E05 Physikalisches Praktikum	Elektrische Schwingungen	b-tu Brandenburgische Technische Universität Cottbus · Senftenberg

Elektrische Schwingungen am Serien- und Parallelschwingkreis werden erzeugt und untersucht. Dabei sollen Unterschiede zwischen den beiden Schaltungen und Gemeinsamkeiten mit den mechanischen Schwingungen verdeutlicht werden.

1. Theoretische Grundlagen

1.1 Freie elektrische Schwingungen

Lädt man einen Kondensator der Kapazität C auf die Spannung U_0 und entlädt ihn über eine parallel geschaltete Spule der Induktivität L, so müssen zu jeder Zeit die Spannungen am Kondensator und an der Spule gleich groß sein:

$$-L \cdot \dot{I} = \frac{Q}{C} \tag{1}$$

Es ist $Q = C \cdot U$ die aktuelle Ladung auf einer Kondensatorplatte. Um Q zu eliminieren, wird die zeitliche Ableitung von Gl. (1) gebildet:

$$L \cdot \ddot{I} + \frac{1}{C} \cdot I = 0 \tag{2}$$

Diese Differentialgleichung hat die gleiche Struktur wie die Schwingungsgleichung für einen mechanischen, harmonischen Oszillator. Die Stromstärke in der beschriebenen Schaltung vollführt also eine ***harmonische Schwingung***

$$\tilde{I}(t) = I_0 \cdot \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\omega_0 \cdot t} \tag{3}$$

(*dabei ist nur der Realteil $I(t) = \mathrm{Re}\tilde{I}(t)$ physikalisch relevant*) mit der Eigenfrequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \ . \tag{4}$$

Gleiches gilt auch für die Spannung. Die Parallelschaltung von Spule und Kondensator wird deshalb als ***elektrischer Schwingkreis*** bezeichnet.

Wie beim mechanischen Oszillator tritt auch beim elektrischen Schwingkreis unvermeidlich eine ***Dämpfung*** auf, hier verursacht durch den Ohmschen Widerstand R der Leitungen. Dieser wirkt, als ob er in Reihe zu den anderen Bauelementen geschaltet ist. In Gl. (1) ist nun zusätzlich der Spannungsabfall an R zu berücksichtigen und man erhält

$$-L \cdot \dot{I} = \frac{Q}{C} + R \cdot I \tag{5}$$

Die zeitliche Ableitung von Gl. (5) führt wieder zu einer homogenen Differentialgleichung der Struktur, die auch im mechanischen Fall auftritt.

$$L \cdot \ddot{I} + R \cdot \dot{I} + \frac{1}{C} \cdot I = 0 \tag{6}$$

Der Vergleich mit dem mechanischen Fall ergibt für den Dämpfungsfaktor des elektrischen Schwingkreises

$$\delta = \frac{R}{2L} \tag{7}$$

Das Verhalten des Schwingkreises hängt wie im mechanischen Fall von der Stärke der Dämpfung ab. Der Versuch beschränkt sich auf den schwach gedämpften Fall ($\delta < \omega_0$), in dem die Lösung von Gl. (6) eine harmonische Schwingung mit exponentiell abklingender Amplitude ergibt

$$\tilde{I}(t) = I_0 \cdot \mathrm{e}^{-\delta \cdot t} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_D \cdot t} \tag{8}$$

mit der nun verringerten Eigenfrequenz

$$\omega_D = \sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2}. \tag{9}$$

Die Teilspannungen an jedem der Bauelemente führen ebenfalls harmonische Schwingungen aus, allerdings mit einer Phasenverschiebung gegenüber dem Strom.

1.2 Erzwungene Schwingungen im Serienschwingkreis

Eine Möglichkeit zur Erzeugung erzwungener elektrischer Schwingungen ist die in ***Bild 1*** dargestellte ***RLC-Serienschaltung***. Bei einer Erregerspannung

$$\tilde{U}(t) = U_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_a \cdot t} \tag{10}$$

