E02 Physikalisches Praktikum

Kondensator und Spule im Gleichstromkreis

Brandenburgische Technische Universität Cottbus · Senftenberg

Es sollen experimentelle Untersuchungen zu Ein- und Ausschaltvorgängen bei Kapazitäten und Induktivitäten im Gleichstromkreis durchgeführt werden. Als Messgerät wird dabei das Oszilloskop kennengelernt.

1. Theoretische Grundlagen

Mit der in ***Bild 1*** dargestellten Schaltung lässt sich ein ***Kondensator*** auf- und entladen. Es gilt beim Ladevorgang (*Schalter auf **A***) zu jeder Zeit t die Kirchhoffsche Regel (*Maschensatz*):

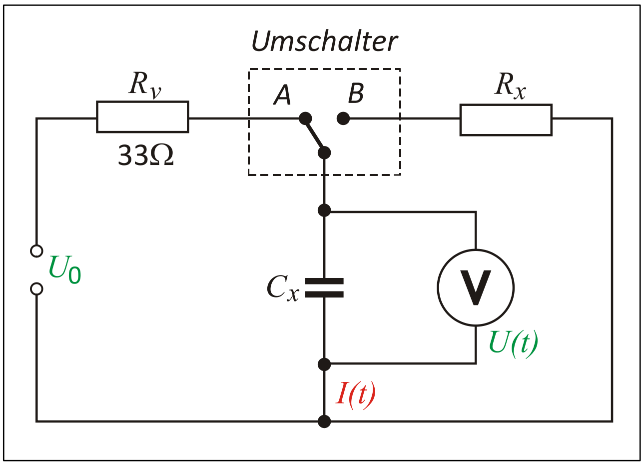


Bild 1: Schaltung zur Ladung und Entladung eines Kondensators

$$U_0 = U(t) + R \cdot I(t). \qquad (1)$$

Mit

$$I(t) = Q(t) = C \cdot U(t) \qquad (2)$$

erhält man die Differentialgleichung

$$U(t) = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot (U(t) - U_0). \quad (3)$$

Mit dieser Gleichung kann neben dem Ladevorgang auch der Entladevorgang beschrieben werden, wenn dazu der Schalter von ***A*** nach ***B*** umgelegt wird (U_0=0). Hat man die gesuchte Lösung $U(t)$ von Gl. (3) bestimmt, so erhält man aus Gl. (2) $I(t)$.

Zwischen den Enden einer ***Spule*** mit vernachlässigbarem Ohmschen Widerstand entsteht bei jeder Änderung der Stromstärke eine Induktionsspannung

$$U = U_{ind} = -L \cdot \dot{I}. \qquad (4)$$

Das negative Vorzeichen drückt aus, dass diese Induktionsspannung der Stromstärkeänderung entgegenwirkt (***Lenzsche Regel***). Schaltet man die Spule in einen Gleichstromkreis (***Bild 2***), so wirkt die Induktionsspannung als zusätzlich in Reihe geschaltete Spannungsquelle. Mit dem Schalter in Stellung ***A*** gilt:

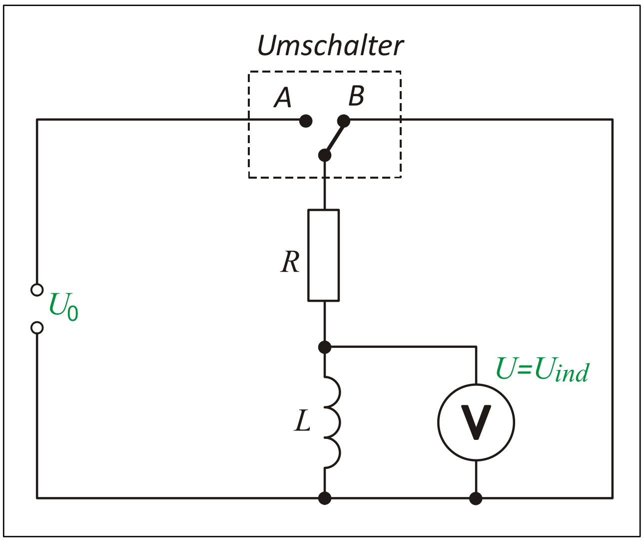


Bild 2: Schaltung zum Ein- und Ausschaltvorgang an einer Spule

$$U_0 - L \cdot \dot{I} = R \cdot I. \qquad (5)$$

Daraus folgt mit

$$I_0 = \frac{U_0}{R} \qquad (6)$$

die Differentialgleichung

$$\dot{I} = -\frac{R}{L} \cdot (I - I_0). \tag{7}$$

Unter der Annahme der gleichen Bedingungen wie oben wird durch diese Gleichung auch der Ausschaltvorgang (*Schalter in **B***) beschrieben.

