E09 Physikalisches Praktikum	Brückenschaltungen	b-tu Brandenburgische Technische Universität Cottbus · Senftenberg

Die Verwendung von Brückenschaltungen ist von praktischer Bedeutung, da hierbei im Gegensatz zu anderen Messmethoden die Messgröße selbst durch die Messung unbeeinflusst bleibt. Mit Hilfe von Brückenschaltungen sollen in diesem Versuch Ohmsche Widerstände, deren Temperaturabhängigkeit (im Gleichstromkreis) und kapazitive bzw. induktive Widerstände (im Wechselstromkreis) bestimmt werden.

1. Theoretische Grundlagen

1.1 Ohmsches Gesetz und Widerstand

In Metallen gibt es freibewegliche Elektronen, die durch eine angelegte elektrische Spannung U in Bewegung gesetzt werden, d. h. einen Strom I darstellen.

Wenn die Temperatur ϑ konstant bleibt, beobachtet man, dass der Quotient U/I einen konstanten Wert hat. Man bezeichnet diesen Quotienten als Widerstand R:

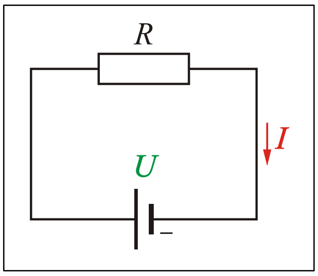

***Bild 1*:** Stromfluss durch Metall

$$R = \frac{U}{I} \qquad [R] = \Omega \tag{1}$$

Dieses Gesetz wird nach Simon Ohm (1787 – 1854) das ***Ohmsche Gesetz*** genannt.

Die Abhängigkeit des Widerstandes von Art und Geometrie eines Leiters wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$R = \varrho \cdot \frac{l}{A} \tag{2}$$

Der ***Widerstand R*** ist der ***Länge l*** des Leiters direkt und dem ***Querschnitt A*** umgekehrt proportional. Der spezifische Widerstand ($[\varrho] = \Omega\cdot\mathrm{m}$) hängt vom Material und dessen Temperatur ab.

1.1.1 Temperaturabhängigkeit des Widerstandes

Wenn man einen metallischen Leiter erwärmt, findet man im Allgemeinen eine Zunahme des elektrischen Widerstandes R. Bei Legierungen ist die Zunahme geringer, einige besitzen sogar einen fast konstanten Widerstand. Bei Kohlenstoff und flüssigen Leitern nimmt der Widerstand beim Erwärmen ab.

Für beliebige Temperaturen ($[\vartheta] = °\mathrm{C}$) lässt sich der elektrische Widerstand mit folgender Gleichung beschreiben:

$$R(\vartheta) = R_{20} \cdot \left(1 + \alpha(\vartheta - 20°C)\right) \tag{3}$$

Hierbei ist R_{20} der Widerstandswert bei 20°C und α der sog. Temperaturbeiwert des Widerstandes (*auch Temperaturkoeffizient genannt*).

1.1.2 Messung Ohmscher Widerstände

Der Wert eines Ohmschen Widerstandes kann durch Messung der anliegenden Spannung und des über ihn fließenden Stromes bestimmt werden. Bei gleichzeitiger Messung beider Größen ist jedoch mindestens ein Messwert aufgrund der Innenwiderstände der Messgeräte verfälscht.

Ein Messverfahren, das diese Abweichung nicht hat, beruht auf der Wheatstoneschen Brückenschaltung nach ***Bild 2***.