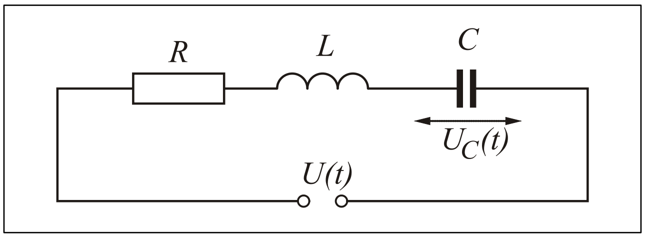

Bild 1: Reihenschaltung von R, L und C

ergibt sich die Stromstärke im eingeschwungenen Zustand gemäß dem ohmschen Gesetz durch Division mit dem komplexen Widerstand

$$\tilde{Z} = R + \tilde{Z}_L + \tilde{Z}_C$$

$$= R + \mathrm{i} \cdot \left(\omega_a \cdot L - \frac{1}{\omega_a \cdot C}\right)$$

$$\tilde{I}(t) = \frac{\tilde{U}(t)}{R + \mathrm{i} \cdot \left(\omega_a \cdot L - \frac{1}{\omega_a \cdot C}\right)} \tag{11}$$

Die Amplitude des Stroms

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_a \cdot L - \frac{1}{\omega_a \cdot C}\right)^2}} \tag{12}$$

wird maximal, wenn die Erregerfrequenz ω_a gleich der Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften Kreises ist:

$$\omega_{a,I_{max}} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \tag{13}$$

Da der Nenner von Gl. (11) in diesem Fall reell ist, fließt der Strom in Phase mit der Erregerspannung. Die Schaltung lässt also bevorzugt Wechselstromsignale einer bestimmten Frequenz passieren. Man nennt sie deshalb ***Siebkette***.

Die Spannung am Kondensator der Siebkette ist

$$\tilde{U}_C(t) = \tilde{I}(t) \cdot \frac{1}{\mathrm{i}\omega_a \cdot C} = \frac{\tilde{U}(t)}{\mathrm{i}\omega_a \cdot R \cdot C - (\omega_a{}^2 \cdot L \cdot C - 1)} \tag{14}$$

Sie hat die Amplitude

$$U_{c,0} = \left|\tilde{U}_C\right| = \frac{U_0}{\sqrt{\omega_a{}^2 \cdot R^2 \cdot C^2 + (\omega_a{}^2 \cdot L \cdot C - 1)^2}} \tag{15}$$

Um zu bestimmen, für welche Erregerfrequenz die Spannung maximal wird (***Spannungsresonanz***), wird die Ableitung des Nenners von Gl. (15) ***gleich 0*** gesetzt und es ergibt sich:

$$\omega_{a,U_{max}} = \sqrt{\omega_0{}^2 - \frac{R^2}{2L^2}} = \sqrt{\omega_0{}^2 - 2\delta^2} \tag{16}$$

Die Phasendifferenz α zwischen der Erregerspannung und der Spannung am Kondensator ergibt sich aus der Darstellung der Teilspannungen in der komplexen Ebene. Es ist

$$\tan\alpha = \frac{R}{\frac{1}{\omega_a \cdot C} - \omega_a \cdot L} \tag{17}$$

Ein wichtiges Maß für die Trennschärfe eines Schwingkreises ist die ***Halbwertsbreite der Resonanzkurve***. Man versteht darunter den Abstand $\Delta\omega$ der beiden Frequenzen, bei denen die Amplitude auf das $1/\sqrt{2}$-***fache*** ihres Maximalwertes abgesunken ist. Der Quotient

$$Q = \frac{\omega}{\Delta\omega} = \frac{f_{Res}}{\Delta f} \tag{18}$$

heißt ***Güte*** des Schwingkreises.

1.3 Erzwungene Schwingungen im Parallelschwingkreis

Von großer Bedeutung für technische Anwendungen ist der Parallelschwingkreis (***Bild 2***). Die Stromstärke in den Zuleitungen zum Schwingkreis ist abhängig von der Frequenz der Erregerspannung nach Gl. (10). Für den komplexen Ersatzwiderstand der Schaltung gilt:

$$\frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{\tilde{Z}_C} + \frac{1}{\tilde{Z}_L + R} \tag{19}$$

mit $\tilde{Z}_C = \frac{i}{\omega_a \cdot C}$ und $\tilde{Z}_L = -i\omega_a \cdot L$.

