

Die wichtigsten bei Schwingungen aller Art auftretenden Phänomene sollen an mechanischen Drehschwingungen untersucht werden.

1. Theoretische Grundlagen

1.1 Aufbau und Wirkungsweise des Pohlschen Rades

Die mathematischen Beschreibungen der unterschiedlichen schwingenden Systeme sind weitgehend analog, so dass man Erkenntnisse aus einem Bereich auch auf andere übertragen kann. Ein mechanischer Resonator, wie z.B. das Pohlsche Rad nach **Bild 1**, bietet gegenüber anderen, z.B. dem elektrischen Schwingkreis, den Vorteil größerer Anschaulichkeit.

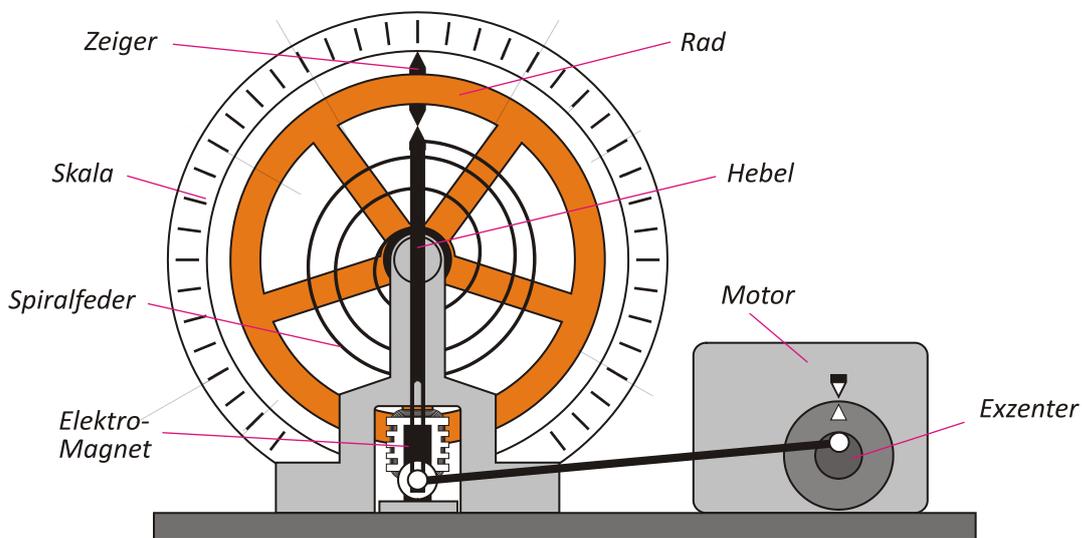


Bild 1: Drehpendel nach Pohl (schematisch)

Das Pohlsche Rad kann zu Drehschwingungen um eine horizontale Achse angeregt werden, wie sie z.B. auch in der „Unruh“ mechanischer Uhren auftreten. Es wurde von dem Physiker Robert Wichard Pohl (1884 - 1976) zu Demonstrationszwecken entwickelt.

Mit dem Pohlschen Rad können folgende Arten von Schwingungen beobachtet werden:

- Nach einmaligem Anstoßen schwingt das Pohlsche Rad ohne bzw. mit geringer Dämpfung. Dabei wird eine Schwingungsdauer T_0 bzw. Frequenz $f_0 = 1/T_0$ bzw. Eigenfrequenz $\omega_0 = 2\pi \cdot f_0$ beobachtet, die sogenannte **Eigenfrequenz der freien ungedämpften Schwingung**.
- Mit Hilfe der Stromstärke im Dämpfungsmagneten können verschieden starke Dämpfungen eingestellt werden. Die Schwingungsamplituden φ nehmen dann schneller ab, es liegt eine **gedämpfte Schwingung** vor. Die Kreisfrequenz ω ändert sich nur wenig gegenüber ω_0 .
- Durch periodische Erregung mit dem Motor, der sich mit der Erregerfrequenz ω_a dreht, werden erzwungene Schwingungen erzeugt. Bei Variation dieser Frequenz ω_a beobachtet man:
 - Im Bereich der Eigenfrequenz ω_0 des Pendels wird die Amplitude φ sehr groß, was als **Resonanz** bezeichnet wird.
 - Zwischen Erreger und Pendel besteht eine Phasenverschiebung. Das Pendel läuft gegenüber dem Erreger nach. Die Erscheinung ist besonders deutlich bei hohen Erregerfrequenzen ($\omega \gg \omega_0$), bei denen die Bewegung fast gegenphasig wird.

