

Mit der Messung der Kräfte zwischen geladenen Körpern soll die Gültigkeit des Coulombschen Gesetzes nachgewiesen werden.

1. Theoretische Grundlagen

Aus der klassischen Mechanik ist als einzige grundlegende Wechselwirkung die Gravitation bekannt. Für die Massenanziehungskraft zwischen einem Elektron und einem Proton in dem Abstand, der gleich dem Radius eines Wasserstoffatoms ist, erhält man

$$F = \gamma \cdot \frac{m_p \cdot m_e}{r_H^2} = 3,61 \cdot 10^{-47} \text{ N} \quad (1)$$

Es existiert aber außerdem noch eine andere Anziehungskraft zwischen Elektron und Proton, die $8,19 \cdot 10^{-8} \text{ N}$ beträgt, also $2,27 \cdot 10^{39}$ -fach größer ist! Diese viel stärkere Kraft, die wie die Gravitationskraft umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands ist, wird **elektrostatische Kraft** genannt.

1.1 Coulombsches Gesetz

Eine geladene Kugel erzeugt ein radialsymmetrisches elektrisches Feld \vec{E} und übt somit eine Kraft in Richtung der Feldlinien auf jede Ladung aus, die sich in ihrem Feldraum befindet. Dieses Feld ist ein elektrostatisches Feld, d. h. solange eine Ladung auf der Kugeloberfläche konstant bleibt, verändern sich auch die Feldlinien nicht. Lediglich durch ein anderes elektromagnetisches Feld oder durch einen leitenden Körper innerhalb des elektrischen Feldes kann es beeinflusst werden. Legt man nun um Ladungen eine geschlossene Fläche, in diesem Fall ist es eine Kugeloberfläche, so ist der durch die Oberfläche durchgehende elektrische Fluss ψ gleich der Summe aller einzelnen Ladungen Q_i . Aus dieser Annahme und aus dem Zusammenhang zwischen dem elektrischen Fluss und der Verschiebungsdichte D ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \psi &= \oiint D \cdot dA \\ &= \varepsilon_0 \oiint E \cdot dA \\ &= \varepsilon_0 \cdot E \oiint dA \\ &= \varepsilon_0 \cdot E \cdot (4\pi \cdot r^2) \\ &= \sum_i Q_i \end{aligned} \quad (2)$$

Daraus und durch Einführen des Einheitsvektors ergibt sich die vektorielle Beziehung für die elektrische Feldstärke einer Punktladung Q_1 .

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (3)$$

Das elektrostatische Feld ist ein Quellenfeld, dabei entspringt die Feldlinie aus einer sogenannten „Quelle“ (+) und endet in einer „Senke“ (–). Wird also eine zweite Ladung in den Feldbereich der ersten gebracht, so wirkt eine Kraft in Richtung der Feldlinien.

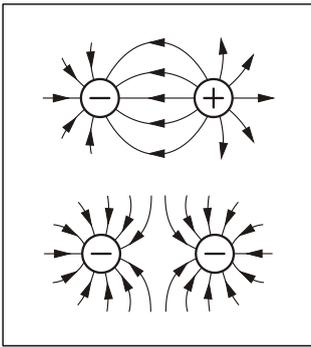


Bild 1: Feldlinienverlauf zwischen den Ladungen

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot Q_2 \quad (4)$$

Das **Bild 1** zeigt den Feldlinienverlauf mit unterschiedlichen Ladungen für Q_2 . Besitzen dabei beide Ladungen unterschiedliche Polaritäten, ziehen sie sich gegenseitig an, wogegen sie sich bei gleichen Ladungen abstoßen. Setzt man nun Gleichung (3) in (4) ein, erhält man das Coulombsche Gesetz der Elektrostatik.

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (5)$$

Da die Äquipotentialflächen konzentrische Kugelflächen mit Q als Mittelpunkt sind, kann das Coulombsche Gesetz auch für geladene Kugeln angenommen werden, allerdings nur sofern der Kugelradius $R \ll$ dem Kugelabstand r ist.