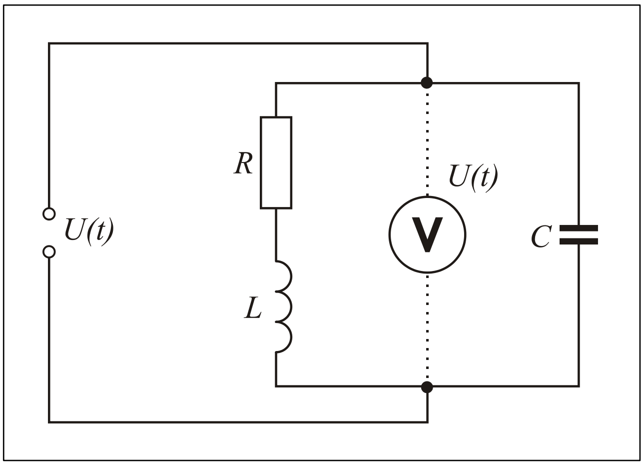

Bild 2: Schaltung eines Parallelschwingkreises

Der Betrag des Ersatzwiderstandes ist:

$$\left|\tilde{Z}\right| = \sqrt{\frac{R^2 + \omega_a{}^2 \cdot L^2}{\omega_a{}^2 \cdot R^2 \cdot C^2 + (\omega_a{}^2 \cdot L \cdot C - 1)^2}} \tag{20}$$

Setzt man R << $\omega_a \cdot L$ voraus, so ergibt sich sein Maximum für

$$\omega_a = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \tag{21}$$

d. h., wenn die Frequenz der von außen angelegten Spannung gleich der Eigenfrequenz des ungedämpften Kreises ist. In diesem Fall ist der Strom in den Zuleitungen minimal. Aus diesem Grund wird der Parallelschwingkreis auch ***Sperrkreis*** genannt.
Bei nicht vernachlässigbarem R ist die Resonanzfrequenz wieder zu kleineren Frequenzen verschoben.

2.Versuch

2.1 Vorbetrachtung

Aufgabe1: Eine Sinusspannung hat eine Frequenz von $\boldsymbol{f}$**=500 Hz** ($U(t)$=0 *bei* t=0). Zum Zeitpunkt $\boldsymbol{t}$**=0,1 ms** beträgt der Augenblickswert $\boldsymbol{U(t)}$**=0,5 V**. Bestimmen Sie Maximal- und Effektivwert. Beachten Sie $\omega = 2\pi \cdot f$.

Aufgabe 2: Eine Wechselspannung der Form

$$U(t) = U_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

hat eine Periodendauer von $\boldsymbol{T}$**=360 µs** ($\omega=2\pi=360°$). Zum Zeitpunkt $\boldsymbol{t_1}$**=15 µs** beträgt die Spannung $\boldsymbol{U_1(t)}$**=5,0 V**, zum Zeitpunkt $\boldsymbol{t_2}$**=75 µs** beträgt die Spannung $\boldsymbol{U_2(t)}$**=10,0 V**. Bestimmen Sie die Spannung U_{max} und den Phasenwinkel φ.

Hinweis: Dividieren Sie die beiden Spannungsfunktionen

$$Z = \frac{U_1(t)}{U_2(t)} = \frac{U_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t_1 + \varphi)}{U_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t_2 + \varphi)}$$

und berücksichtigen Sie das Additionstheorem

$$sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y.$$

2.2 Versuchsdurchführung

2.2.1 Verwendete Geräte

Funktionsgenerator und Zähler in einem Gehäuse, Oszilloskop, Vielfachmessinstrument, Kondensatoren, Spulen, Widerstände, Aufbauplatte

2.2.2 Versuchshinweise

Aufgabe 1: Freie Schwingungen

- Stellen Sie die freie schwach gedämpfte Schwingung eines Schwingkreises mit Hilfe eines Oszilloskops dar.

Hinweis: *Bedienungsanleitungen für alle benötigten Messgeräte befinden sich am Arbeitsplatz.*

- Verwenden Sie zur periodischen Anregung des Schwingkreises einen ***Impulsgenerator*** (*Rechteckspannung*, f=200 Hz) und koppeln Sie ihn induktiv an die Schwingkreisspule an (***Bild 3***).
- Die Anregungsfrequenz muss gegenüber der Eigenfrequenz des Schwingkreises klein sein (*Warum?*).
- Lesen Sie am Oszilloskop zunächst die ***Schwingungsdauer*** T des Schwingkreises unter Verwendung der kalibrierten Zeitbasiseinstellung ab (*zur Bestimmung von* f_D *und* ω_D).