Aus der Lösung $I(t)$ von Gl. (7) lässt sich aus Gl. (4) auch $U(t)$ berechnen.

Die Differentialgleichungen (3) und (7) haben beide die gleiche Struktur:

$$y = -\frac{1}{\tau} \cdot (y - y_0). \tag{8}$$

Diese lässt sich leicht anschaulich interpretieren:

Wird die Größe y aus einem „*Gleichgewichtszustand*“ y_0 ausgelenkt, so ist ihre Änderungsgeschwindigkeit y proportional zur Größe der aktuellen Auslenkung. Die in der Proportionalitätskonstanten auftretende Größe τ hat die Dimension einer Zeit, sie wird als ***Zeitkonstante*** des Systems bezeichnet.

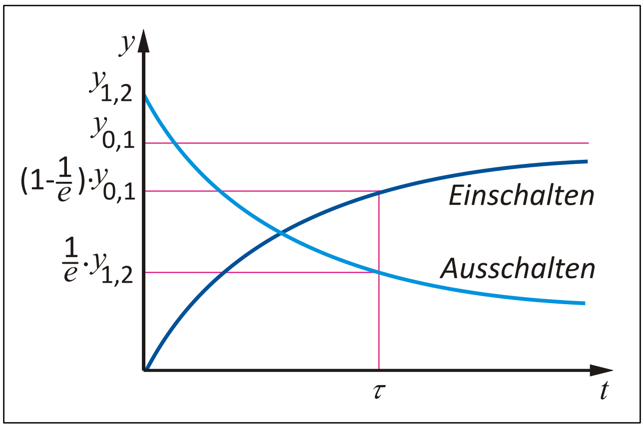


Bild 3: Bestimmung der Zeitkonstanten

Gleichung (8) wird allgemein erfüllt durch

$$y(t) = y_0 + (y_1 - y_0) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{9}$$

y_1 ist die Anfangsauslenkung zum Zeitpunkt $t=0$, y_0 wird für $t \to \infty$ erreicht. Die Größe der Auslenkung aus der Gleichgewichtslage nimmt also exponentiell mit der Zeit ab:

Hinweis: *Die Zeitkonstante τ gibt an, wann beim Abschalten die Auslenkung auf den e-ten Teil ihres Anfangswertes abgefallen ist bzw. beim Einschalten den (1-1/e)-ten Teil des Endwertes erreicht hat (siehe 63%-Methode).*

Bei Kapazitäten gilt

$$\tau = R \cdot C\,, \tag{10}$$

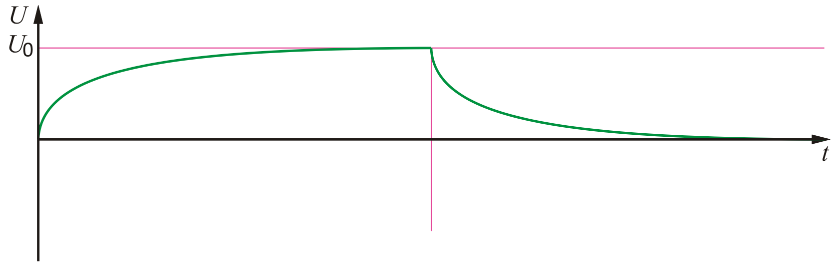
bei Induktivitäten ist

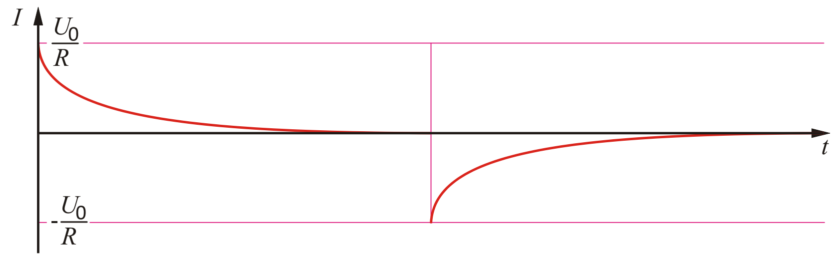
$$\tau = \frac{L}{R}\;. \tag{11}$$

Mit der Lösung Gl. (9) können nun unter Berücksichtigung der entsprechenden Randbedingungen für $t=0$ und für $t \to \infty$ die Gleichungen für Ein- und Ausschaltvorgänge bei Spulen und Kondensatoren angegeben werden.

