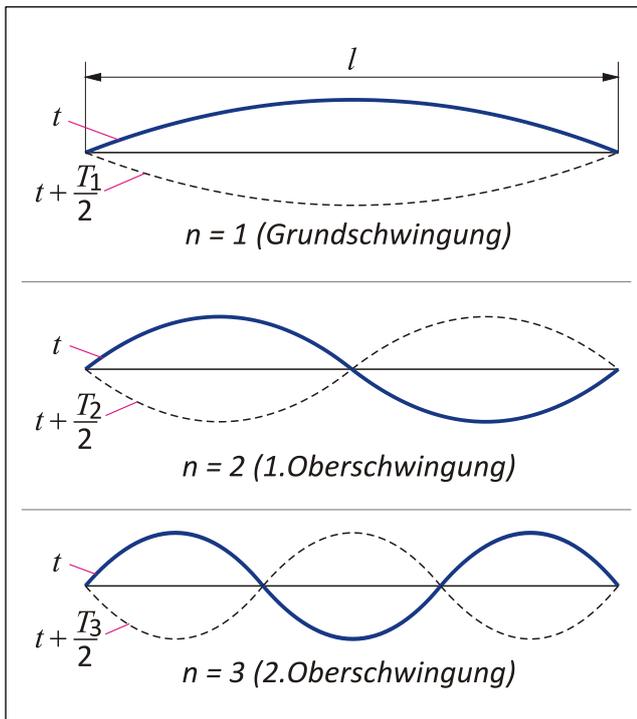


Bild 2: Amplitudenverteilung für verschiedene n -Werte

- n : Nr. des Schwingungsmodus
- $n+1$: Zahl der Knoten
- n : Zahl der Schwingungsbäuche

$$f_n^{trans} = \frac{n}{2l} \cdot \sqrt{\frac{F_0}{\mu}} \quad n=1, 2, 3, \dots \quad \text{bzw.} \quad f_n^{long} = \frac{n}{2l} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Setzt man die möglichen Kreisfrequenzen der Gleichung (12) in die Lösung der Gleichung (11) ein, so erhält man

$$u_n = A_n \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{l} \cdot c \cdot t\right) \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{l} \cdot x\right) \quad (14)$$

Betrachtet man diese Lösung für ein festes n , kann man sagen, dass alle Punkte der Saite phasengleich mit der Amplitude

$$A_n = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{l} \cdot x\right)$$

schwingen. Die Darstellung der Amplitudenverteilung (**Bild 2**) zeigt den Schwingungszustand für einen Zeitpunkt t maximaler Saitenauslenkung (*durchgehende Linie*) und die entgegengesetzte Auslenkung zum Zeitpunkt $t' = t + \frac{1}{2}T_n = t + \frac{1}{2}f_n$ (*gestrichelte Linie*). Zwischen diesen beiden Zuständen schwingt die Saite mit den Frequenzen f_n , und da die Nulldurchgänge (*so genannte Schwingungsknoten*) und die Orte maximaler Auslenkung (*Schwingungsbäuche*) ihre räumliche Lage beibehalten, spricht man von einer stehenden Welle. An den Einspannstellen entstehen immer Knoten, d.h. die

Wellen erleiden bei der Reflexion an den Einspannstellen einen Phasensprung von π . Die Wellenlänge der stehenden Welle ergibt sich wegen $c = \lambda_n \cdot f_n$ nach der Gleichung (14) zu

$$\lambda_n = \frac{2l}{n} \quad \text{mit} \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

Wenn auch die Wellenlängen der Transversal- und Longitudinalwellen für die gleichen Eigenschwingungen übereinstimmen, so sind doch ihre Frequenzen nach Gleichung (13) sehr unterschiedlich. Wegen $E \gg F_0/A$ ist die Frequenz der Longitudinalwelle größer als die der Transversalwellen.

Im Versuch aber können nur die Transversalwellen beobachtet werden.

Im Praktikumsversuch wird eine Saite durch eine harmonische Kraft zu erzwungenen Schwingungen angeregt, so dass bei schwacher Dämpfung der Saite Resonanzen auftreten, wenn mit einer der Eigenfrequenzen angeregt wird. Die auftretenden Amplituden sind im Resonanzfall leicht zu beobachten.