1.2 Analytische Beschreibungen der Bewegungen des Drehpendels

1.2.1 Der freie ungedämpfte Oszillator

Ein Oszillator, bei dem die Rückstellkraft \vec{F} proportional zur Auslenkung \vec{s} gemäß

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{s} \quad k: \text{Federkonstante}, [k] = \text{N} \cdot \text{m}^{-1} \quad (1)$$

ist, heißt harmonischer Oszillator. Die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators mit der Masse m ergibt sich bei vernachlässigbarer Reibung aus der Kraftbilanz

$$m \cdot \ddot{\vec{s}} + k \cdot \vec{s} = 0. \quad (2)$$

Im vorliegenden Versuch wird als Oszillator ein drehbar gelagertes Metallrad mit dem Trägheitsmoment J verwendet. Durch eine Spiralfeder wirkt auf das Rad bei einer Auslenkung um den Winkel φ aus seiner Ruhelage ein rückstellendes Drehmoment

$$M = -D \cdot \varphi. \quad D: \text{Direktionsmoment der Feder}, [D] = \text{N} \cdot \text{m} \quad (3)$$

In Analogie zu Gleichung (2) ist die Bewegungsgleichung des Metallrades

$$J \cdot \ddot{\varphi} + D \cdot \varphi = 0 \quad (4)$$

Als Lösungsansatz dieser Differentialgleichung wird verwendet:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t - \alpha) \quad (5)$$

Die Konstanten φ_0 und α sind durch die Anfangsbedingungen $\varphi(t=0)$ und $\dot{\varphi}(t=0)$ bestimmt. Man setzt die Gleichung (5) in (4) ein und erhält die Kreisfrequenz ω_0 des harmonischen Oszillators

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}. \quad (6)$$

Insbesondere sind die Eigenfrequenz und damit die Schwingungsdauer beim harmonischen Oszillator also unabhängig von der Amplitude der Schwingung.

1.2.2 Der freie gedämpfte Oszillator

Bei mechanischen Oszillatoren nimmt wegen der unvermeidbaren Reibungskräfte die Amplitude der Schwingung mit der Zeit ab. Damit entsteht eine **gedämpfte Schwingung**. In vielen (*aber nicht allen*) Fällen ist Reibungskraft in erster Näherung zur Geschwindigkeit proportional und zu dieser entgegengesetzt gerichtet. Bei einem solchen linear gedämpften Oszillator gilt dann

$$\vec{F}_R = -\gamma \cdot \dot{\vec{s}}. \quad (7)$$

Die Konstante γ wird als Reibungsfaktor bezeichnet.

Bei dem verwendeten Drehpendel läuft ein Teil des Metallrades durch das Feld eines Elektromagneten (**Bild 2**). Die mitbewegten Elektronen erfahren eine Lorentzkraft, werden senkrecht zur Feld- und Bewegungsrichtung des Rades abgelenkt und fließen anschließend durch den feldfreien Teil des Rades zurück. Dadurch entsteht ein geschlossener Wirbelstromkreis.

Der im Magnetfeld befindliche Teil des Metallrades wirkt wie ein bewegter, stromdurchflossener Leiter, auf den dann eine zur Bewegungsrichtung entgegengesetzte und zur Geschwindigkeit proportionale Kraft F wirkt. Diese erzeugt ein bremsendes Drehmoment

$$M_R = -\beta \cdot \dot{\varphi}. \quad (8)$$

Die Bewegungsgleichung des freien gedämpften Oszillators unterscheidet sich von Gleichung (4) durch einen zusätzlichen Reibungsterm:

$$J \cdot \ddot{\varphi} + \beta \cdot \dot{\varphi} + D \cdot \varphi = 0 \quad (9)$$

Der Lösungsansatz

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot e^{\lambda \cdot t - \alpha} \quad (10)$$

wird in Gleichung (9) eingesetzt und ergibt für λ die sogenannte charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + \frac{\beta}{J} \cdot \lambda + \frac{D}{J} = 0 \quad (11)$$

mit den beiden Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad (12)$$

wobei
$$\delta = \frac{\beta}{2J} \quad (13)$$

als Dämpfungskonstante δ bezeichnet wird. Sie hat die Dimension einer Frequenz.