Kondensator (*Schalterstellung **B***)

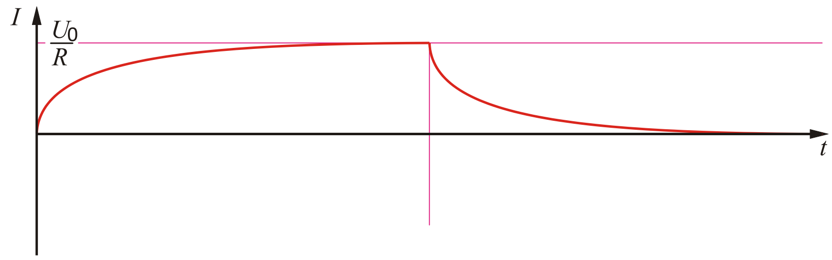
$y = U$	***Laden***	***Entladen***
$y = y(t = 0)$	0	U_0
$y_1 = y(t \to 0)$	U_0	0
Lösung der DGL	$U(t) = U_0 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$	$U(t) = U_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$
Folgerung	$I(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$	$I(t) = -\frac{U_0}{R} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

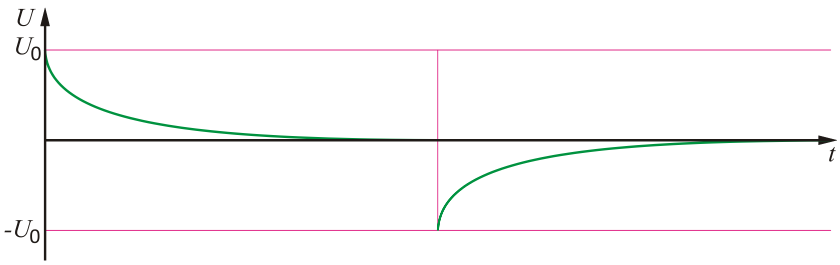




Spule (*Schalterstellung **A***)

$y = I$	***Laden***	***Entladen***
$y = y(t = 0)$	0	$I_0 = \frac{U_0}{R}$
$y_1 = y(t \to 0)$	$I_0 = \frac{U_0}{R}$	0
Lösung der DGL	$I(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$	$I(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$
Folgerung	$U(t) = U_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$	$U(t) = -U_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$





2.Versuch

2.1 Vorbetrachtung

Aufgabe 1: Die Zeitkonstante τ soll Sie in diesem Versuch auf drei verschiedene Arten bestimmen. Wie lauten diese?

Aufgabe 2: Mit einem Spannungsmessgerät (*Innenwiderstand* R_i=1 MΩ ($u(R_i/R_i)$=1%)) wird die Entladungskennlinie $U = f(t)$ über zwei parallel geschaltete Kondensatoren und einem Widerstand von R=(100 $\pm$ 2) kΩ aufgenommen (*siehe* ***Bild 4***). Die Gesamtkapazität C_{ges} wird mit zwei Kondensatoren (C_1=100 µF (5%); C_2=47 µF (2,5%)) realisiert.

a) Skizzieren Sie die Schaltung.
b) Berechnen Sie die Gesamtkapazität C_{ges} und den Ersatzwiderstand R_{ers}.
c) Bestimmen die Zeitkonstante τ sowie die Gesamtabweichung (*absolut und relativ*).

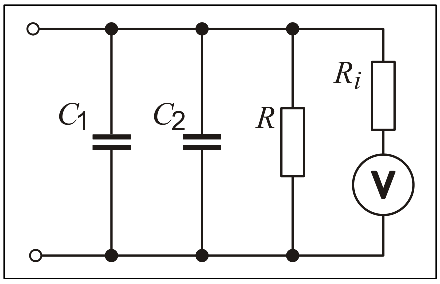


Bild 4: Entladungsschaltung

Aufgabe 3: Stellen Sie die Gleichung $U(t) = U_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$ nach t um.

2.2 Versuchsdurchführung

2.2.1 Verwendete Geräte

Stabilisiertes Netzgerät, Rechteckgenerator, Zweistrahl-Oszilloskop, Multimeter MA 3E mit R_i=10 MΩ ($u(R_i)/R_i$=0,5%), Kondensatoren, Widerstände (*Toleranzen siehe Materialliste*), Spulen, Umschalter, Stoppuhr

2.2.2 Versuchshinweise

Aufgabe 1: Untersuchung des zeitlichen Verlaufs der Entladungsspannung an Kondensatoren

- Bauen Sie die Schaltung entsprechend ***Bild1*** auf.