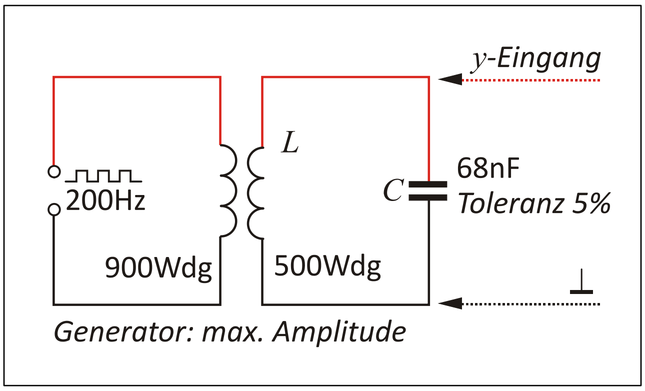

Bild 3: Versuchsaufbau

- Bestimmen Sie danach die ***Amplitude*** in Abhängigkeit von $t = n \cdot T$.
- Lesen Sie dazu die Spannungswerte U_S (*Spitze-Wert*) entsprechend der Eingangseinstellung des Oszilloskops für die ***ersten*** **15-20** ***Perioden*** ab.

Aufgabe 2: Erzwungene Schwingungen am Serienschwingkreis

- Nehmen Sie für verschiedene Dämpfungen die Spannungsresonanzkurve beim Serienschwingkreis auf und bestimmen Sie die Güte.
- Verwenden Sie bei den Messungen zu den erzwungenen Schwingungen eine sinusförmige Erregerspannung mit konstanter Amplitude.
- Variieren Sie die Frequenz von (1 ... 8) kHz, in einer Schrittweite ***von*** 1 kHz.
- Ermitteln Sie die ***Resonanzfrequenz*** f_{Res}.
- Messen Sie ***je 3 weitere Messwerte*** in einer Schrittweite ***von*** 200 Hz links bzw. rechts vom Resonanzmaximum.

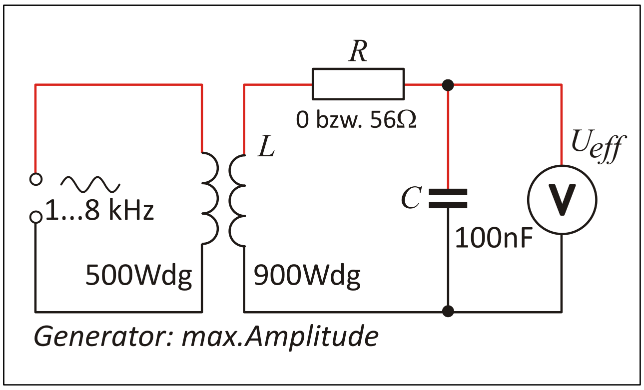

Bild 4: Versuchsaufbau

- Nehmen Sie die Resonanzkurve für $U_{eff}(t)$ (*gemessen mit einem Multimeter*) für die Widerstände R=0 Ω und R=56 Ω auf.

Aufgabe 3: Erzwungene Schwingungen am Parallelschwingkreis

- Untersuchen Sie die Frequenzabhängigkeit der Stromstärke in den Zuleitungen zu einem Parallelschwingkreis.
- Um eine Rückwirkung des Schwingkreises auf die Ausgangsamplitude und auf die Wellenform des Funktionsgenerators weitgehend zu verhindern, verwenden Sie hier zur Strombegrenzung den Widerstand R_V (*siehe* ***Bild 5***).
- Messen Sie den Spannungsabfall U_{RV} über dem Widerstand R_V des Parallelschwingkreises mit einem Vielfachmessinstrument.

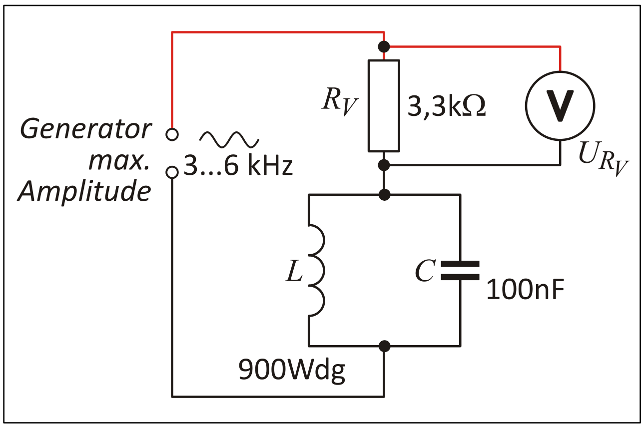

Bild 5: Versuchsaufbau

- Variieren Sie die Frequenz von $(\mathbf{3} \ldots \mathbf{6})\ \mathrm{kHz}$, in einer Schrittweite ***von*** $\mathbf{500\ Hz}$.
- Ermitteln Sie die ***Resonanzfrequenz*** $\boldsymbol{f_{Res}}$.
- Messen Sie ***je 5 weitere Messwerte*** in einer Schrittweite ***von*** $\mathbf{100\ Hz}$ links bzw. rechts vom Resonanzmaximum.