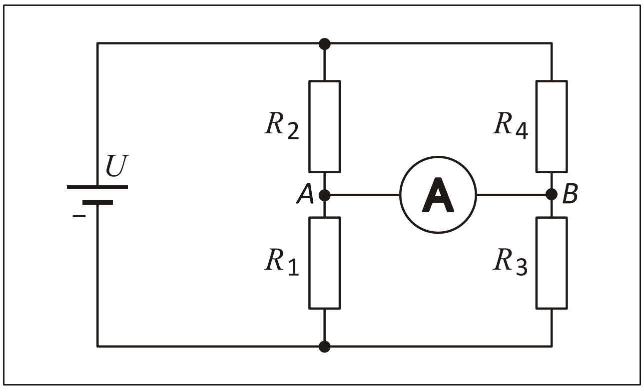

Bild 2: Brückenschaltung

Die Brücke ist abgeglichen, wenn der Strom über dem Messgerät Null wird. Dazu müssen die beiden Punkte *A* und *B* auf dem gleichen Potential φ liegen. Das ist wegen

$$\varphi_A = U \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \tag{4a}$$

$$\varphi_B = U \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4} \tag{4b}$$

genau dann der Fall, wenn

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \tag{5}$$

und damit gilt:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad . \tag{6}$$

Versuchsaufbau für Aufgabe 1 und 2

Wenn z.B. R_3 ein unbekannter Widerstand ist, dann kann R_3 aus der Gleichung (6) bestimmt werden, wenn man für R_4 einen bekannten Vergleichswiderstand verwendet. Um die Brücke abgleichen zu können, werden R_1 und R_2 durch ein Potentiometer R_{12} ersetzt, dessen Mittelabgriff am Punkt *A* (***Bild 2***) liegt (***Bild 3***).

In der Praxis ist die Verwendung eines mehrgängigen Wendelpotentiometers gebräuchlich, dessen Schleiferstellung auf einer zum abgegriffenen Widerstand proportionalen Skala angezeigt wird. Ist z_{max} der Endwert der Skala und z der Skalenwert bei abgeglichener Brücke, so gilt:

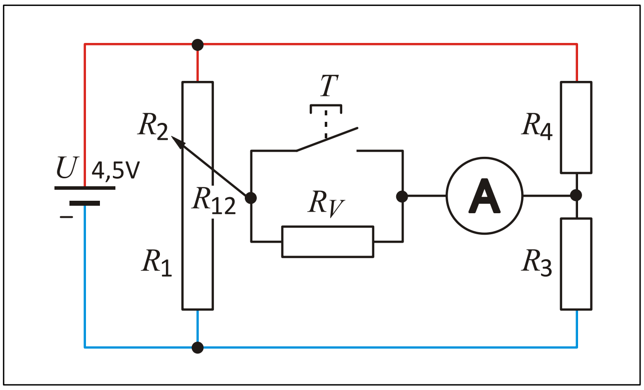

Bild 3: Mit Potentiometer abgleichbare Brückenschaltung

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{z}{z_{max} - z} = \frac{R_3}{R_4} \qquad \text{und damit:} \qquad \boxed{R_3 = \frac{z}{z_{max} - z} \cdot R_4} \tag{7}$$

Der Vorwiderstand R_V begrenzt den Strom über das Amperemeter und ermöglicht somit einen Grobabgleich der Brücke. Zum Feinabgleich wird R_V durch den Taster T überbrückt.

1.2 Widerstände im Wechselstromkreis

1.2.1 Komplexe Darstellung periodischer Größen

Eine zeitlich periodische Wechselspannung $\quad U(t) = U_0 \cdot \cos\omega \cdot t \quad$ (8)

lässt sich mit der Eulerschen Beziehung $\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \cdot \sin x \quad$ (9)

darstellen und als Realteil einer komplexen Größe $\quad U(t) = \mathrm{Re}\left(U_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega \cdot t}\right). \quad$ (10)