Hinweis: *Bei Verwendung von Elektrolyt-Kondensatoren ist auf die Polung zu achten!*

- Notieren Sie sich die Toleranzen der Bauelemente
- Messen Sie den zeitlichen Verlauf der Entladungsspannung an den Kondensatoren:

a) bei konstanter Spannung U, konstantem Widerstand R für 2 verschiedene Kapazitäten C (**U=10 V, R=100 kΩ, C_x=(1000** *und* **470) µF**)

b) bei konstanter Spannung U, konstanter Kapazität C, für *2* verschiedene Widerstände R (**U=10 V, C=220 µF, R_x=(470** *und* **100) kΩ**)

c) bei konstantem Widerstand R, konstanter Kapazität C, für 2 verschiedene Spannungen U (**R=100 kΩ, C=200 µF, U_x=(10** *und* **25) V**)

- Stellen Sie bei Schalterstellung ***A*** den geforderten Spannungswert U ein und laden Sie die Kondensatoren auf.
- Mit Betätigen des Schalters (*Stellung* ***B***) beginnen Sie die Zeitmessung mittels Stoppuhr.

- Notieren Sie die Zeiten nach dem Abfall der Spannung um jeweils $1\,\mathrm{V}$ bei fortlaufender Messung (*bei **1c**, $\boldsymbol{U}$=$25\ \mathrm{V}$ in $5\mathrm{V}$-**Schritten***).
- Brechen Sie die Messung bei Erreichen von $0\ \mathrm{V}$ oder nach ***spätestens*** $270\ \mathrm{s}$ ab.

Aufgabe 2: Darstellung des zeitlichen Verlaufs von Strom und Spannung beim Ein- und Ausschaltvorgang an einem Kondensator bzw. an einer Spule mittels eines Zweikanal-Oszilloskops

- Verwenden Sie statt der Spannungsquelle einen Rechteckgenerator, der die Spannung U_0 periodisch ein- und ausschaltet.

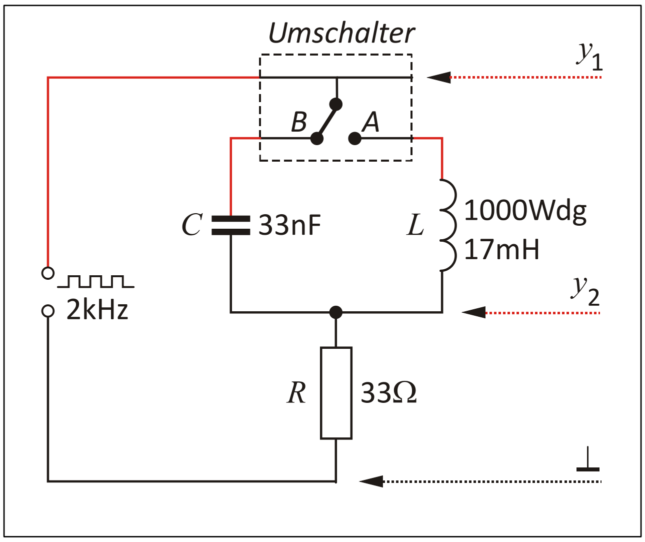


Bild 5: Schaltung zur Darstellung der U,t- und I,t-Kurven bei Spule (***A***) und Kondensator (***B***) mit dem Oszilloskop

- Geben Sie zunächst die Ausgangsspannung des Rechteckgenerators auf einen der Eingänge des Oszilloskops.
- Machen Sie sich mit der Bedienung des Oszilloskops vertraut. (*Veränderung der y-Empfindlichkeit, AC/DC-Umschaltung, Zeitablenkung, Triggerung ⇒ Bedienungsanleitung ist am Praktikumsplatz.*)
- Spannungs- und Stromverlauf werden nach ***Bild 5*** am Oszilloskop sichtbar gemacht.
- Der Spannungsverlauf wird über den einen y-Kanal (y_1) dargestellt. Um auch die Stromstärke auf dem Oszilloskop aufzeichnen zu können wird die an R abfallende Teilspannung $U = I \cdot R$ auf den zweiten y-Kanal (y_2) gegeben.
- Bestimmen Sie aus dem Oszilloskopbild mit Hilfe der x-Kalibrierung am Oszilloskop die jeweilige Zeitkonstante τ.
- Zeichnen Sie die Oszilloskopbilder der Spule (*ohne Eisenkern*) bzw. des Kondensators in Schalterstellung ***A*** bzw. ***B*** ab.