1.2 Torsions-Drehwaage

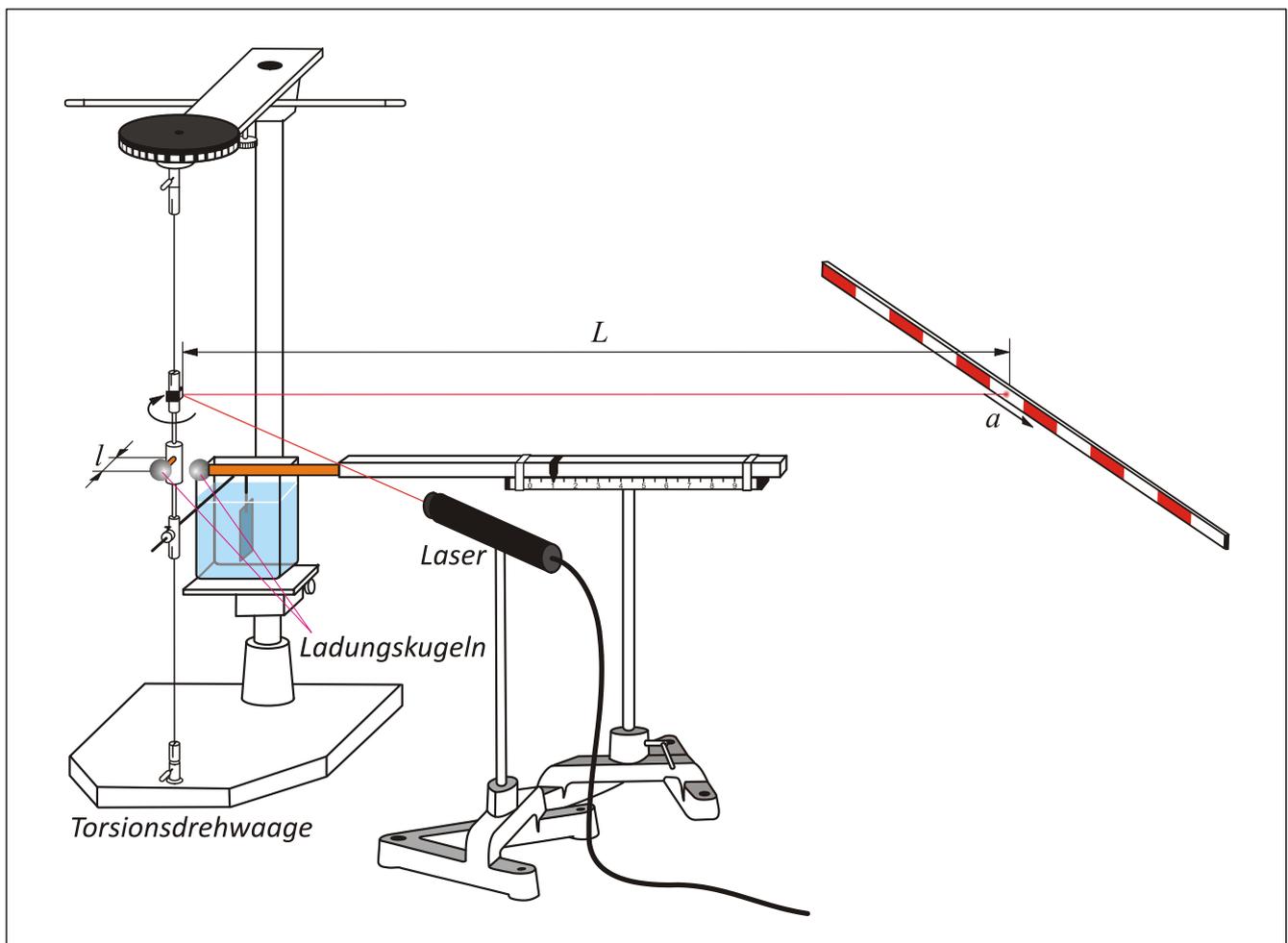


Bild 2: Versuchsaufbau

Die von SCHÜRHOLZ entworfene Torsions-Drehwaage ist zum Messen kleiner Kräfte und Drehmomente geeignet. Sie besteht aus einem Metallgestell, in das zwischen zwei Torsionsdrähten ein Dreh-

körper zur Befestigung verschiedener Apparateile eingespannt werden kann. Über diesem Drehkörper ist zur Beobachtung der Drehbewegung ein Hohlspiegel angebracht. Zur Verstärkung der Auslenkung wird mit Hilfe eines Lasers eine Markierung auf den Spiegel projiziert. Die Reflektion dieser Markierung wird dann auf eine im Abstand L stehende Skala geworfen.