1.4 Lösung mit Eigenfunktionen

Zur Lösung partieller Differenzialgleichungen wird häufig die „*Separation der Variablen*“ gewählt, die hier, wegen ihrer häufigen Anwendung in der Physik ergänzend dargestellt wird. Nimmt man an, die Lösung der Wellengleichung $u(x, t)$ lässt sich als Produkt zweier Funktionen

$$u(x, t) = v(x, t) \cdot w(x, t) \quad (16)$$

darstellen, die jeweils nur von den Variablen x bzw. t abhängen, so wird aus der Wellengleichung

$$v(x) \cdot \frac{d^2 w}{dt^2} = c^2 \cdot w(t) \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{v(x)} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{1}{c^2 \cdot w(t)} \cdot \frac{d^2 w}{dt^2} .$$

Da in der letzten Gleichung die linke Seite nur eine Funktion von x und die rechte Seite nur eine Funktion von t ist, kann die Gleichung nur dann für alle t gelten, wenn beide Seiten gleich einer Konstanten sind, die zweckmäßigerweise mit $-k^2$ bezeichnet wird. Aus der Wellengleichung (5), einer partiellen Differenzialgleichung, werden damit zwei gewöhnliche Differenzialgleichungen

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -k^2 \cdot v(x) \quad \text{und} \quad \frac{d^2 w}{dt^2} = -k^2 \cdot c^2 \cdot w(t) \quad (17)$$

Die Differenzialgleichungen für $v(x)$ werden für jedes k durch die Funktionen $\cos(kx)$ und $\sin(kx)$ gelöst, so wie auch durch jede Linearkombination aus ihnen. Die Lösung erfüllt aber die Randbedingungen $v(0) = v(l) = 0$ (nach Gl. (7)) nur für bestimmte, diskrete k -Werte. Wenn die Lösung die Form

$$v(x) = a_n \cdot \sin(k_n \cdot x)$$

hat, ergeben sich die möglichen k -Werte zu

$$k_n = n \cdot \frac{\pi}{l} \quad \text{mit} \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

Diese durch die Randbedingungen festgelegten k -Werte heißen **Eigenwerte** und die dazugehörigen Lösungen die **Eigenfunktionen** des Schwingungsproblems. Mit den möglichen k -Werten ergibt sich für die Differenzialgleichung für $w(t)$ der Lösungsansatz

$$w(t) = C_n \cdot \cos(k_n \cdot c \cdot t) + D_n \cdot \sin(k_n \cdot c \cdot t)$$

Woraus sich die Eigenfrequenzen

$$f_n = \frac{c}{2l} \cdot n \quad (19)$$

in Übereinstimmung mit der Gleichung (12) ergeben. Mit dem Ansatz zur Separation der Variablen (nach Gleichung (16)) können jetzt folgende Lösungen für die Wellengleichung angegeben werden

$$u_1 = E_n \cdot \sin(k_n \cdot c \cdot t) \cdot \sin(k_n \cdot x) \quad u_2 = F_n \cdot \cos(k_n \cdot c \cdot t) \cdot \sin(k_n \cdot x).$$

Da die Wellengleichung linear ist, sind auch alle Linearkombinationen dieser Lösungen, m also auch

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin(k_n \cdot x) \cdot \sin(k_n \cdot c \cdot t) + b_n \cdot \cos(k_n \cdot c \cdot t) \quad (20)$$

Lösungen der Wellengleichung, vorausgesetzt, die unendliche Reihe konvergiert.

Für die betrachteten Anfangsbedingungen der Gleichung (8) ergibt sich $b_n = 0$, so dass sich die allgemeine Lösung, wenn man noch die Phasenwinkel α_n einführt, in der Form

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{l} \cdot x\right) \cdot \sin(2\pi \cdot f_n \cdot t + \alpha_n) \quad (21)$$

schreiben lässt. Hieraus folgt der allgemeine Satz:

Hinweis: *Jede beliebige periodische Funktion, die den gestellten Rand- und Anfangsbedingungen des Schwingungsproblems genügt, lässt sich als Linearkombination harmonischer Funktionen darstellen (Satz von Fourier, der die Fouriersynthese, aber auch die Umkehrung, die Fourieranalyse von Funktionen, erklärt).*

Verschiedene Saiteninstrumente ergeben für die gleiche Grundfrequenz Töne unterschiedlicher Klangfarbe. Diese entsteht dadurch, dass die Amplituden A_n der Oberschwingungen je nach den Anfangsbedingungen unterschiedlich sind und das Verhältnis der Amplituden A_n die Klangfarbe eines Instruments bestimmt. Die Phasenkonstante α_n (nach Gleichung (21)) hat keine akustische Bedeutung, weil das menschliche Ohr keine Phasenverschiebung wahrnimmt.