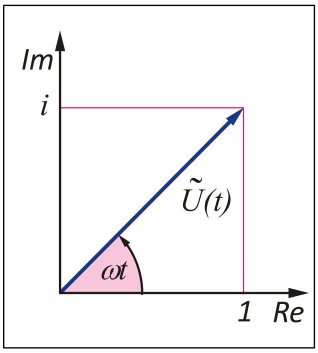

Bild 4: Komplexes Zeigerdiagramm einer harmonisch oszillierenden Spannung $U(t)$

Diese komplexe Größe kann in der Gaußschen Zahlenebene (***Bild 4***) veranschaulicht werden als ein mit der Kreisfrequenz ω in mathematisch positiver Richtung rotierender Zeiger der Länge U_0.
Es ist nun üblich, statt der Gleichung (10) die Spannung durch die komplexe Größe selbst zu beschreiben:

$$\tilde{U}(t) = U_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega \cdot t} \tag{11}$$

und die physikalische Spannung nur als Realteil von Gleichung (11) zu interpretieren. Um dies zu kennzeichnen, werden solche komplexen Größen mit einer Tilde („*Schlange*“) versehen.
Der Vorteil dieser komplexen Darstellung gegenüber der trigonometrischen Schreibweise periodischer Größen liegt in erheblich vereinfachten Rechnungen, in denen man beispielsweise auf Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen ganz verzichten kann.

Bei ***Kapazitäten und Induktivitäten im Wechselstromkreis*** treten gegenüber Ohmschen Widerständen neue Phänomene auf, z.B. eine ***Phasenverschiebung*** zwischen Spannung und Strom oder die Tatsache, dass ***Verhältnisse von Teilspannungen frequenzabhängig*** sind. Diese Phänomene werden in den folgenden Abschnitten beschrieben.

1.2.2 Kapazität im Wechselstromkreis

Ein Kondensator mit der Kapazität C liegt an einer Wechselspannung Gl. (11). Dann gilt mit der zeitabhängigen Ladung $\tilde{Q}(t)$ des Kondensators:

$$\tilde{U}(t) = \frac{1}{C} \cdot \tilde{Q}(t) \tag{12}$$

Differenziert man nach der Zeit, so erhält man

$$\dot{\tilde{U}} = \frac{1}{C} \cdot \dot{\tilde{Q}} = \frac{1}{C} \cdot \tilde{I}. \tag{13}$$

Daraus ergibt sich mit Gl. (4) die zeitabhängige Stromstärke

$$\tilde{I} = \mathrm{i}\omega \cdot C \cdot \tilde{U} \textit{ mit der Amplitude } I_0 = \omega \cdot C \cdot U_0 \qquad (14)\ (15)$$

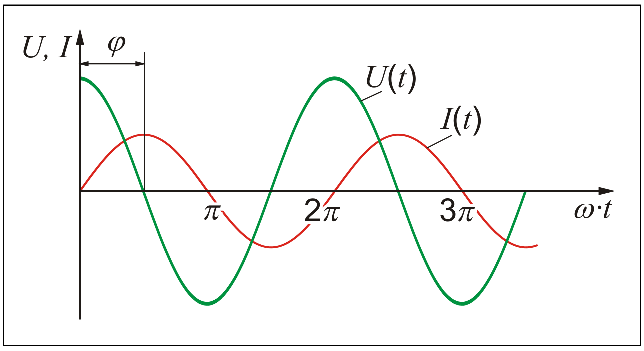

Bild 5a: Phasendiagramm eines Kondensators

Veranschaulicht man sich dieses Ergebnis wieder in der komplexen Zahlenebene, so erkennt man, dass zur Zeit $t = 0$ der Zeiger für U in Richtung der reellen Achse, der Zeiger für I in Richtung der imaginären Achse zeigt. Das heißt, der Strom eilt der Spannung beim Kondensator mit einer Phasenverschiebung von 90° voraus *(**Bild 5a**)*.

Man definiert im Wechselstromkreis den Quotienten aus Momentanspannung und -strom als komplexen Widerstand $\tilde{Z}$ und erhält für einen Kondensator

$$\tilde{Z}_C = \frac{\tilde{U}(t)}{\tilde{I}(t)} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega \cdot C} = -\mathrm{i}\frac{1}{\omega \cdot C} \quad . \tag{16}$$

Dieser Betrag von $\tilde{Z}$ heißt ***Scheinwiderstand*** (*hier* $|\tilde{Z}_C| = \frac{1}{\omega \cdot C}$).