Mit einem Bandgenerator werden Ladungen erzeugt und mit einer Transportkugel auf die beiden anderen Kugeln übertragen. Durch die feststehende Kugel kann über das verstellbare Stativ der Abstand zwischen den Kugeln verändert werden. Im Ruhezustand sollte der Punkt im vorderen Teil der Skala liegen (ca. (0 ... 10) cm). Das kann erreicht werden, durch Verdrehen der Trommel am oberen Teil der Torsions-Drehwaage oder indem der Standpunkt der Skala verändert wird. Sind beide Kugeln geladen, entsteht eine Torsion der Drähte, welche einen Ausschlag des Laserstrahls auf der Skala zur Folge hat. Damit nach dem Ausschlag die Einschwingzeit nicht zu groß wird, ist am unteren Drehkörper eine Dämpfungsfahne angebracht. Diese sollte für eine ausreichende Dämpfung **ca. 1 cm** in das Wasser des Dämpfungsbehälters eingetaucht sein.

Da die Luft zwischen den beiden Kugeln nicht als hundertprozentiger Isolator wirkt, kommt es zu einer Entladung.

Wirkt durch das elektrostatische Feld eine Kraft auf beide Kugeln, entsteht ein entsprechendes Drehmoment M . Dieses Moment führt zu einer Verdrehung aus der Ruhelage um den Winkel α . Zwischen diesen beiden Größen besteht eine lineare Beziehung.

$$M = D \cdot \alpha \quad (6)$$

Die Winkelrichtgröße D ist eine Materialeigenschaft des Torsionsdrahtes und wird in **Aufgabe 1** bestimmt (siehe **Abschnitt 1.2.1**).

Der Winkel α kann aus dem Ausschlag des Lichtzeigers a und dem Abstand L der Skala zum Drehspiegel bestimmt werden ($L > 2 \text{ m}$).

$$\alpha = \frac{a}{2L} \quad (7)$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ ergibt sich aus der Winkelverdopplung des Laserstrahls bei der Reflexion am Spiegel. Aus den Gleichungen (6) und (7) ergibt sich mit l als Abstand der geladenen Kugel zum Torsionsdraht:

$$F = \frac{M}{l} = D \cdot \frac{\alpha}{l} = D \cdot \frac{a}{2L \cdot l} \quad (8)$$

und damit der Zusammenhang zwischen Lichtzeigerausschlag und Coulombkraft.

1.2.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße

Ein schwingungsfähiges System, wie das der Drehwaage, bei dem zwischen Drehmoment M und Drehwinkel α die lineare Beziehung nach Gl. (6) besteht, kann harmonische Drehschwingungen ausführen. Das Produkt aus Trägheitsmoment J und der Winkelbeschleunigung α muss dann gleich dem rücktreibenden Drehmoment der elastischen Verdrillung sein:

$$J = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -D \cdot \alpha \quad (9)$$

Mit dem Ansatz

$$\alpha = A_0 \cdot \sin 2\pi \cdot \frac{t}{T}$$

folgt daraus

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \alpha = -\frac{D}{J} \cdot \alpha$$

und

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} . \quad (10)$$

Aus diesem Zusammenhang kann man D entnehmen, wenn man das Trägheitsmoment J kennt und die Schwingungsdauer T misst.

Das Trägheitsmoment des Drehkörpers allein (J_0) ist klein und nicht einfach anzugeben. Setzt man aber den beiliegenden Stab in die vorgesehene Bohrung des Drehkörpers ein, so kann man dessen Trägheitsmoment J_1 nach der Gleichung

$$J_1 = \frac{1}{12} m_S \cdot l_S^2 \quad (11)$$

berechnen. Da dieses Trägheitsmoment J_1 viel größer ist als das Trägheitsmoment des Drehkörpers J_0 , kann es allein in die Formel für die Drehschwingung eingesetzt werden.

Aus den Gleichungen (10) und (11) ergibt sich für die Winkelrichtgröße D folgender Zusammenhang:

$$D = 4\pi^2 \cdot \frac{J_1}{T^2} . \quad (12)$$

2. Versuch

2.1 Vorbetrachtung

Aufgabe: Mit der Schürholz-Torsionsdrehwaage (*siehe Bild 2*) können sehr kleine Kräfte gemessen werden, z. B. zwischen zwei gleich aufgeladenen Kugeln, die in einem bestimmt Abstand r zueinander stehen.

Bestimmen Sie die Ladungsmenge Q der Kugeln nach dem Coulombschen Gesetz, wenn die Ladungen der Kugeln gleich groß sind und das lineare Verhältnis $\Delta F / \Delta r^{-2} = 1,5 \mu\text{N} \cdot \text{m}^2$ ist.