2. Versuch

2.1 Vorbetrachtung

Aufgabe: Eine Metallsaite einer Länge $l=120$ cm wird mit einer Kraft von $F_0=90$ N über einen Monochord gespannt. Diese Saite wird so zum Schwingen gebracht, dass $n=6$ Schwingungsknoten im Resonanzfall bei einer Frequenz $f_n=620$ Hz entstehen.

- Bestimmen Sie die Massendichte μ (nach Gleichung (13)) und die Phasengeschwindigkeit c_{trans} (nach Gleichung (8)).
- Welche Unterschiede bestehen bezüglich Massendichte μ und Phasengeschwindigkeit c_{trans} , wenn die Schwingungsknoten um $n=3$ erhöht werden und sich dabei eine Resonanzfrequenz von $f_n=930$ Hz einstellt.

2.2 Versuchsdurchführung

2.2.1 Verwendete Geräte

Monochord, Kraftmesser 100 N, Leistungs-Frequenzgenerator, Zweikanaloszilloskop

2.2.2 Versuchshinweise

Das Monochord besteht aus einem $(135 \times 10 \times 12)$ cm großen Holzkasten, auf dem drei Saiten gespannt sind. Eine der Saiten kann auf eine Kraft von $F=100$ N gespannt werden. Die Längenänderung der Saiteneinspannung (**Aufgabe 2**) wird durch den verschiebbaren Reiter erreicht.

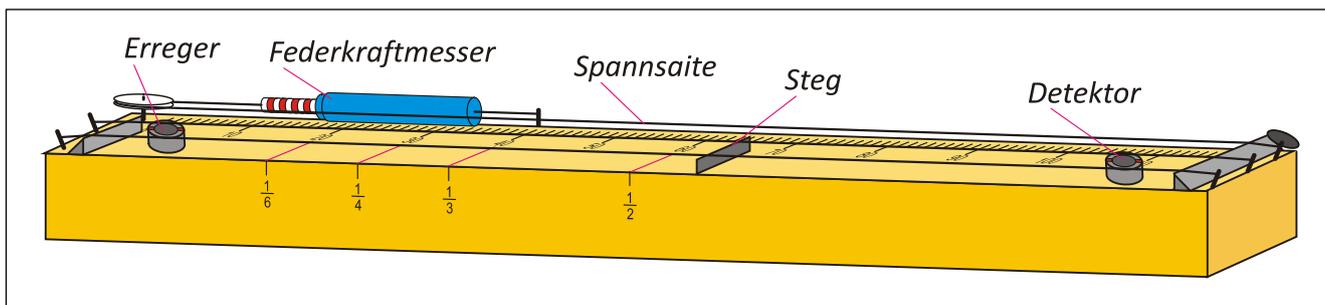


Bild: Prinzipieller Aufbau des Monochords

Die Saite wird durch eine auf einen Weicheisenkern gewickelte Spule magnetisch zum Schwingen angeregt. Positionieren Sie diese Erregerspule **ca. 5 cm** von einer Saitenauflage.

Ein Frequenzgenerator mit Leistungsausgang liefert den Strom für die Spule und erlaubt eine Änderung der Erregerfrequenz. Infolge der geringen Dämpfung der Saitenschwingung ist die Resonanz sehr scharf. Deshalb muss die Einstellung der Erregerfrequenz für die Grund- bzw. Oberschwingungen sehr sorgfältig erfolgen.

Ein Sinussignal wird mit Hilfe eines Frequenzgenerators über dessen Signalausgang (*Output*) der Erregerspule zugeführt. Infolge der Saitenschwingung wird in der Detektorspule, die auf einen permanentmagnetischen Kern gewickelt ist, eine Wechselspannung erzeugt, welche dem **Kanal 2** des Oszilloskops zugeführt wird.

Ordnen Sie die Detektorspule ebenfalls **ca. 5 cm** von der zweiten Saitenauflage an.