Die physikalische Verhaltensweise des Drehpendels hängt entscheidend davon ab, ob die Wurzel in Gleichung (12) reell oder imaginär ist oder aber verschwindet. Die Lösungsterme von Gleichung (9) werden hier für die drei Fälle nur angegeben. Für die Herleitung sei auf die Literatur verwiesen.

1. Fall: $\delta < \omega_0$ (*schwach gedämpfter Fall*)

Der Exponent in Gleichung (10) besitzt in diesem Fall einen Real- und einen Imaginärteil. Der Imaginärteil des Exponenten verursacht nach der Eulerschen Gleichung

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x, \quad (14)$$

dass die Lösungen von Gleichung (9) periodisch werden. Der Realteil des Exponenten bewirkt eine exponentielle Abnahme der Schwingungsamplitude.

Der Realteil der Lösung hat die Form

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t - \alpha) \quad (15)$$

mit
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (16)$$

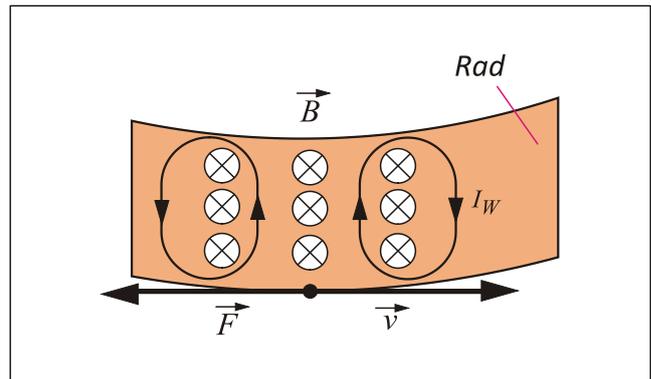


Bild 2: Entstehung von Wirbelströmen

Die Schwingungsfrequenz des gedämpften Oszillators ist also von seiner Eigenfrequenz ω_0 verschieden. Die Konstanten φ_0 und α sind wieder durch die Anfangsbedingungen bei $t=0$ festgelegt. Nach Gleichung (15) ist die Amplitude der gedämpften Schwingung nach der Zeit

$$\tau = \delta^{-1} \quad (17)$$

auf den e-ten Teil ihres Anfangswertes gefallen. τ wird als Abklingzeit bezeichnet. Das Verhältnis von zwei aufeinander folgenden gleichsinnigen Amplituden φ_n und φ_{n+1}

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}} = e^{\delta \cdot T} \quad T: \text{Schwingungsdauer} \quad (18)$$

wird als logarithmisches Dekrement Λ bezeichnet:

$$\Lambda = \delta \cdot T = \ln \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}} \quad (19)$$

2. Fall: $\delta > \omega_0$ (stark gedämpfter Fall)

Die beiden in Gleichung (10) möglichen Exponenten sind reell und die Lösung von (9) lautet mit (16)

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot (e^{\omega \cdot t} + e^{-\omega \cdot t}) \quad (20)$$

Das Drehpendel nähert sich also nach seiner Auslenkung ohne Oszillation asymptotisch der Gleichgewichtslage, und zwar umso langsamer, je größer die Dämpfungskonstante ist. Dieser Fall wird als Kriechfall bezeichnet.