2.2 Versuchsdurchführung

2.2.1 Verwendete Geräte

Stab zur Bestimmung der Winkelrichtgröße, Bandgenerator mit Motor, Torsions-Drehwaage, 3 Metallkugeln mit hoch isolierenden Stäben, Laser, Handgriff, Stativ mit Millimeterskala, Bandmaß, destilliertes Wasser, Stoppuhr, Messschieber, Laborwaage

2.2.2 Versuchshinweise

- Da das vom Bandgenerator erzeugte elektrische Feld die Messung beeinflussen kann, ist der Bandgenerator auf der anderen Seite des Versuchsplatzes angeordnet.
- Die Torsionsdrehwaage und der Bandgenerator sind mit dem Massepotential verbunden (*Erde*).
- Der Abstand zwischen der Kugel am Drehkörper und der am Stativ muss **mindestens 5 cm** betragen, da sonst nicht mehr von Punktladungen ausgegangen werden kann.
- Der reflektierte Laserstrahl sollte möglichst senkrecht auf die Skala treffen, um Verzerrungen durch unterschiedliche Auftreffwinkel zu vermeiden.
- Erden Sie beide Kugeln mit Hilfe der Messleitung zum Einstellen des Nullwertes. Notieren Sie sich den Nullwert.

Hinweis:

*Hinreichende Isolation ist für den gesamten Versuch Bedingung. Deshalb sollten die Kugeln und deren hochisolierende Stäbe **nicht** mit den bloßen Händen berührt werden. Ist dennoch die Isolation außergewöhnlich schlecht, kann eine Reinigung mit Alkohol hilfreich sein.*

Aufgabe 1: Bestimmung der Winkelrichtgröße D entsprechend **Abschnitt 1.2.1**

- Demontieren Sie die Dämpfungsfahne und die Metallkugel von der Drehwaage und setzen Sie den bereitliegenden Metallstab ein.
- Messen Sie zur Bestimmung der Schwingungsdauer $T=50$ **Schwingungen** mit der Stoppuhr.
- Für die Berechnung der Winkelrichtgröße D benötigen Sie die Stablänge l_S sowie die Stabmasse m_S .

Aufgabe 2: Entladung bei konstantem Ladungskugelabstand

Mit diesem Versuch soll ein Gefühl für die durchzuführende Messung erlangt werden. Es sollen bei den weiteren Messungen zum einen bei der Versuchsdurchführung Fehler vermieden und zum anderen eine Abschätzung für die zu erwartenden Messgrößen erhalten werden.

- Führen Sie die Messung mit einem Ladungskugelabstand **von $r=5$ cm** durch.
- Überprüfen Sie den Aufbau des Versuchstandes (*entsprechend Bild 1*).
- Verwenden Sie zur Erzeugung der Ladungen den Bandgenerator mit Motorantrieb.

Durch den Antriebsmotor fährt das Band über den aufliegenden Massekamm bzw. dem anliegenden Massepotential. Die Ladungen werden getrennt und auf die große Kugeloberfläche des Generators gebracht.

- Schalten Sie den Bandgenerator ein und lassen Sie ihn **ca. eine Minute** laufen.
- Benutzen Sie zum Abgreifen bzw. zum Transportieren der gewonnenen Ladungsmengen die Kugel mit dem Handgriff.
- Laden Sie so nach und nach im Wechsel die feststehende (*Kugel am Stativ*) bzw. die bewegliche Kugel (*an der Torsions-Drehwaage*) der Messanordnung auf (*etwa 4 bis 5-mal*). Der Bandgenerator bleibt während des Aufladens ständig in Betrieb.
- Nach dem Einschwingvorgang (*Laserpunkt steht fest auf der Skala*) Beginnen Sie mit der Messung.
- Ermitteln Sie den Ausschlag des Lichtzeigers a über einen Zeitraum von **0 bis 14 Minuten** in einem Intervall von **2 min**.

Hinweis: Der resultierende Ausschlag a durch die Kraftwirkung der Ladung ist immer die Differenz des jeweiligen abgelesenen Skalenwertes zum Nullwert (keine Ladung auf den Kugeln)!

- Vermeiden Sie Erschütterungen bzw. Luftverwirbelungen während der Messung.
- Entladen Sie die Kugeln **nach der Messung** vollständig, indem Sie mit Hilfe der beiliegenden Messleitung alle Kugeln kurz erden.
- Wiederholen Sie die Messung mit einem Ladungskugelabstand **von $r=10$ cm**.