2.3 Versuchsauswertung

Aufgabe 1: Freie Schwingungen

- Berechnen Sie die Schwingungsdauer T und die Frequenz f_D bzw. die Kreisfrequenz ω_D der gedämpften Schwingung. Geben Sie die Messunsicherheit durch eine Fehlerrechnung (*absolut und relativ*) an.
- Stellen Sie die Abhängigkeit auf halblogarithmischem Papier als Funktion $\boldsymbol{U_S = f(n \cdot T)}$ graphisch dar (U_S *logarithmisch*).
- Zeichnen Sie die Regressionsgrade ein und bestimmen Sie den Anstieg des Graphen durch Gebrauch des Anstiegsdreiecks. Ermitteln Sie die relativen Messunsicherheiten unter Verwendung von festzulegenden Fehlerbalken (*relativ*).
- Berechnen Sie aus dem Anstieg des Graphen die Dämpfungskonstante δ und leiten Sie dazu die Bestimmungsgleichung aus Gleichung (8) her.
- Berechnen Sie unter Verwendung der Gleichung (9) die Kreisfrequenz ω_0, die Induktivität L (*nach Gleichung* (4)) und dem Widerstand R (*nach Gleichung* (7)).
- Geben Sie die Messunsicherheiten durch eine Fehlerrechnung (*absolut und relativ*) an.

Aufgabe 2: Erzwungene Schwingungen am Serienschwingkreis

- Stellen Sie die beiden Resonanzkurven in je einem Diagramm der Funktion $\boldsymbol{U(t) = f(f)}$ graphisch dar.
- Tragen Sie die Resonanzfrequenz f_{Res}, die Minimal- bzw. Maximalwerte der Spannungen und die Effektivwerte mit ein ($U_{max} = \sqrt{2} \cdot U_{eff}$). Aus den Schnittpunkten mit der Effektivspannungslinie und den Graphen lässt sich die Frequenzdifferenzen Δf ermitteln.
- Berechnen Sie die sich daraus ergebende Güte Q der Schwingkreise nach Gleichung (18).
- Diskutieren Sie die Ergebnisse, insbesondere die gemessenen Resonanzfrequenzen, in ihren Abhängigkeiten.

Aufgabe 3: Erzwungene Schwingungen am Parallelschwingkreis

- Berechnen Sie die Stromstärke, die durch den Widerstand R_V fließt in Abhängigkeit von der Frequenz und stellen Sie die sich ergebene Resonanzkurve in einem Diagramm der Funktion $\boldsymbol{I(t) = f(f)}$ graphisch dar.
- Tragen Sie die Resonanzfrequenz f_{Res}, den Minimal- bzw. Maximalwert des Stromes und die Effektivwert mit ein ($I_{eff} - I_{min} = (I_{max} - I_{min})/\sqrt{2}\ \cdot$). Aus den Schnittpunkten mit der Effektivstromlinie und dem Graphen lässt sich die Frequenzdifferenz Δf ermitteln.
- Berechnen Sie die sich daraus ergebende Güte Q des Schwingkreises nach Gleichung (18).
- Diskutieren Sie das Ergebnis, insbesondere die gemessene Resonanzfrequenz, in ihren Abhängigkeiten.

3. Ergänzung

3.1 Vertiefende Fragen

Welche Zustände eines Parallelschwingkreises entsprechen den verschiedenen Zuständen eines schwingenden Faden- oder Federpendels mit äußerer Anregung?

Leiten Sie aus der Gleichung (15) ab, dass die Spannungsüberhöhung im Resonanzfall

$$\frac{U_{C,0}}{U_0} = \frac{\omega_0}{2\delta} \tag{22}$$

ist und sich bei kleinen Dämpfungsfaktoren die Halbwertsbreite der Resonanzkurve zu

$$\Delta\omega \approx 2\delta \tag{23}$$

ergibt.