Wäre statt des Kondensators ein rein ***ohmscher Widerstand R*** im Stromkreis, so ist der Strom in Phase mit der Spannung (***Bild 5b***)

$$\tilde{I}(t) = \frac{\tilde{U}(t)}{R} \tag{17}$$

und es ergäbe sich für den Quotienten der reelle Wert

$$\tilde{Z}_R = R \tag{18}$$

Ein ***komplexer Widerstand*** $\tilde{Z}$ verursacht also eine ***Phasenverschiebung*** zwischen Strom und Spannung. Ist der Imaginärteil von $\tilde{Z}$ null, so ist auch die Phasenverschiebung null.

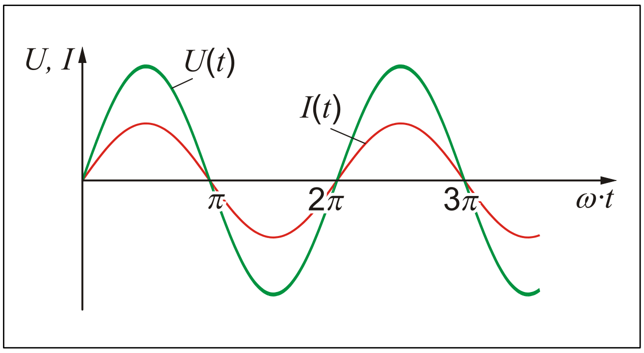

Bild 5b: Phasendiagramm eines rein ohmschen Widerstandes

1.2.3 Induktivität im Wechselstromkreis

Legt man an eine **Induktivität *L*** in Form einer Spule eine Wechselspannung Gl. (11), so muss nach dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz die Summe der Spannungen im Kreis stets null sein:

$$\tilde{U}(t) + \tilde{U}_{ind}(t) = 0 \tag{19}$$

Die in der Spule induzierte Spannung ist

$$\tilde{U}_{ind}(t) = -L \cdot \dot{\tilde{I}}. \tag{20}$$

Setzt man die Gleichungen (11) und (20) in Gl. (19) ein, so erhält man

$$\dot{\tilde{I}} = \frac{U_0}{L} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega \cdot t} \quad . \tag{21}$$

Der zeitliche Verlauf der Stromstärke ergibt sich dann durch Integration:

$$\tilde{I}(t) = -\mathrm{i}\,\frac{U_0}{\omega \cdot L} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega \cdot t} \quad \textit{mit der Amplitude} \quad I_0 = \frac{U_0}{\omega \cdot L} \qquad (22)\ (23)$$

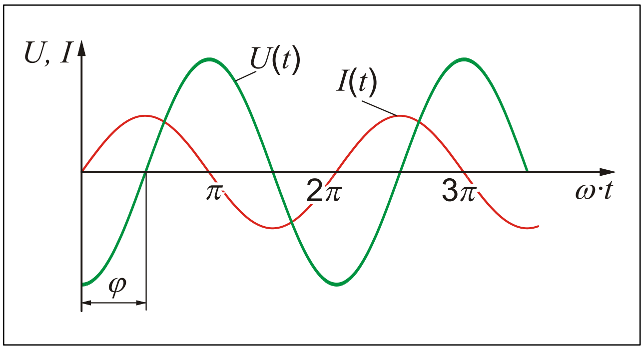

Bild 5c: Phasendiagramm einer Spule

Zurzeit $t = 0$ zeigt I jetzt in Richtung der negativen imaginären Achse, der Strom hinkt der Spannung mit einer Phasenverschiebung von 90° nach (***Bild 5c***). Der komplexe Wechselstromwiderstand der Spule ist

$$\tilde{Z}_L = \frac{\tilde{U}(t)}{\tilde{I}(t)} = \mathrm{i}\omega \cdot L, \tag{24}$$

wobei $|\tilde{Z}_L| = \omega \cdot L$ ihr ***Scheinwiderstand*** ist.