Aufgabe 3: Aufnahme einer (*relativ*) konstanten Ladung in Abhängigkeit des Ausschlages vom Abstand zwischen den Kugeln

- Nehmen Sie für die unterschiedlichen Ladungskugelabstände a zwischen (**10 ... 25**) **cm** (*in 5cm-Schritten*) den Wert für den jeweils resultierenden Ausschlag des Lichtzeigers auf.
- Beginnen Sie beim größten Wert (**$r=25$ cm**). Nehmen Sie zusätzlich noch den Wert für den resultierenden Ausschlag des Lichtzeigers bei den Ladungskugelabständen von **7 und 5 cm** auf.
- Warten Sie nach jeder Abstandsänderung den Einschwingvorgang ab.
- Laden Sie die Kugeln für diese Messreihe **nur einmal auf**.
- Entladen Sie die Kugeln **nach der Messung** vollständig, indem Sie mit Hilfe der beiliegenden Messleitung alle Kugeln kurz erden.
- Führen Sie diese Messung insgesamt **dreimal** durch.

Aufgabe 4: Aufnahme einer (*relativ*) konstanten Ladung sowie einer halben Ladung in Abhängigkeit des Ausschlages vom Abstand zwischen den Kugeln

- Gehen Sie bei der Erzeugung der Ladungen, die zur Kraftbestimmung benötigt werden, analog zur **Aufgabe 2** vor.
- Nehmen Sie die Messwerte für Ladungskugelabstände a zwischen (**10 ... 20**) **cm** (*in Schrittweiten von 2 cm*) auf.
- Gehen Sie dabei wie in **Aufgabe 3** vor und wiederholen Sie diesen Vorgang mit einer halbierten Ladung.

Hinweis: Die Ladungshalbierung erreichen Sie, indem Sie die Transportkugel erden, dadurch vollkommen entladen und dann mit dieser über die am Stativ sitzende Kugel streichen. Somit wird der Kugel, dank der gleichen geometrischen Abmessungen, die Hälfte ihrer Ladung entzogen.

- Wiederholen Sie die Messungen je **dreimal**.

2.3 Versuchsauswertung

Aufgabe 1: Bestimmung der Winkelrichtgröße D entsprechend **Abschnitt 1.2.1**

- Berechnen Sie die Winkelrichtgröße D und bestimmen Sie die maximale Messunsicherheit durch eine Fehlerrechnung.

Aufgabe 2: Entladung bei konstantem Ladungskugelabstand

- Stellen Sie das Ergebnis der Messung der beiden Ladungskugelabstände in einem Diagramm der Funktion $a = f(t)$ graphisch dar und bestimmen Sie die Funktionsgleichungen. Geben Sie die relativen Messunsicherheiten der Funktionsverläufe mit Hilfe einzutragender Fehlerbalken für die Kraft mit an.
- Ermitteln Sie relativ um wie viel sich die Ladungen der beiden Messreihen nach 4 Minuten abbauen. Welche Schlussfolgerungen können Sie daraus ziehen?

Aufgabe 3: Aufnahme einer (*relativ*) konstanten Ladung in Abhängigkeit des Ausschlages vom Abstand zwischen den Kugeln

- Berechnen Sie aus den ermittelten Ergebnissen die dazugehörige Kraft und stellen Sie diese als Funktion $F = f(r^{-2})$ graphisch dar.
- Geben Sie die relativen Messunsicherheiten der Funktionsverläufe mit Hilfe einzutragender Fehlerbalken für die Kraft und den Kehrwert der quadratischen Radien für alle drei Messungen mit an.
- Diskutieren Sie die Ergebnisse hinsichtlich der gewählten Abstände der Kugeln.

Aufgabe 4: Nachweis der Gültigkeit des Coulombschen Gesetzes

- Stellen Sie jeweils alle Ergebnisse für den Abstand $a = f(r)$ und die Kraft $F = f(r^{-2})$ in separaten Diagrammen graphisch dar.
- Verwenden Sie für die Darstellungen die jeweiligen Mittelwerte der drei Messungen.
- Schätzen Sie die Messunsicherheit bei der Darstellung des Verlaufes der Kraft mit Hilfe einzutragender Fehlerbalken ab.
- Berechnen Sie die Gesamtladung für die theoretische Annahme, dass Q_1 gleich Q_2 ist.
- Führen Sie einen Nachweis der Gültigkeit des Coulombschen Gesetzes an Hand der Messwerte von **Aufgabe 3** und **4** durch.