3. Fall: $\delta = \omega$ (aperiodischer Grenzfall)

Die Lösung von Gleichung (9) hat dann die Form

$$\varphi(t) = (\varphi_0 + \delta \cdot t) \cdot e^{-\delta \cdot t} \quad (21)$$

Die Dämpfung ist so groß, dass es gerade nicht mehr zu einem Durchgang durch die Ruhelage kommt. Jede noch so kleine Verringerung der Dämpfung führt zu einer Oszillation.

Dieser sogenannte aperiodische Grenzfall ist von praktischer Bedeutung, weil die Zeit, die zum Erreichen der Nulllage benötigt wird, minimal ist. Ein schwingungsfähiges Messsystem (z.B. Zeiger eines Drehpulsessgerätes) wird deshalb möglichst aperiodisch gedämpft ausgelegt.

1.2.3 Erzwungene gedämpfte Schwingung

Die Schwingungsfrequenz des freien Oszillators ist nach Gleichung (6) und (16) vom Verhältnis zwischen seinem Trägheitsmoment und dem Rückstellmoment (*Direktionsmoment*) der Feder sowie (*in geringem Maß*) von seiner Dämpfung bestimmt. Es soll nun untersucht werden, wie der Oszillator auf ein von außen zusätzlich angreifendes periodisches Drehmoment

$$M_a = M_0 \cdot \sin \omega_a \cdot t \quad (22)$$

reagiert. Als Bewegungsgleichung ergibt sich

$$J \cdot \ddot{\varphi} + \beta \cdot \dot{\varphi} + D \cdot \varphi = M_0 \cdot \sin \omega_a \cdot t \quad (23)$$

Die Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung ist die Summe einer speziellen (*partikulären*) Lösung und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ($M_0=0$). Letztere

klingt aber nach Gleichung (15) exponentiell ab und spielt damit nach genügend großer Zeit keine Rolle mehr. Für die spezielle Lösung erhält man aus dem Ansatz

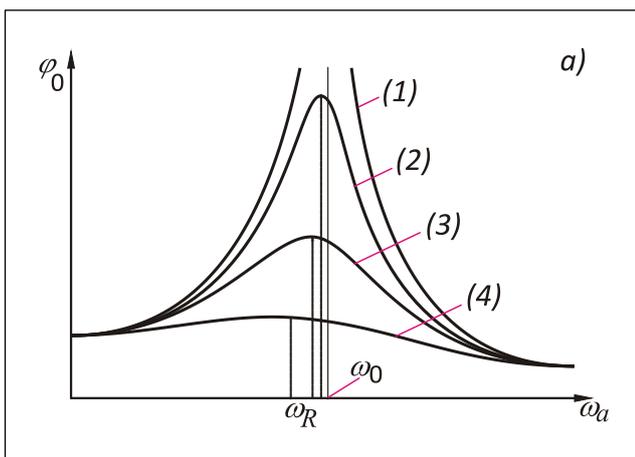
$$\varphi(t) = \varphi_0(\omega_a) \cdot \sin(\omega_a \cdot t - \alpha) \quad (24)$$

durch Differenzieren und Einsetzen in Gleichung (23) nach mehreren trigonometrischen Umformungen die Amplitude der erzwungenen Schwingung

$$\varphi_0(\omega_a) = \frac{\frac{M_0}{J}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_a^2) + \left(\frac{\beta}{J} \cdot \omega_a\right)^2}} \quad (25)$$

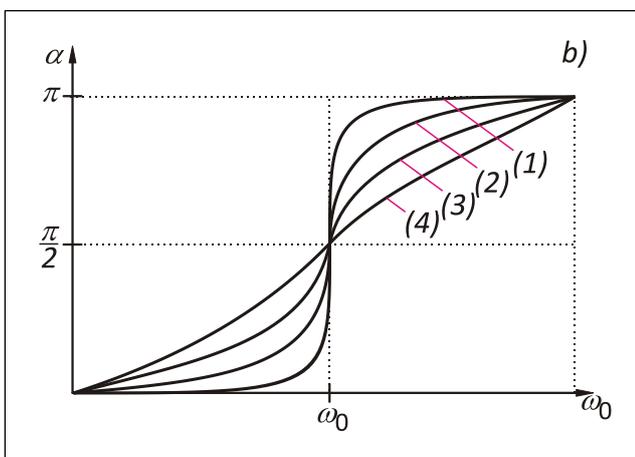
Die Anregungsfrequenz, bei der die Amplitude maximal wird, heißt Resonanzfrequenz $\omega_{a,R}$ (*Amplitudenresonanz*). Dies ist dann der Fall, wenn der Radikant im Nenner minimal wird. Durch Nullsetzen der Ableitung des Radikanten nach ω erhält man

$$\omega_{a,R} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^2}{2J^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (26)$$