1.2.4 Reihenschaltung von R, C und L

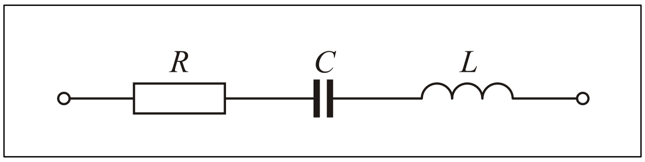

Bild 6a: Reihenschaltung von R, C, und L

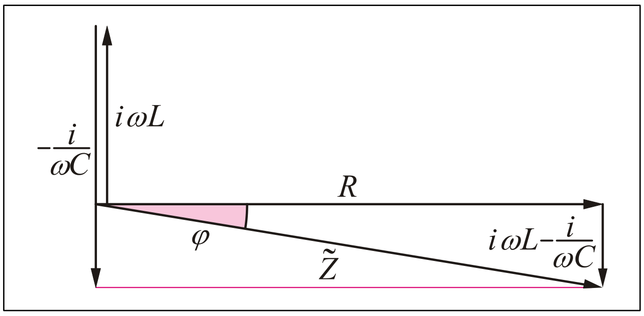

Bild 6b: Addition der komplexen Widerstände

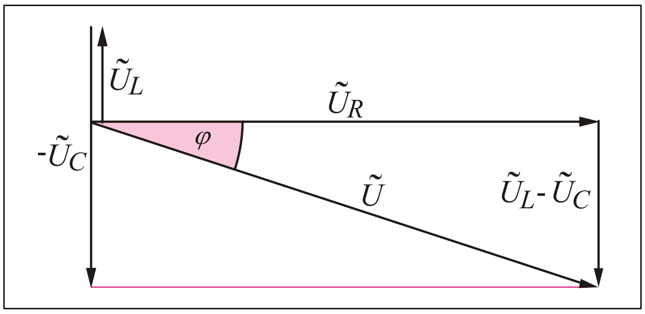

Bild 6c: Zeigerdiagramm für die Teilspannungen

Bei der Reihenschaltung eines ohmschen Widerstandes R, einer Kapazität C sowie einer Induktivität L an eine treibende Spannung $\tilde{U}(t)$ gilt zu jeder Zeit das zweite Kirchhoffsche Gesetz in der Form:

$$R \cdot \tilde{I} + \frac{1}{C} \cdot \tilde{Q} = \tilde{U} - L \cdot \dot{\tilde{I}}. \qquad (25)$$

Die zeitliche Ableitung von (25) ergibt

$$L \cdot \ddot{\tilde{I}} + R \cdot \dot{\tilde{I}} + \frac{1}{C} \cdot \tilde{I} = \dot{\tilde{U}}. \qquad (26)$$

Als Lösung dieser Differentialgleichung nach dem Abklingen des Einschwingvorgangs erhält man für den hier nur betrachteten schwach gedämpften Fall eine sinusförmige Funktion, die gegenüber der Erregerfunktion um den Winkel φ phasenverschoben ist. Entsprechend fließt auch in der Schaltung ein harmonisch oszillierender Strom

$$\tilde{I}(t) = I_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega \cdot t - \varphi)}. \qquad (27)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (27) und (11) in Gl. (25) erhält man den komplexen Wechselstrom-Widerstand der Reihenschaltung als Summe der komplexen Einzelwiderstände:

$$\tilde{Z} = \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = R + \mathrm{i} \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right). \qquad (28)$$

Diese Summe lässt sich auch geometrisch in der komplexen Ebene darstellen.