Eine exakte Positionierung der Erreger- und Detektorspule ist unkritisch, es muss jedoch darauf geachtet werden, dass sich die Spulenkern direkt unter der Saite befinden. Während der Messung kann die Position der Spulenkern zur Erreichung eines besseren Signalbildes leicht verändert werden. Ein Mindestabstand zwischen den Spulen ist zur Vermeidung einer direkten Wechselwirkung jedoch einzuhalten.

Aufgabe 1: Messung bei konstanter Saitenlänge und konstanter Zugkraft

- Messen Sie die Resonanzfrequenzen f_n und die Lagen der Schwingungsknoten **für $n=1$ bis $n=9$** bei fester Saitenlänge ($l=1,20$ m) und fester Zugkraft ($F_0=90$ N).

Aufgabe 2: Messung bei variabler Saitenlänge und konstanter Zugkraft

- Messen Sie die Resonanzfrequenzen f_1 (*Grundfrequenzen*) für **10 verschiedenen Saitenlängen l** zwischen $(120 \dots 30)$ cm in **10 cm-Schrittweiten** bei fester Zugspannung ($F_0=90$ N).
- Um die Saitenlänge l zu verkürzen, platzieren Sie den Steg unter der hinteren Saite. Die Erregerspule wird dabei immer **ca. 10 cm** vor dem Steg positioniert.

Aufgabe 3: Messung bei variablen Zugkräften und konstanter Saitenlänge

- Messen Sie die Resonanzfrequenzen f_1 für **9 verschiedene Zugkräfte** F_0 zwischen (20 ... 100) N in Schrittwerten von 10 N bei fester Saitenlänge ($l=1,20$ m).

2.3 Versuchsauswertung**Aufgabe 1:** Messung bei konstanter Saitenlänge und konstanter Zugkraft

- Berechnen Sie unter Verwendung des Anstiegs der graphischen Darstellung $f_n = f(n)$ die lineare Massendichte μ (nach Gl.(13)).
- Berechnen Sie die Messunsicherheit durch eine Fehlerrechnung für die lineare Massendichte unter Verwendung selbst festzulegender Fehlerbalken in der graphischen Darstellung.
- Berechnen Sie ebenfalls die Phasengeschwindigkeit c_{trans} der Transversalwelle (nach Gl. (6)).
- Überprüfen Sie die Beziehung $\lambda_n = 2l/n$ (nach Gl.(15)) durch Auswertung der Lage der Schwingungsknoten für die Moden $n=1$ bis $n=9$.

Aufgabe 2: Messung bei variabler Saitenlänge und konstanter Zugkraft

- Stellen Sie die Ergebnisse in einem Diagramm $f_1 = f(l^{-1})$ graphisch dar.
- Berechnen Sie unter Verwendung des Anstiegs in dieser Darstellung zunächst wieder die lineare Massendichte μ (nach Gl.(13)) und dann die Phasengeschwindigkeit c_{trans} (nach Gl. (6)).
- Bestimmen Sie die Messunsicherheit wie in **Aufgabe 1**.

Aufgabe 3: Messung bei variablen Zugkräften und konstanter Saitenlänge

- Stellen Sie die Ergebnisse in einem Diagramm $f_1 = f(\sqrt{F_0})$ graphisch dar.
- Berechnen Sie unter Verwendung des Anstiegs in dieser Darstellung wieder die lineare Massendichte μ (nach Gl.(13)) und dann die Phasengeschwindigkeit c_{trans} (nach Gl. (6)).
- Bestimmen Sie die Messunsicherheit wie in **Aufgabe 1**.

Aufgabe 4: Vergleich

- Vergleichen und diskutieren Sie die Ergebnisse der drei Messungen einschließlich ihrer Messunsicherheiten.
- Führen Sie diesen Vergleich auch in Bezug auf die Herstellerangabe $\mu=1,56 \text{ g}\cdot\text{m}^{-1}$ durch.

3. Ergänzung**3.1 Vertiefende Fragen**

Erklären Sie die Entstehung des Signals an der Detektorspule. Warum schwingt die Saite im Resonanzfall mit der doppelten Erregerfrequenz? Was versteht man unter der Phasengeschwindigkeit einer Welle? Wie kann man stehende Wellen erzeugen?

Hinweis:

Die Saiten des Monochords bestehen aus einem ferromagnetischen Material und besitzen im Gegensatz zu einem (Elektro-) Magneten keine magnetischen Pole. Der Kern der Erregerpule besteht aus einem weichmagnetischen Material.