Die Resonanzfrequenz unterscheidet sich umso weniger von der Eigenfrequenz ω_0 , und die Resonanzamplitude wird umso höher, je geringer die Dämpfung (**Bild 3a**) ist. Bei verschwindender Dämpfung ($\beta \rightarrow 0$) würde die Amplitude bei der Resonanzfrequenz $\omega_a = \omega_0$ gegen unendlich gehen (*Resonanzkatastrophe*).

Aus Gleichung (25) liest man ab, dass für $\omega_a \gg \omega_0$ die Amplitude der erzwungenen Schwingung gegen Null geht. Für $\omega_a \ll \omega_0$ geht die Amplitude gegen den von Null verschiedenen Wert M_0/D . Die Resonanzkurve $\varphi_0(\omega_a)$ ist nicht symmetrisch zur Resonanzfrequenz!



Von der soeben betrachteten Amplitudenresonanz zu unterscheiden ist die Energieresonanz. Man kann zeigen, dass der Oszillator maximale Energie besitzt, wenn $\omega_a = \omega_0$ (*Energieresonanz*). Energie- und Amplitudenresonanz erhält man also bei verschiedenen Erregerfrequenzen.

Für die Phasenverschiebung α zwischen Erreger und Oszillator ergibt sich bei der Herleitung von Gleichung (25)

Bild 3: Resonanzkurven(**a**) und Phasenverschiebung(**b**) zwischen Erreger und Oszillator für verschiedene Dämpfungskonstanten

$$\tan \alpha = \frac{2\delta \cdot \omega_a}{\omega_0^2 - \omega_a^2} \quad (27)$$

Bei $\omega_a \ll \omega_0$ schwingen Oszillator und Erreger nahezu in Phase, bei $\omega_a \gg \omega_0$ nahezu gegenphasig. Für $\omega_a = \omega_0$ läuft der Oszillator dem Erreger genau um $\frac{1}{2} \pi$ voraus (**Bild 3b**).

2. Versuch

2.1 Vorbetrachtung

- Was ist ein harmonischer Oszillator und wie wird er im Versuch realisiert?
- Wie kann der Oszillator (*Pohlsches Rad*) gedämpft werden? Beschreiben Sie stichpunktartig die Funktionsweise dieser Dämpfung.
- Was passiert mit dem Oszillator (*Pohlsches Rad*) im Resonanzfall bei einer erzwungenen gedämpften Schwingung? Skizzieren Sie, wie zum einen die Amplitude und zum anderen die Phasenverschiebung von der Schwingungsfrequenz abhängen.

2.2 Versuchsdurchführung

2.2.1 Verwendete Geräte

Drehpendel nach Pohl, Drehpendel-Netzgerät, Stoppuhr, Strommesser, Spannungsmesser, Experimentierkabel

2.2.2 Versuchshinweise

Aufgabe 1: Schwingungsdauer T_0 , Eigenfrequenz f_0 und Eigenkreisfrequenz ω_0

- Für die Bestimmung der Eigenkreisfrequenz des Drehpendels ist der Dämpfungsstrom **gleich Null** ($I_D=0$).
- Lenken Sie das Drehpendel mit der Hand aus und bestimmen Sie die Gesamtzeit für **10 Schwingungen** ($t=10 \cdot T$).
- Nehmen Sie eine Messreihe **von 10 Messungen** auf.

Aufgabe 2: Bestimmung von Schwingungen mit **3 Dämpfungen**

- Messen Sie die Amplitude $\hat{\varphi}(t)$ des Drehpendels als Funktion der Zeit bei verschiedenen starken Dämpfungen.
- Überprüfen Sie die Schaltbelegung des Pohlschen Rades nach **Bild 4**.