Da die Stromstärke im Kreis überall gleich ist, kann ***Bild 6b*** durch Anwendung des Ohmschen Gesetzes auch als Zeigerdiagramm für die Spannungssumme im Kreis aufgefasst werden ***(Bild 6c)***. Der Strom ist in Phase mit der Teilspannung am ohmschen Widerstand, der Winkel φ gibt demnach die Phasenverschiebung zwischen dem Strom und der äußeren Spannung an. Er lässt sich berechnen aus

$$\tan \varphi = \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R} \quad . \qquad (29)$$

Interessiert man sich nur für den Quotienten der Amplituden von $\tilde{U}(t)$ und $\tilde{I}(t)$, so muss man in Gl. (28) die Beträge betrachten:

$$|\tilde{Z}| = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)^2}. \qquad (30)$$

Der Betrag des komplexen Wechselstromwiderstandes $\tilde{Z}$ wird als ***Scheinwiderstand*** der Schaltung bezeichnet.

1.2.5 Messung komplexer Widerstände

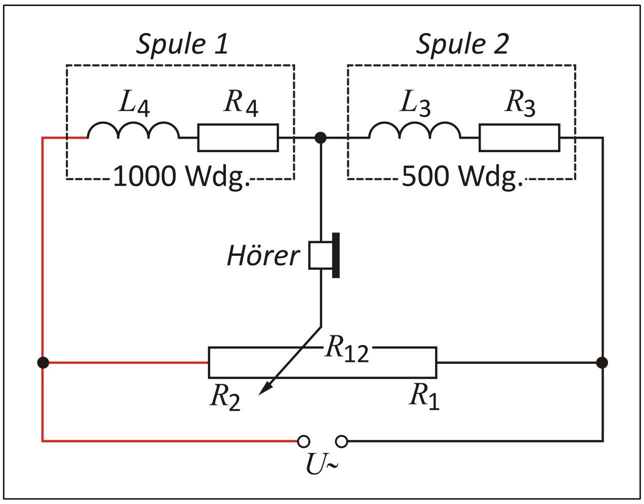

Bild 7: Messbrücke für komplexe Widerstände

Mit Hilfe einer Brückenschaltung können auch komplexe Wechselstromwiderstände gemessen werden (***Bild 7***). Die Brücke wird hierzu mit Wechselspannung konstanter Frequenz betrieben. Bei Frequenzen im hörbaren Bereich kann statt des Strommessgerätes auch ein Kopfhörer verwendet werden.

Die beiden komplexen Widerstände haben die Werte

$$\tilde{Z}_j = R_j + \mathrm{i}\omega \cdot L_j \qquad (j{=}3,4) \qquad (31)$$

Verwendet man Kondensatoren statt der Spulen, so ist

$$\tilde{Z}_j = R_j + \frac{1}{\mathrm{i}\omega \cdot C_j} \qquad (j{=}3,4) \qquad (32)$$

Die Bedingungen für den Abgleich der Brücke sind analog zu Gleichungen (6) und (7):

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{z}{z_{max} - z} = \frac{\tilde{Z}_3}{\tilde{Z}_4} = \frac{R_3 + \mathrm{i}X_3}{R_4 + \mathrm{i}X_4} \quad . \qquad (33)$$

X_3 und X_4 sind die Imaginärteile von $\tilde{Z}_3$ und $\tilde{Z}_4$ ($X_L = \omega \cdot L$; $X_C = 1/(\omega \cdot C)$).

Führt man die komplexe Division durch, so erhält man

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3 \cdot R_4 + X_3 \cdot X_4}{{R_4}^2 + {X_4}^2} + \mathrm{i}\,\frac{X_3 \cdot R_4 - R_3 \cdot X_4}{{R_4}^2 + {X_4}^2} \quad . \qquad (34)$$

Da die linke Seite von Gl. (34) reell ist, muss der Imaginärteil auf der rechten Seite verschwinden und es folgt

$$\frac{X_3}{X_4} = \frac{R_3}{R_4} \quad . \qquad (35)$$

Unter Verwendung von Gl. (35) kann der Realteil von Gl. (34) umgeformt werden zu:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{X_3}{X_4} \quad . \qquad (36)$$

Anmerkung: *Für den Abgleich der Brücke müssen also die zwei Bedingungen (35) und (36)* gleichzeitig erfüllt sein.