Wichtig: ***Bringen Sie zum Versuch Millimeterpapier mit!***

2.3 Versuchsauswertung

Aufgabe: Zeitlicher Verlauf der Entladungsspannung an Kondensatoren

- Stellen Sie die Messwerte als Funktion $\boldsymbol{U = f(t)}$ graphisch dar. Tragen Sie alle Kennlinien mit den Ausgangsspannungen U_A=$10\ \mathrm{V}$ in ein Diagramm ein.
- Ermitteln Sie aus den Entladungskurven graphisch die Zeitkonstanten τ (*siehe **Bild 3***).
- Stellen Sie die Messwerte der ***Aufgaben 1a*** und ***1b*** als Funktion $\boldsymbol{U = f(t)}$ auf halblogarithmischem Papier (*$\boldsymbol{t/\mathrm{s}}$ linear, $\boldsymbol{U/\mathrm{V}}$ logarithmisch*) graphisch dar. Bestimmen Sie die Anstiege der Funktionen und berechnen Sie die entsprechenden Zeitkonstanten τ.
- Stellen Sie die Messwerte der ***Aufgabe 1c*** als Funktion $\boldsymbol{U = f(t)}$ wie folgt graphisch dar:

– direkt auf Millimeterpapier sowie
– halblogarithmisch ($\boldsymbol{t/\mathrm{s}}$ *linear*, $\boldsymbol{U/\mathrm{V}}$ *logarithmisch*).

- Zeichnen Sie zu den beiden gemessenen auch die zu erwartenden theoretischen Kennlinien mit ein und diskutieren Sie die Ergebnisse.
- Bestimmen Sie die Anstiege der halblogarihmischen Funktionen und berechnen Sie die entsprechenden Zeitkonstanten τ.

- Vergleichen Sie tabellarisch alle Zeitkonstanten τ der Ausgangsspannungen $U_A = 10\ \mathrm{V}$ mit den theoretischen Werten nach Gleichung (10). Die Toleranzen der Bauelementeparameter bzw. die Messunsicherheiten sind hierbei mit einzubeziehen.
- Diskutieren Sie die Ergebnisse.

3. Ergänzung

3.1 Vertiefende Fragen

Aufgabe 1: Was ändert sich in ***Bild 4***, wenn man den Ohmschen Widerstand der Spule nicht vernachlässigen kann?

Aufgabe 2: Warum ist die Aufnahme einer Ein- bzw. Ausschaltkurve nach ***Bild 2*** mit dem vorgegebenen Multimeter, Stoppuhr, Spule $\mathbf{1000\,Wdg.}$ ($\boldsymbol{L}=\mathbf{17\ mH}$) und vorhandenen Widerständen ($\boldsymbol{R} = \mathbf{33\Omega}$ *bis* $\mathbf{100\,k\Omega}$) nicht möglich?

3.2 Ergänzende Bemerkungen

Bei der Schaltung nach ***Bild 1*** ist die Kondensatorspannung proportional zum Zeitintegral des Stromes

$$U(t) = \frac{1}{C} \cdot Q(t) = \frac{1}{C} \int I(t) \cdot \mathrm{d}t \qquad (12)$$

Die Schaltung kann als Integrierglied eingesetzt werden. Umgekehrt ist die Stromstärke in R proportional zu $\mathrm{d}U/\mathrm{d}t$. Das *RC*-Glied ist also prinzipiell auch als Differenzierglied verwendbar. Für praktische Anwendungen werden Operationsverstärker so mit *RC*-Gliedern beschaltet, dass deren Ausgangsspannung proportional zur Ableitung bzw. zum Zeitintegral der Eingangsspannung ist.

Für Zeiten, die klein gegen die Zeitkonstante *RC* sind, ist der Anstieg der Kondensatorspannung in guter Näherung linear. Damit lässt sich eine Sägezahnspannung erzeugen, die beispielsweise für die Zeitablenkung beim Oszilloskop benötigt wird.

Die Differentialgleichung (8) spielt auch in anderen Gebieten der Physik eine wichtige Rolle: sie beschreibt z.B. den radioaktiven Zerfall und den Temperaturausgleich eines wärmeren Körpers mit seiner kühleren Umgebung.