Aufgabe 2a:

- Stellen Sie einen Dämpfungsstrom von $I_D=0,05 \text{ A}$ ein.
- Lenken Sie das Drehpendel bis zum Anschlag aus und lesen Sie nach **jeder zehnten Schwingung** die Amplitude $\hat{\varphi}(t)$ immer auf der gleichen Seite ab.

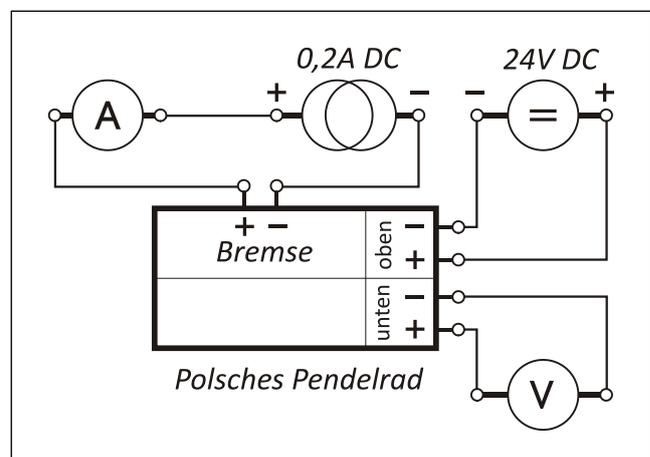


Bild 4: Schaltbelegung

- Ermitteln Sie gleichzeitig die Gesamtzeit für **130 Schwingungen** ($t=0\cdot T$ bis $t=130\cdot T$).

Aufgabe 2b:

- Stellen Sie einen Dämpfungsstrom von $I_D=0,25\text{ A}$ ein.
- Lenken Sie das Drehpendel bis zum Anschlag aus und lesen Sie nach **jeder Schwingung** die Amplitude $\hat{\varphi}(t)$ immer auf der gleichen Seite ab.
- Ermitteln Sie gleichzeitig die Gesamtzeit für **15 Schwingungen** ($t=0\cdot T$ bis $t=15\cdot T$).

Aufgabe 2c:

- Stellen Sie einen Dämpfungsstrom von $I_D=0,45\text{ A}$ ein.
- Lenken Sie das Drehpendel bis zum Anschlag aus und lesen Sie nach **jeder Schwingung** die Amplitude $\hat{\varphi}(t)$ immer auf der gleichen Seite ab.
- Ermitteln Sie gleichzeitig die Gesamtzeit für **10 Schwingungen** ($t=0\cdot T$ bis $t=10\cdot T$).

Aufgabe 3: Kriechfall

- Realisieren Sie den Kriechfall durch Erhöhung der Dämpfung.
- Nehmen Sie die Kurven $\hat{\varphi}(t) = f(t)$ für die Dämpfungsströme **1,1 A**, **1,5 A** und **1,8 A** qualitativ auf und skizzieren Sie diese.
- Schätzen Sie dabei den Dämpfungsstrom im **aperiodischen Grenzfall** ab.

Hinweis:

Dämpfungsströme über **1 A** nur **kurze Zeit** auf die Spule wirken lassen, da sonst eine zu starke Erwärmung eintritt!

Aufgabe 4: Bestimmung von Resonanzkurven mit **zwei Dämpfungen**

- Ermitteln Sie für zwei unterschiedliche Dämpfungsströme die Resonanzkurven.
- Vergleichen Sie die Schwingungsdauer von Erreger und Oszillator und beobachten Sie qualitativ die Phasenverschiebung.
- Nehmen Sie die Amplitude auf, indem Sie einen Spannungsbereich **von 5 V** einstellen und diesen **bis 10 V** in Abständen **von 1 V** erhöhen. Ermitteln Sie den Resonanzfall. Nehmen Sie **je 3 weitere Messwerte** in einer Schrittweite **von 0,2 V** links und rechts vom Resonanzmaximum auf.