Sind X_3 bzw. R_3 die unbekannten Größen. Dann liefert Gl. (36) die Bestimmungsgleichung für X_3:

$$\boxed{X_3 = \frac{R_1}{R_2} \cdot X_4 = \frac{z}{z_{max} - z} \cdot X_4} \qquad (37)$$

und aus Gl. (35) und (36) folgt:

$$\boxed{R_3 = \frac{z}{z_{max} - z} \cdot R_4} \quad . \qquad (38)$$

2.Versuch

2.1 Vorbetrachtung

Aufgabe 1: Es gibt eine Vielzahl von Messbrücken. Benennen Sie mindesten zwei. Wozu werden sie benutzt und wie funktionieren sie?

Aufgabe 2: Wie groß ist der Temperaturkoeffizient α eines temperaturabhängigen Widerstandes R_3, der mit Hilfe einer Brückenschaltung ermittelt wurde (siehe ***Bild 3***)?
Messwerte: ($\boldsymbol{R_{max}}$=$\mathbf{1\ k\Omega}$; $\boldsymbol{R_1}$=$\mathbf{520\ \Omega}$ (*bei* $\boldsymbol{\vartheta_1}$=20°C); $\boldsymbol{R_1}$=$\mathbf{680\ \Omega}$ (*bei* $\boldsymbol{\vartheta_2}$=300°C); $\boldsymbol{R_4}$=$\mathbf{100\ \Omega}$)

2.2 Versuchsdurchführung

2.2.1 Verwendete Geräte

Aufbauplatte mit Widerständen, Kondensatoren, Spulen, Glühlampe, Potentiometer, Taster, Strommessgerät, Edelmetallwiderstand, Heizofen, Temperaturmess- und -regelungsgerät, Sinusgenerator, Batteriekasten

2.2.2 Versuchshinweise

Aufgabe 1: Messung mit einer Messbrücke

- Bestimmen Sie den Ohmschen Widerstand einer Glühlampe und zweier Spulen mit einer Messbrücke unter Verwendung unterschiedlicher Vergleichswiderstände.
- Bauen Sie die Schaltung nach ***Bild 3*** auf und setzen Sie für R_3 die Lampe ein (*Herstellerangaben:* $\boldsymbol{U}$=4 V, $\boldsymbol{P}$=160 mW).
- Beginnen Sie den Abgleich mit dem größten Messbereich des Strommessgerätes.
- Der Feinabgleich erfolgt durch Umschalten der Strombereiche und durch Betätigung des Tasters.
- Verwenden Sie als Vergleichswiderstände R_4 folgende Präzisionswiderstände: ($\mathbf{10}$; $\mathbf{51}$; $\mathbf{100}$; $\mathbf{240}$; $\mathbf{510}$)Ω sowie $\mathbf{1\ k\Omega}$ (***Toleranz*** **1%**).

- Zur Bestimmung des Ohmschen Widerstandes der Spulen (**500 Wdg.** *und* **1000 Wdg.**) genügt eine Messung. Benutzen Sie dabei den günstigsten Vergleichswiderstand R_4 .

Aufgabe 2: Untersuchung der Temperaturabhängigkeit eines Edelmetallwiderstandes R_3

- Zur Temperierung befindet sich der Edelmetallwiderstand R_3 in einem Rohrofen. Benutzen Sie diesen mit dem angeschlossenen Temperaturmess- und -regelungsgerät (***Messbereich*>200 °C**) zur Erwärmung des Widerstandes.
- Bestimmen Sie den Widerstand R_1 mit der zuvor aufgebauten Messbrücke ($\boldsymbol{R_4}$=$\mathbf{100\ \Omega}$) zunächst bei Raumtemperatur. Erhöhen Sie dann die Solltemperatur ***auf*** $\boldsymbol{\vartheta}$**=50°C** und ändern Sie in Schrittweiten von $\boldsymbol{\Delta T}$=**50K** die Temperatur weiter.
- Die Temperaturänderung geschieht über die Sollwerteinstellung am Temperaturregelgerät. Warten Sie eine konstante sich einstellenden Temperatur ab (*über Temperaturmessgerät -Einstellung Istwert*).