Die Dämpfungsströme sind: a) **0,15 A**
b) **0,40 A**

Hinweis:

Bei jeder Neueinstellung ist der Einschwingvorgang bis zur maximalen Auslenkung abzuwarten! Beschleunigt kann die Messung werden, durch kurzes Anhalten des Drehpendels mit der Hand und folgendem Abwarten des Einschwingens.

- Ermitteln Sie die Frequenz f_a über die Bestimmung der Umdrehungszeit T_a des Antriebsrades für **mindestens 10 Umdrehungen** mit der Stoppuhr.

2.3 Versuchsauswertung

Aufgabe 1: Schwingungsdauer T_0 , Eigenfrequenz f_0 und Eigenkreisfrequenz ω_0

- Bestimmen Sie die mittlere Schwingungsdauer T und die daraus resultierende Eigenfrequenz f_0 , sowie die Eigenkreisfrequenz ω_0 des Drehpendels bei ausgeschalteter Wirbelstrombremse einschließlich der Messunsicherheit durch eine Fehlerrechnung aus der Summe des systematischen und des zufälligen Fehlers (*Mittelwert, Standardabweichung, t-Verteilung*).

Aufgabe 2: Bestimmung von Schwingungen mit **3 Dämpfungen (2a, 2b, 2c)**

- Bestimmen Sie die Schwingungsdauer T aus den jeweils zu messenden Gesamtzeiten.
- Stellen Sie die Funktion $\hat{\varphi}/Skt = f(n)$ auf Millimeterpapier und halblogarithmischem Papier graphisch dar. ($\hat{\varphi}/Skt = \text{Skalenteile (log.)}$; $n = \text{Anzahl der Schwingungen (linear)}$)
- Zeichnen Sie die Regressionskurven bzw. die Regressionsgeraden ein und beachten Sie die Linearisierung der Funktionen bei der halblogarithmischen Darstellung.
- Erläutern Sie durch welche äußeren Einflüsse es zu dieser Abweichung kommt.
- Bestimmen Sie die Abklingzeiten τ aus den Mittelwerten der folgenden 2 Methoden:
 - Berechnen Sie die Abklingzeiten τ aus den Anstiegen der Regressionsgeraden (*halblog. Darstellung*).
 - Bestimmen Sie aus den halblogarithmischen Darstellungen die Abklingzeiten τ nach ($\tau = n \cdot T$).
- Berechnen Sie die Dämpfungskonstanten δ nach Gl. (17) sowie die logarithmischen Dekremente Λ nach Gl. (19).
- Bestimmen Sie die Messunsicherheiten der Schwingungsdauern T , der Abklingzeiten τ , der Dämpfungskonstanten δ , und dem logarithmischen Dekremente Λ durch eine Fehlerrechnung.
- Stellen Sie in einem Diagramm die Funktion $\delta = f(I_D^2)$ graphisch dar und bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen Dämpfungskonstante und Stromstärke der Wirbelstrombremse.

Aufgabe 3: Für welche Stromstärke ist das Drehpendel gerade aperiodisch gedämpft?

Aufgabe 4: Bestimmung von Resonanzkurven mit **2 Dämpfungen**

- Stellen Sie die gemessenen Amplituden in Abhängigkeit von der Anregungsfrequenz f_a graphisch dar (*Funktion der Resonanzkurven $\hat{\varphi}(t) = f(f_a)$*) und ermitteln Sie aus dem Diagramm die jeweilige Resonanzfrequenz.
- Welche Phasenbeziehungen sind zu beobachten?

3. Ergänzung

Unter der Voraussetzung, dass die Amplitude hinreichend klein ist, können viele Oszillatoren zumindest in der ersten Näherung als harmonisch betrachtet werden, indem man die Rückstellkraft F_S um die Ruhelage $s=0$ in eine Reihe entwickelt und nach dem linearen Term abbricht.

Alle harmonischen Schwingungsvorgänge führen auf eine Differentialgleichung mit der Form Gl. (9) bzw. Gl. (24). Die bei diesem Versuch erhaltenen Lösungen können folglich z.B. auch auf elektrische Schwingungen übertragen werden.