Die maximal einzustellende Temperatur beträgt $\boldsymbol{\vartheta}$**=400°C**, *sonst Zerstörung des Widerstandes!*

Aufgabe 3: Untersuchung Induktivität und Ohmschen Widerstand einer Spule

- Bauen Sie die Schaltung nach ***Bild 7*** auf. Benutzen Sie dabei den Funktionsgenerator UNI-T als Spannungsquelle ($\widetilde{\boldsymbol{U}}=5\,\mathrm{V}$).

Daten der Vergleichsspule:

Windungszahl:	$\boldsymbol{N}=1000\ \mathbf{Wdg.}$
Induktivität:	$\boldsymbol{L_4}=17\ \mathbf{mH}$
Ohmscher Widerstand:	$\boldsymbol{R_4}$ ***aus Aufgabe 1***

- Benutzen Sie zur Bestimmung der Induktivität L_3 bzw. des Ohmschen Widerstandes R_3 die Spule $500\,\mathrm{Wdg}$.
- Stellen Sie am Potentiometer R_{12} die minimale Lautstärke des Kopfhörers ein und notieren Sie sich den Wert für z.
- Verwenden Sie für die Messung die Frequenzen $\boldsymbol{f}=(100,\ 500)\,\mathrm{Hz}$, sowie $(1, 5, 10)\,\mathrm{kHz}$.

Aufgabe 4: Bestimmung einer unbekannten Kapazität

- Bestimmen Sie mit einer Messreihe von mindestens ***10 Messungen*** die Kapazität des Kondensators C_x (C_3) mit einer Messbrücke.
- Verwenden Sie den Aufbau entsprechend der ***Aufgabe 3***.
- Ersetzen Sie dabei die Spulen durch die entsprechenden Kondensatoren (*zusätzliche Beschaltungen sind nicht notwendig*).
- Benutzen Sie als Vergleichskondensator: $\boldsymbol{C_4}=3{,}3\,\mu\mathrm{F}$ (*Toleranz* 10%) und legen Sie die Frequenzeinstellung selbst fest (*Frequenzwerte zwischen* $\boldsymbol{f}=100\ \mathrm{Hz}$ *bis* $10\ \mathrm{kHz}$).

2.3 Versuchsauswertung

Aufgabe 1: Messung mit einer Messbrücke

- Bestimmen Sie absolute und relative Messunsicherheiten durch eine Fehlerrechnung von R_3 für alle Messwerte.
- Interpretieren Sie die Messergebnisse.

Aufgabe 2: Untersuchung der Temperaturabhängigkeit eines Edelmetallwiderstandes R_3

- Stellen Sie die Messergebnisse als Funktion $\boldsymbol{R_3} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\vartheta})$ unter Verwendung der linearen Regression in einem Diagramm graphisch dar.
- Berechnen Sie den Temperaturbeiwert α unter Verwendung des Anstiegs des Graphen.
- Bestimmen Sie die Messunsicherheit durch eine Fehlerrechnung für den Temperaturbeiwert α unter Verwendung der bei der linearen Regression auftretenden Standardabweichung s_b.

Aufgabe 3: Bestimmung der Induktivität und des Ohmschen Widerstandes

- Bestimmen Sie L_3 und R_3 und weisen Sie deren Frequenzunabhängigkeit nach.

Aufgabe 4: Bestimmung einer Kapazität

- Bestimmen Sie C_3 sowie die Messabweichung.